目 录

第 五 章

富理埃级数的发散

1. 法都的问题

法都(P. Fatou)在他的"三角级数与泰勒级数"(Acta M., 30, 1930)的名著中，提出如下的问题：存在幂级数 $\sum a_n z^n$ 在圆周 $|z|=1$ 上到处发散而满足条件 $a_n=o(1)$ 的吗?

卢金(Лузин)于 1911 年，在意大利的杂志(R. C. Palermo)上，给法都的问题以肯定的回答.

卢金的幂级数 $\sum a_n z^n$ $a_n=o(1)$ 而 $\sum a_n z^n$ 在 $|z|=1$ 上处处发散.

置 $z=e^{i\varphi}$ $(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$, $S_n(z)=1+z+\cdots+z^n$, 则

$$|S_n(z)|=\left|\frac{\sin(n+1)\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right|.$$

当 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时,

$$\frac{2}{\pi}\leqslant\left|\frac{\sin\theta}{\theta}\right|\leqslant 1.$$

因此，在区间

$$-\frac{\pi}{n+1}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{n+1}$$

上,

$$\left|\frac{\sin(n+1)\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right|=(n+1)\left|\frac{\sin(n+1)\frac{\varphi}{2}}{(n+1)\frac{\varphi}{2}}\right|\left|\frac{\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right|$$

$$\geqslant\frac{2}{\pi}(n+1).$$

以 $n+1$ 个分点

$$\varphi_\nu=e^{i\frac{2\nu\pi}{n+1}}\quad(\nu=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$

将单位圆周等分成 $n+1$ 个圆弧. 当

$$\frac{\pi}{n+1}(2\nu-1)\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{n+1}(2\nu+1)$$

时,我们见到 $|S_n(e^{-i\frac{2\nu\pi}{n+1}}z)|\geqslant\frac{2}{\pi}(n+1)$. 作多项式

$$H_{(n)}(z)=S_n(z)+z^{n+1}S_n(z/\varphi_1)+z^{2(n+1)}S_n(z/\varphi_2)+\cdots$$
$$+z^{n(n+1)}S_n(z/\varphi_n),$$

$H_{(n)}(z)$ 的次数是 $\psi(n)=n(n+2)$, 每项系数的模都等于 1. 置

$$\lambda_1=\psi(0)+1=1^2,$$
$$\lambda_2=\psi(0)+\psi(1)+2=1^2+2^2,$$
$$\lambda_3=\psi(0)+\psi(1)+\psi(2)+3=1^2+2^2+3^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\lambda_n=\psi(0)+\cdots+\psi(n-1)+n=1^2+2^2+\cdots+n^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

那末 $z^{\lambda_n}H_{(n)}(z)$ 的最低次项的次数 λ_n 大于 $z^{\lambda_{n-1}}H_{(n-1)}(z)$ 的最高次项的次数 $\lambda_{n-1}+\psi(n-1)=\lambda_n-1$. 由是

$$H_{(0)}(z)+\frac{1}{\sqrt{1}}z^{\lambda_1}H_{(1)}(z)+\frac{1}{\sqrt{2}}z^{\lambda_2}H_{(2)}(z)+\cdots$$
$$+\frac{1}{\sqrt{n}}z^{\lambda_n}H_{(n)}(z)+\cdots$$

成一 z 的幂级数 $\sum a_nz^n$, $a_n=o(1)$.

对于单位圆周上的一点 ξ，前述 $n+1$ 个圆弧 $(\varphi_0, \varphi_1), \cdots, (\varphi_n, \varphi_0)$ 中必有一个圆弧含有 ξ. 由于

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\xi^{\lambda_n+\nu(n+1)}H_{(n)}\right|\geqslant\varlimsup_{n\to\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{2}{\pi}(n+1)\right|=\infty,$$

所以 $\sum\alpha_n\xi^n$ 发散. 从而 $\sum\alpha_n z^n$ 在 $|z|=1$ 上到处发散.

置 $\alpha_n=a_n+ib_n$，则 $\sum\alpha_n z^n$ 的实部和虚部($z=e^{i\varphi}$ 的话)分别是

$$\sum_0^\infty(a_n\cos n\varphi-b_n\sin n\varphi),\qquad\sum_0^\infty(a_n\sin n\varphi+b_n\sin n\varphi).$$

两者之中，必有一个级数，它的发散点集的测度 $(0\leqslant\varphi\leqslant2\pi)$ 不小于 π 的. 但是我们可以证明，第一个三角级数几乎处处发散. 从等式

$$S_n(e^{i\varphi})=\frac{1}{2}\left\{(1-\cos(n+1)\varphi)+\frac{\sin\varphi\sin(n+1)\varphi}{1-\cos\varphi}\right\}+\frac{i}{2}\left\{-\sin(n+1)\varphi+\frac{\sin\varphi[1-\cos(n+1)\varphi]}{1-\cos\varphi}\right\},$$

得到 $\frac{1}{\sqrt{n}}z^{\lambda_n+\nu(n+1)}S_n(z/\varphi_\nu)$ 的实部等于

$$\frac{C}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\cos\left[\left(\theta+\frac{2\pi}{n+1}\right)\mu_n+(n+1)\frac{\theta}{2}\right],$$

这里 $|C|<2$, $\mu_n=\lambda_n+\nu(n+1)$, $\theta=\varphi-\frac{2\nu\pi}{n+1}$. 当

$$(\nu)_1\qquad\frac{\pi}{n+1}(2\nu-1)\leqslant\varphi<\frac{\pi}{n+1}(2\nu+1)$$

时，$|\theta|\leqslant\frac{\pi}{n+1}$. 因此

$$\begin{aligned}&\left|\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}z^{\lambda_n+\nu(n+1)}S_n(z/\varphi_\nu)\right)-\frac{C}{\sqrt{n}}\right|\\&\quad>\frac{\sqrt{n}}{4}\left|\cos\left[\left(\theta+\frac{2\pi}{n+1}\right)\mu_n+\frac{1}{2}(n+1)\theta\right]\right|\\&\quad=\frac{\sqrt{n}}{4}\left|\cos\pi x\left[\nu+\left(\frac{\lambda_n}{n+1}+\frac{1}{2}\right)\right]\right|,\end{aligned}$$

这里 $\theta=\frac{\pi}{n+1}x$，从而 $-1\leqslant x\leqslant1$. 在区间 $-1\leqslant x\leqslant1$ 上，适合

$$\left|\cos\pi x\left(\nu+\frac{\lambda_n}{n+1}+\frac{1}{2}\right)\right|\leqslant\sin\frac{1}{\log n}$$

的 x 所成之点集的测度是小于 $4\cdot\frac{1}{\log n}$ 的. 因此在区间 $(\nu)_1$ 上，相应的点集的测度小于 $\frac{16}{n+1}\cdot\frac{1}{\log n}$ $(\nu=0, 1, \cdots, n)$；在整个圆周 $|z|=1$ 上，具有上述性质的点集，其测度小于 $\frac{16}{\log n}$. 这就是说，圆周 $|z|=1$ 上，除开一个测度小于 $16/\log n$ 的点集，在其他的点 z，成立着如下的不等式：

$$(\nu)_2 \qquad \left|\operatorname{Re}(\cdots)-\frac{C}{\sqrt{n}}\right|>\frac{\sqrt{n}}{4}\sin\frac{1}{\log n}\sim\frac{1}{4}\frac{\sqrt{n}}{\log n}$$

(对于 n，有一个 ν, $\nu=0, 1, \cdots, n$). 因此 $\sum(a_n\cos n\theta-b_n\sin n\theta)$ 几乎处处发散. 事实上，假如这个实部级数的收敛点集 $E\subset(0, 2\pi)$ 具有正的测度 $|E|$，那末取 N 满足 $\frac{16}{\log N}<|E|$，当 $n>N$ 时，由不等式 $(\nu)_2$, $|E|<\frac{16}{\log n}$. 这是与 $n>N$ 相冲突的. 由是 $|E|=0$. 我们可述如下的定理——卢金的定理：

定理 1 存在系数为 $o(1)$ 的几乎到处发散的三角级数.

那末存在几乎到处发散的富理埃级数吗？1923 年，柯尔莫哥洛夫 (А. Н. Колмогоров) 在数学基础 (Fund. Math., 4) 上给此问题以肯定的回答.

定理 2 存在到处发散的(勒贝格)富理埃级数.

【证明】 对应于所要富理埃级数 $\mathfrak{S}[f]$ 的 $f(\theta)$，是利用费耶核

$$K_n(\theta)=\frac{1}{2n+2}\left[\frac{\sin(n+1)\theta/2}{\sin\theta/2}\right]^2$$

作成的. 对于 n，选取适当大的 $m_0<m_1<\cdots<m_n$. 置 $\theta_\nu=\frac{2\nu\pi}{2n+1}$，作

$$\psi(\theta)=\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}K_{m_\nu}(\theta-\theta_{2\nu}).$$

当 $m_j\leqslant k<m_{j+1}$ 时，$\mathfrak{S}[\psi]$ 的第 k 部分和 $S_k(\psi, \theta)$ 是

$$
\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{j}K_{m_\nu}(\theta-\theta_{2\nu})
$$

$$
+\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=j+1}^{n}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{l=1}^{k}\frac{m_\nu-k+k-l+1}{m_\nu+1}\cos l(\theta-\theta_{2\nu})\right\}
$$

$$
=\frac{1}{n+1}\left\{\sum_{\nu=0}^{j}K_{m_\nu}(\theta-\theta_{2\nu})+\sum_{\nu=j+1}^{n}\left[\frac{m_\nu-k}{2m_\nu+2}\right.\right.
$$

$$
\left.\left.+\frac{k+1}{m_\nu+1}K_k(\theta-\theta_{2\nu})+\sum_{l=1}^{k}\frac{m_\nu-k}{m_\nu+1}\cos l(\theta-\theta_{2\nu})\right]\right\}.
$$

方括号[…]中第一和第三两项之和等于 $\frac{m_\nu-k}{m_\nu+1}D_k(\theta-\theta_{2\nu})$，第二项是正的；因此，当 $m_j\leqslant k<m_{j+1}$ 时，

$$
S_k(\psi,\ \theta)\geqslant\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=j+1}^{n}\frac{m_\nu-k}{m_\nu+1}D_k(\theta-\theta_{2\nu}).
$$

假如 $2k+1$ 是 $2n+1$ 的整数倍，那末

$$
\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)(\theta_{2\nu}-\theta)=-\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta.
$$

从而在 $2k+1$ 是 $2n+1$ 的整数倍，$m_j\leqslant k<m_{j+1}$ 的条件下，

$$
S_k(\psi,\ \theta)\geqslant-\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta}{n+1}\sum_{\nu=j+1}^{n}\frac{m_\nu-k}{m_\nu+1}\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}(\theta_{2\nu}-\theta)}.
$$

取正数 δ 足够小，作区间 $I_\nu=(\theta_\nu+\delta,\ \theta_{\nu+1}-\delta)$。我们需要如下的

引理 设 $m_0,\ m_1,\ \cdots,\ m_n$ 是足够大的整数 $(m_\nu<m_{\nu+1})$。对于

$$
\theta\in I_{2j}+I_{2j+1},
$$

有整数 $k=k(\theta)$ 适合于

$$
\frac{2k+1}{2n+1}=\text{整数},\quad m_j\leqslant k<\frac{1}{2}m_{j+1},\quad -\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta\geqslant\frac{1}{2}.
$$

应用引理，我们得到

$$
S_k(\psi,\ \theta)\geqslant\frac{1}{2n+2}\sum_{\nu=j+1}^{n}\frac{1}{2(\theta_{2\nu}-\theta)}
$$

$$
\geqslant\frac{1}{4n+4}\sum_{\nu=j+1}^{n}\frac{(2n+1)/2\pi}{2\nu+2-(2j+2)}
$$

$$
=\frac{2n+1}{16\pi(n+1)}\sum_{\nu=j+1}^{n}\frac{1}{\nu-j}>C_1\log(n-j)>C_2\log n,
$$

$j\leqslant n-\sqrt{n}$ 的话；$C_1,\ C_2,\ \cdots$ 都是绝对常数。

取 m_0 很大，当 $\theta\in(\theta_\nu-\delta,\ \theta_\nu+\delta)$ 时，可使

$$\phi(\theta)=K_{m_0}((2n+1)\theta)\geqslant n\quad(\nu=0,\ 1,\ \cdots,\ 2n).$$

置 $f_n(\theta)=\phi(\theta)+\psi(\theta)$，那末，当 $\theta\in I_{2j}+I_{2j+1},\ 0\leqslant j\leqslant n-\sqrt{n}$ 时，

$$S_k(f_n,\ \theta)=S_k(\phi,\ \theta)+S_k(\psi,\ \theta)=\phi(\theta)+S_k(\psi,\ \theta)\geqslant C_3\log n.$$

现在于区间 $J_\nu=(\theta_\nu-\delta,\ \theta_\nu+\delta)\ (\nu=0,\ 1,\ \cdots,\ 2n)$ 上，估计 $S_k(f_n,\ \theta)$. 我们将证

$$S_{m_0}(f_n,\ \theta)\geqslant\frac{1}{2}n\quad(\theta\in(\theta_\nu-\delta,\ \theta_\nu+\delta)).$$

事实上，由于 $S_{m_0}(f_n,\ \theta)\geqslant n+S_{m_0}(\psi,\ \theta)$，所以只要证明末项 $>-C_4\log n$ 就好了. 首先假设 $\theta\in(\theta_{2h}-\delta,\ \theta_{2h}+\delta)$，$k=m_0$，那末从上面已得的结果，

$$S_{m_0}(f_n,\ \theta)\geqslant\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{m_\nu-m_0}{m_\nu+1}D_{m_0}(\theta-\theta_{2\nu}).$$

由于 $D_{m_0}(\theta-\theta_{2h})>0$，所以当 $\theta_{2h}-\delta\leqslant\theta\leqslant\theta_{2h}+\delta$ 时，

$$S_{m_0}(f_n,\ \theta)\geqslant\frac{1}{n+1}\sum_{\nu\neq h}\frac{m_\nu-m_0}{m_\nu+1}D_{m_0}(\theta-\theta_{2\nu})$$

$$\geqslant-\frac{1}{n+1}\sum_{\nu\neq h}\frac{2n+1}{4\pi|h-\nu|}>-C_5\log n.$$

当 $\theta_{2h+1}-\delta\leqslant\theta\leqslant\theta_{2h+1}+\delta$ 时，我们仍能得到

$$S_{m_0}(\psi,\ \theta)>-C_6\log n,\quad S_{m_0}(f_n,\ \theta)>\frac{1}{2}n.$$

由是，对于 $[0,\ 4\pi(n-\sqrt{n})/(2n+1)]$ 中的任一 θ，存在一个 k，$k>n$，

$$S_k(f_n,\ \theta)>C\log n\quad(n>n_1).$$

这样，我们得到数列 $f_n(\theta)$，$(n=1,\ 2,\ \cdots)$，它具有下述种种性质：

(i) $f_n=\psi+\varphi\geqslant0$，$\displaystyle\int_0^{2\pi}f_n(\theta)d\theta=2\pi$.

(ii) 点集 $\displaystyle\sum_{j=0}^{N}(I_{2j}+I_{2j+1}+I_j)\ (N=[n-\sqrt{n}])$ 含有 $E_n=\left[0,\ \dfrac{4\pi N}{2n+1}\right]$. 置 $\lambda_n=m_0$，$\nu_n=m_N$；当 $\theta\in E_n$ 时，有 k 适合于 $\lambda_n\leqslant k<\nu_n$ 以及

$$S_k(f_n,\ \theta)>C\log n\quad(C>0).$$

取 λ_{n+1} 足够大，使 $\lambda_{n+1}>\nu_n(n=1, 2, \cdots)$. 当 $n_\mu>\exp(\mu^4)$时，级数

$$\sum(\log n_\mu)^{-\frac{1}{2}}$$

收敛；从而函数

$$f(\theta)=\sum_{\mu=1}^{\infty} f_{n_\mu}(\theta)\ (\log n_\mu)^{-\frac{1}{2}}$$

具有处处发散的富理埃级数. 事实上，由于 $f_{n_\mu}(\theta)\geqslant 0$，所以

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta=\sum_{\mu=1}^{\infty}\int_0^{2\pi} f_{n_\mu}(\theta)\log(n_\mu)^{-\frac{1}{2}}d\theta$$

$$=2\pi\sum_{\mu=1}^{\infty}(\log n_\mu)^{-\frac{1}{2}},$$

因此 $f(\theta)$ 具有富理埃级数 $\mathfrak{S}[f]$.

现在证明 $\mathfrak{S}[f]$ 处处发散. 设

$$\theta\in E_{n_M},\ u=\sum_{\mu=1}^{M-1} f_{n_\mu}\cdot(\log n_\mu)^{-\frac{1}{2}},$$

$$v=f_{n_M}\cdot(\log n_M)^{-\frac{1}{2}},$$

$$f=u+v+w.$$

存在如下的 $k=k(\theta)$: $\lambda_{n_M}\leqslant k<\nu_{n_M}$. 由是，假设 $n_\mu>n_{\mu-1}^4$,

$$S_k(u,\ \theta)=u\geqslant 0,$$

$$S_k(v,\ \theta)=S_k(f_{n_M}(\log n_M)^{-\frac{1}{2}},\theta)>C(\log n_M)^{\frac{1}{2}},$$

$$|S_k(w,\ \theta)|\leqslant\frac{2k+1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{\mu=M+1}^{\infty}\frac{f_{n_\mu}(t)}{(\log n_\mu)^{\frac{1}{2}}}\right|dt$$

$$=(4k+2)\sum_{\mu=M+1}^{\infty}(\log n_\mu)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant(4k+2)(\log n_{M+1})^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\right)$$

$$=(8k+4)(\log n_{M+1})^{-\frac{1}{2}}.$$

我们又不妨假设 $(\log n_\mu)^{\frac{1}{2}}>\nu_{n_{\mu-1}}$，因此

$$(8k+4)(\log n_{M+1})^{-\frac{1}{2}}<(8k+4)\nu_{n_M}^{-1}<16.$$

从而

$$S_k(f,\ \theta)=S_k(u,\ \theta)+S_k(v,\ \theta)+S_k(w,\ \theta)>C\log(n_M)^{\frac{1}{2}}-16.$$

由是可知 E_{n_M} 中一切点都是 $\mathfrak{S}[f]$ 的发散点; M 可以很大, E_M 的极限点集是$[0, 2\pi]$, 所以 $\mathfrak{S}[f]$ 处处发散.

【引理的证明】 我们探求适合条件的 k. 置 $2k+1=\rho(2n+1)$, ρ 是奇数. 我们逐一决定 $m_0, m_1, \cdots$. 设 $m_0, m_1, \cdots, m_j$ 已经定好, $\theta\in I_{2j}+I_{2j+1}$. 置

$$\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)(\theta_{2j+2}-\theta)=\sin 2\pi\rho\alpha,$$

则

$$\alpha=(2n+1)(\theta_{2j+2}-\theta)/4\pi,$$

$$\alpha\in\left[\eta, \frac{1}{2}-\eta\right]+\left[\frac{1}{2}+\eta, 1-\eta\right],$$

$$\eta=\eta(\delta, n).$$

设 ρ_0 是一奇数. 当 $\rho=\rho_0, \rho_0+2, \rho_0+4, \cdots$ 时, $2\pi\rho\alpha$ 取值

$$2\pi\rho_0\alpha,\quad 2\pi\rho_0+2\pi\alpha,\quad 2\pi\rho_0+4\pi\alpha,\quad \cdots.$$

相邻两角之差是 $2\pi\alpha$. 我们分为两个情况来处理:

(i) $$2\alpha\in\left[2\eta, \frac{1}{3}\right),$$

(ii) $$2\alpha\in\left[\frac{1}{3}, 1-2\eta\right].$$

由于 $2\alpha\in[2\eta, 1-2\eta]+[1+2\eta, 2-2\eta]$, 所以在$[0, 2\pi]$上来说, 只要假设(i)和(ii)两种情况就行了. 假如(i)成立, 那末取最小的整数 ν 使 $\rho_0\alpha+2\alpha\nu$ 的分数部分 $\geqslant\frac{1}{3}$. 置 $\rho=\rho_0+2\nu$, 我们就得到 $\sin 2\pi\rho\alpha\geqslant\frac{1}{2}$.

假如 α 是一无理数, 那末 $s\alpha\ (s=1, 3, 5, \cdots)$ 的分数部分

$$(s\alpha)=s\alpha-[s\alpha]\quad (s=1, 3, 5, \cdots)$$

在区间中是稠密的*). 因此, 必有 $(s\alpha)$ 落入于 $\left(2\eta, \frac{1}{3}\right)$. 由 (i) 知有

---

*) 这就是说, 当 $0<a<b<1$ 时, 区间 (a, b) 中必含有一个 $(s\alpha)$. 由连分数的理论, 假如 x 是一无理数, Q 是一正整数, 那末必有既约分数 $\frac{p}{q}$ 适合于 $\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}$, $q>Q$. 从而 $(qx)<\frac{1}{q}$. $Q>\frac{1}{a}$ 的话, 必有整数 N 使 $(Nqx)\in(a, b)$. 置 $x=(s\alpha)$, $Nqs=s_0$, 则 $(s_0\alpha)$ 是在区间 (a, b) 中的.

奇数 ρ 适合于 $\sin 2\pi\rho\alpha \geqslant \frac{1}{2}$. 假如 α 是一既约分数 $\frac{p}{q}$, 那末当 q 是奇数时, $\rho_0 p$, $(\rho_0+2)p$, $(\rho_0+4)p$, $\cdots$, $(\rho_0+2q-2)p$ 以 q 相除的余数是两两相异的. 换句话说, 余数是 $0, 1, 2, \cdots, q-1$ 的一个排列. 当 $q \geqslant 3$ 时, $\frac{r}{q}$ $(r=0, 1, \cdots, q-1)$ 中必有一数落入 $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ 中. 假如 q 是偶数, 那末 $\frac{q}{2}$ 个数

$$\rho_0 p, \quad (\rho_0+2)p, \quad (\rho_0+4)p, \quad \cdots, \quad (\rho_0+q-2)p$$

关于 $\bmod q$ 是两两相异的, 以 q 除后的余数是 $1, 3, \cdots, q-1$ 的一个排列. 由是

$$\frac{1}{q}, \quad \frac{3}{q}, \quad \cdots, \quad \frac{q-1}{q}$$

是

$$\frac{\rho_0 p}{q}, \quad \frac{(\rho_0+2)p}{q}, \quad \cdots, \quad \frac{(\rho_0+q-2)p}{q}$$

的分数部分的一个排列. 由于

$$\frac{1}{2} \overline{\in} \left(\eta, \frac{1}{2}-\eta\right)+\left(\frac{1}{2}+\eta, 1-\eta\right),$$

所以我们可说 $q=4, 6, 8, \cdots$. 当 $q=4$ 时,

$$\frac{1}{4} \in \left(0, \frac{1}{3}\right);$$

当 $q=6$ 时,

$$\frac{1}{6} \in \left(0, \frac{1}{3}\right);$$

当 $q>6$ 时,

$$\frac{2}{q} < \frac{1}{3}.$$

总而言之, 即使在(ii)的情况, 也必有

$$(s\alpha) \in \left(0, \frac{1}{3}\right),$$

从而有奇数 ρ 适合于

$$\sin 2\pi\rho\alpha \geqslant \frac{1}{2}.$$

从 ρ 可以导出 k, 当 $m_l \leqslant k < m'_l$ 时, 我们可取 $m_{l+1} > 2m'_l$, 引理证毕, 定理 2 证明完毕.

内窦(L. Neder)于 1921 年在德国的数学年刊 84 上，证明：对于 $\alpha_n\to 0$, $\sum\alpha_n^2=\infty$ 的正数数列$\{\alpha_n\}$，存在 $\{c_n\}$ 满足 $c_n=O(\alpha_n)$ 且使幂级数 $\sum c_n z^n$ 在$|z|=1$ 上处处发散. 这个结果，可以写成如下的形式：

定理 3 对于如下的数列 $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n>0$, $\sum\alpha_n^2=\infty$, 必有处处发散的一对共轭三角级数，其系数适合于 $a_n=O(\alpha_n)$, $b_n=O(\alpha_n)$.

这里引入斯捷切金(С. Б. Стечкин, ИАН, 1957)的证明. 证明的基础是下面的

引理 1 设 $p\geqslant 24$, 固定着 φ, 作 x 的三角多项式

$$D_p(x,\ \varphi)=\sum_{k=0}^{p-1}\cos(kx+\varphi),$$

则当

$$\frac{\pi}{p}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{p}$$

时，有如下的 k_1 和 k_2：

$$0\leqslant k_1<k_2<p,$$

$$\left|\sum_{k=k_1}^{k_2}\cos(kx+\varphi)\right|\geqslant\frac{p}{48}.$$

【证明】 置 $\psi_k=kx+\varphi$, 则 $\varphi=\psi_0\leqslant\psi_1\leqslant\cdots\leqslant\psi_{p-1}=\varphi+(p-1)x$. 区间 $I=[\psi_0,\ \psi_{p-1}]$ 的长等于

$$(p-1)x\geqslant\frac{p-1}{p}\pi\geqslant\left(1-\frac{1}{24}\right)\pi=\frac{23}{24}\pi.$$

因此，I 或是包含长为 $\frac{\pi}{4}$ 的一个子区间 I_+, 当 $\psi\in I_+$ 时, $\cos\psi\geqslant\frac{1}{2}$; 或是 I 包含 I_-, 当 $\psi\in I_-$ 时，

$$\cos\psi\leqslant-\frac{1}{2},\quad |I_-|=\frac{\pi}{4}.$$

两种情况总有一种成为事实. 由于 $\psi_0,\ \cdots,\ \psi_{p-1}$ 的相邻两点之差是

$$x\leqslant\frac{3\pi}{p}\leqslant\frac{\pi}{4},$$

所以 ψ_k 落在 I_+(或是 I_-) 的个数不小于

$$\frac{\pi}{4}\div x\geqslant\frac{\pi}{4}\div\frac{3\pi}{p}\geqslant\left[\frac{p}{12}\right]\geqslant\frac{p}{12}-1\geqslant\frac{p}{24}.$$

设 $\psi_k\in I_+$ 的最小和最大的 k 分别为 k_1 和 k_2, 那末

$$k_2-k_1+1\geqslant\frac{p}{24},$$

$$\sum_{k=k_1}^{k_2}\cos(kx+\varphi)=\sum_{k=k_1}^{k_2}\cos\psi_k\geqslant\frac{1}{2}(k_2-k_1+1)\geqslant\frac{p}{48}.$$

同样可证在 I_- 的情况，左方的和 $\leqslant-\frac{p}{48}$.

总之

$$\left|\sum_{k=k_1}^{k_2}\cos(kx+\varphi)\right|\geqslant\frac{p}{48}.$$

引理证毕.

其次，我们需要下述引理 2 中的自然数列 $\{p_n\}$.

引理 2 对于 $\{\alpha_n\}$，当 $\alpha_n\downarrow 0$, $\sum\alpha_n^2=\infty$ 时，存在增加的自然数列 $\{p_n\}$ 适合于

$$\frac{1}{p_n}\leqslant\alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_n},\quad \sum\frac{1}{p_n}=\infty.$$

【证明】 设 $N_0=0$, $N_1<N_2<\cdots<N_n$ 都是自然数. 当 N_0, N_1, $\cdots$, N_{n-1} 已经定好的时候，N_n 是适合于 $(N-N_{n-1})\alpha_N>1$ 的最小整数. N_n 是存在的，假如不然，那末当 $N>N_{n-1}$ 时，$(N-N_{n-1})\alpha_N\leqslant 1$，从而

$$\alpha_N=O\left(\frac{1}{N}\right),$$

有背于 $\sum\alpha_n^2=\infty$. 由是，当 $n=1, 2, \cdots$ 时，

$$(1)\qquad (N-N_{n-1})\alpha_N\leqslant 1\quad (N_{n-1}\leqslant N<N_n),$$

$$(N_n-N_{n-1})\alpha_{N_n}>1.$$

我们要证

$$p_n=N_n-N_{n-1}\quad (n=1, 2, \cdots)$$

是适合引理 2 中一切条件的. 首先，由定义，$p_n\alpha_{N_n}>1$，或是

$$\frac{1}{p_n}<\alpha_{N_n}=\alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_n},$$

从

$$p_{n+1}\alpha_{N_{n+1}}>1\geqslant(p_n-1)\alpha_{N_n}\geqslant(p_n-1)\alpha_{N_{n+1}},$$

得到 $p_{n+1}>p_n-1$. 因此，$p_1\leqslant p_2\leqslant p_3\leqslant\cdots$.

最后证明 $\sum p_n^{-1}=\infty$. 由于 $p_n\alpha_{N_n}\leqslant 1+\alpha_{N_n}\leqslant 1+\alpha_1$, 所以

$$\alpha_{N_n}\leqslant\frac{1+\alpha_1}{p_n}.$$

因此

$$\sum_{N=N_n}^{N_n+p_n-1}\alpha_N^2\leqslant p_n\alpha_{N_n}^2\leqslant(1+\alpha_1)^2p_n^{-1}. \tag{2}$$

利用(1),我们见到

$$\sum_{N_n+p_n}^{N_{n+1}-1}\alpha_N^2\leqslant\sum_{N_n+p_n}^{N_{n+1}-1}\frac{1}{(N-N_n)^2}=\frac{1}{p_n^2}+\cdots+\frac{1}{(p_{n+1}-1)^2} \tag{3}$$

$$<\sum_{k=p_n}^{\infty}\frac{1}{k^2}<\frac{2}{p_n}.$$

将(2)和(3)两式相加,得到

$$[2+(1+\alpha_1)^2]\frac{1}{p_n}>\sum_{N=N_n}^{N_{n+1}-1}\alpha_N^2.$$

关于 n 相加,我们见到

$$\sum_1^{N_{n+1}}\frac{1}{p_n}>\frac{1}{2+(1+\alpha_1)^2}\sum_{N=p_n}^{N_{n+1}-1}\alpha_N^2\to\infty\quad(n\to\infty).$$

引理 2 证毕.

【定理 3 的证明】 我们利用形如

$$T_{N,p}(x,\ \gamma)=\sum_{k=0}^{p-1}\cos[(N+k)x-k\gamma],$$

$$Q_{N,p}(x,\ \gamma)=\sum_{k=0}^{p-1}\sin[(N+k)x-k\gamma]$$

的互相共轭的三角多项式来作成所要的两个三角级数. 置

$$\gamma_n=2\pi\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{p_k}-\pi\ \frac{1}{p_n},$$

则所要的三角级数就是

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}T_{N_{n-1},p_n}(x,\ \gamma_n),$$

$$\overline{S}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}Q_{N_{n-1},p_n}(x,\ \gamma_n).$$

这两个级数都不能"并项"的. 比方说, $S(x)$的 n 项是 $N_{n-1}+p_n-1$ 阶的多项式,由于

$$N_{n-1}+p_n-1=N_k-1<N_n,$$

所以它不会和 $S(x)$ 的第 $n+1$ 项并项，后者是从 N_n 阶的项开始的. $S(x)$和 $\bar{S}(x)$的互相共轭是显然的. 这些级数的系数满足——第 N 项系数——

$$|a_N|\leqslant\frac{1}{p_n},\quad |b_N|\leqslant\frac{1}{p_n}\quad (N_{n-1}\leqslant N<N_n).$$

由于 $p_n^{-1}\leqslant\alpha_{N_n}\leqslant\alpha_n$, 所以 a_n 与 b_n 都是 $O(\alpha_n)$.

现在证明 $S(x)$ 到处发散. 设 $0\leqslant x_0<2\pi$, 对于任一正整数 l, 存在如下的 n_l:

$$2\pi\sum_{k=1}^{n_l-1}\frac{1}{p_k}\leqslant x_0+2\pi l<2\pi\sum_{k=1}^{n_l}\frac{1}{p_k}.$$

由是, 从等式

$$\gamma_m+\frac{2\pi}{p_m}=2\pi\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{p_k}+\frac{\pi}{p_m},$$

得到

$$-\frac{\pi}{p_{n_l}}<x_0+2\pi l-\gamma_{n_l}-\frac{2\pi}{p_{n_l}}<\frac{\pi}{p_{n_l}}.$$

应用引理 1, 当 $p_{n_l}\geqslant 24$ 时, 有 k_1, k_2 适合 $k_1<k_2<p_{n_l}$, 以及

$$\left|\frac{1}{p_{n_l}}\sum_{k=k_1}^{k_2}\cos[(N_{n_{l-1}}+k)x_0+k\gamma_{n_l}]\right|\geqslant\frac{1}{48}.$$

$|\cdots|$中的式子是 $S(x_0)$的一段, 由于 n_l 可以任意大, 所以 $S(x_0)$发散. 由是 $S(x)$处处发散.

同样可证 $\bar{S}(x)$是一处处发散的级数. 定理 3 证毕.

下述定理, 表示三角级数与其共轭级数之间收敛发散问题有密切联系.

定理 4 设在正测度的点集 E 上, 有概散而可以$(C, 1)$求和的三角级数, 那末它的共轭级数在 E 上几乎处处发散. 在特别的情况, 概散的富理埃级数的共轭级数是概散的.

这是克脱耐 (Kuttner) 于 1935 年在伦敦数学会期刊上发表的定理.

首先建立

引理 设 $n\mu_n=O(1)$，$\phi(x)\in C''(x\geqslant 0)$，(i)假如 $\sum u_n$ 收敛于 S，那末当 $n\to\infty$ 时，

$$t_n=\sum_{\nu=0}^{n}u_\nu\phi(\nu\mu_n)\to\phi(0)S.$$

(ii)假如 $\sum u_n=S(C,1)$，那末

$$t_n-(S_n-S)\phi(n\mu_n)\to\phi(0)S;$$

当 $n\mu_n=a$，$\phi(a)=0$ 时，$t_n\to\phi(0)S$. 这里 $S_n=u_0+\cdots+u_n$.

【证明】 我们只要证明(ii)的前段,其余的部分可以从此导出. 我们见到

$$\Delta_n(\nu)=\phi(n\mu_\nu)-\phi((n+1)\mu_\nu)=O\Big(\frac{1}{\nu}\Big),$$

$$\Delta_n^2(\nu)=\Delta_n(\nu)-\Delta_{n+1}(\nu)=O\Big(\frac{1}{\nu^2}\Big).$$

由和差交换，

$$t_n=\sum_{\nu=0}^{n-1}S_\nu\Delta_\nu(n)+S_n\phi(n\mu_n)$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n-2}(\nu+1)\sigma_\nu\Delta_\nu^2(n)+n\sigma_{n-1}\Delta_{n-1}(n)+S_n\phi(n\mu_n),$$

这里 $\sigma_n\cdot(n+1)=S_0+S_1+\cdots+S_n$. 假如 $u_0=1$，$u_1=u_2=\cdots=0$，那末从上式得到

$$\phi(0)=\sum_{\nu=0}^{n-2}(\nu+1)\Delta_\nu^2(n)+n\Delta_{n-1}(n)+\phi(n\mu_n).$$

两者相结合,就得到

$$t_n-(S_n-S)\phi(n\mu_n)-S\phi(0)=\sum_\nu\alpha_{n\nu}(\sigma_\nu-S),$$

这里

$$\alpha_{n\nu}=(\nu+1)\Delta_\nu^2(n)\quad(\nu<n-1),$$

$$\alpha_{n,n-1}=n\Delta_{n-1}(n),\quad \alpha_{n\nu}=0\quad(\nu\geqslant n).$$

由是,固定 ν，当 $n\to\infty$ 时，$\alpha_{n\nu}\to 0$，从而

$$\sum_\nu|\alpha_{n\nu}|\leqslant C\Big(\sum_{\nu<n-1}\frac{\nu+1}{m^2}+\frac{m}{m}\Big)<2C.$$

在这两个条件下,当 $\sigma_\nu\to S$ 时，$\sum\alpha_{n\nu}(\sigma_\nu-S)\to 0$. 引理证毕.

【定理 4 的证明】 保留引理中的记号,置 $\phi(t)=\sin t$. 那末,置

$$S_n(\theta)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\sin k\theta-b_k\cos k\theta)$$

时，引理中的 t_n 就是

$$\frac{1}{2}\{S_n(\theta+\mu_n)-S_n(\theta-\mu_n)\}=\sum_{1}^{n}A_\nu(\theta)\sin\nu\mu_n,$$

$B_\nu(\theta)$ 与 $A_\nu(\theta)$ 是互为共轭的．假如级数 $\sum A_n(\theta)$ 在点集 E 上，可以 $(C, 1)$ 求和于 $S(\theta)$，那末当

$$\mu_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

时，由引理，在 E 上成立着

$$\frac{1}{2}\{S_n(\theta+\mu_n)-S_n(\theta-\mu_n)\}-\{S_n(\theta)-S(\theta)\}\sin n\mu_n=o(1).$$

我们要证共轭级数 $\sum B_n$ 在 E 上概散．假如不然，设 E 含有正测度的点集 E_1，在 E_1 上共轭级数收敛，那末利用埃戈洛夫的定理，我们不妨假设 $\sum B_n(\theta)$ 在 E_1 上是匀敛的．设 $\chi(t)$ 是 E_1 的特征函数，适合

$$\frac{d}{d\theta}\int^{\theta}\chi(t)dt=\chi(\theta),\quad \theta\in E_1$$

的 θ 所成之集为 E_1^*，则 $|E_1^*|=|E_1|$．由于，当 $\theta\in E_1^*$ 时，

$$\frac{1}{m^{-1}}\int_{\theta+\frac{1}{m}}^{\theta+\frac{2}{m}}\chi(t)dt\to 2-1=1,$$

$$m\int_{\theta-\frac{2}{m}}^{\theta-\frac{1}{m}}\chi(t)dt\to 1\quad (m\to\infty).$$

所以当 m 足够大时，必有如下的 μ_m：

$$\frac{1}{m}\leqslant\mu_m\leqslant\frac{2}{m},$$

$$\theta-\mu_m\in E_1^*,\quad \theta+\mu_m\in E_1^*.$$

由于 $\sum B_n(\theta)$ 在 E_1^* 上的匀敛性，所以 $S_m(\theta+\mu_m)-S_m(\theta-\mu_m)\to 0$．从而

$$\{S_n(\theta)-S(\theta)\}\sin n\mu_n=o(1).$$

但是 $\sin n\mu_n > \sin 1$，故必 $S_n(\theta)$ 在 E_1^* 上收敛，这是有背于假设的．因此 $\sum B_n(\theta)$ 在 E 上概散．定理证毕．

系　在正测度点集 E 上收敛的三角级数，它的共轭级数在 E 上概收敛．

这是泼赖斯耐(Плеснер)的定理(1935)，也就是第三章 §3 的定理 1，参见 Marcinkiewicz-Zygmund, F. M. 26, 1936.

2．富理埃级数的无界概散和有界概散

下述结果，是柯尔莫哥洛夫首先发现的．

定理 1　存在富理埃级数，它在 $[0, 2\pi]$ 上几乎处处无界发散．

证明是利用下述引理的．

引理　对于自然数 n，可以作成正值有界变差的函数

$$\varphi(x)=\varphi_n(x),$$

点集 $E=E_n\subset[0, 2\pi]$，正整数 $q=q_n$，正数 $M=M_n$ 如下：

$$\int_0^{2\pi}\varphi(x)\,dx=2, \quad |E_n|\to 2\pi, \quad M_n\to\infty;$$

对 E 中任一点 x_0，有 $p=p_n$ 适合 $p\leqslant q$ 和

$$|S_{p,x_0}(\varphi, x_0)|\geqslant M.$$

【证明】　设

$$x_k=\frac{4k\pi}{2n+1} \quad (k=1, 2, \cdots, n);$$

取适当大的奇数 λ_k 作 $2m_k+1=\lambda_k(2n+1)$，

$$J_k=\left[x_k-\frac{1}{m_k^2}, \quad x_k+\frac{1}{m_k^2}\right],$$

$$\varphi_n(x)=\frac{m_k^2}{n} \quad (x\in J_k),$$

$$\varphi_n(x)=0 \quad (x\in[0, 2\pi],\ x\notin J_1+\cdots+J_n).$$

则

$$\varphi_n(x)\geqslant 0, \quad \int_0^{2\pi}\varphi_n(x)\,dx=2; \quad \int_0^{2\pi}|d\varphi_n(x)|<\infty.$$

区间

$$\Delta_k=\left[x_k+\frac{2}{n^2},\ x_{k+1}-\frac{1}{n^2}\right]\quad(k=1,\ \cdots,\ n-1)$$

是和 J_k $(k=1,\cdots,\ n)$ 不相交的，因此，取定了 $m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_{k-1}$ 之后，取 m_k 使当 $x\in\Delta_{k-1}$ 时，

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{J_1+\cdots+J_{k-1}}\varphi_n(t)\ \frac{\sin\left(m_k+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\sin\frac{1}{2}(t-x)}\,dx\right|\leqslant 1.$$

由是 $m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_n$ 可以全部决定.

设 $x\in\Delta_{k-1}$，$i\geqslant k$，在 J_i 上，我们见到

$$\frac{1}{\pi}\varphi_n(t)\frac{\sin\frac{2m_k+1}{2}(t-x)}{2\sin\frac{1}{2}(t-x)}$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{m_i^2}{n}\frac{\sin\frac{2m_k+1}{2}(x_i-x)}{2\sin\frac{1}{2}(x_i-x)}$$

$$+\frac{1}{\pi}\frac{m_i^2}{n}\left[\frac{\sin\frac{2m_k+1}{2}(t-x)}{2\sin\frac{1}{2}(t-x)}-\frac{\sin\frac{2m_k+1}{2}(x_i-x)}{2\sin\frac{1}{2}(x_i-x)}\right].$$

左端在 J_i 上的积分的绝对值不小于

$$\frac{1}{\pi n}\frac{\left|\sin\frac{2m_k+1}{2}(x_i-x)\right|}{2\sin\frac{1}{2}(x_i-x)}-\frac{1}{\pi}\int_{J_i}\frac{m_i^2}{n}m_k^2\frac{1}{m_i^2}dt$$

$$\geqslant\frac{1}{\pi^3}\frac{\left|\sin\left(m_k+\frac{1}{2}\right)x\right|}{i-k+1}-\frac{1}{n}.$$

从而，当 $x\in\Delta_{k-1}$，$2\leqslant k\leqslant n-\sqrt{n}$ 时，

$$|S_{m_k}(\varphi_n, x)| = \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi} \varphi_n(t) \frac{\sin\left(m_k+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\sin\frac{1}{2}(t-x)} dt\right|$$

$$= \left|\frac{1}{\pi}\int_{\sum\limits_1^n \Delta_i} + \frac{1}{\pi}\int_{J_1+\cdots+J_n}\right|$$

$$\geqslant \frac{1}{\pi^2}\left|\sin\left(m_k+\frac{1}{2}\right)x\right| \sum_{i=k}^n \frac{1}{i-k+1} - \frac{1}{n}n - 1$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi^2}\left|\sin\left(m_k+\frac{1}{2}\right)x\right| \log n - 2.$$

记点集

$$\left(x\in \Delta_{k-1},\ \frac{1}{2\pi^2}\left|\sin\left(m_k+\frac{1}{2}\right)x\right| \geqslant \frac{1}{\sqrt{\log n}}\right)$$

为 $\mathscr{E}_{k-1}$，则当 $x\in\mathscr{E}_{k-1}$ 时，

$$|S_{m_k}(\varphi_n, x)| \geqslant \sqrt{\log n} - 2 \quad (k\leqslant n-\sqrt{n}).$$

取
$$q_n = m_n, \quad M_n = \sqrt{\log n} - 2,$$

$$E_n = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + \cdots + \mathscr{E}_l \quad (l = n - [\sqrt{n}]),$$

我们只要证明 $|E_n| \to 2\pi$. 首先估计适合于

$$\frac{1}{2\pi}\left|\sin\left(m_k+\frac{1}{2}\right)x\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\log n}}, \quad x\in \Delta_{k-1}$$

的 x 所成之点集 Δ'_{k-1} 的测度. Δ'_{k-1} 是由若干个区间组成，每个区间含有函数

$$y = \sin\left(m_k+\frac{1}{2}\right)x = \sin \lambda_k(2n+1)\frac{x}{2}$$

的一个零点，每个区间的长度是

$$\gamma = 2\frac{\sin^{-1} 2\pi(\log n)^{-\frac{1}{2}}}{\lambda_k\left(n+\frac{1}{2}\right)} = O\left(\frac{1}{\lambda_k n\sqrt{\log n}}\right).$$

这个函数 y 在 $[0, 2\pi]$ 中的零点个数是 $\lambda_k(2n+1)+1$，相邻两个零点的距离等于 $\frac{2\pi}{\lambda_k(2n+1)}$. 由于 $\lambda_k > n$, $k>1$, $|\Delta_{k-1}| = \frac{4\pi}{2n+1} - \frac{1}{n^2}$，所以 y 在 Δ_{k-1} 中的零点个数是 $O(\lambda_k)$. 由是可知

$$|\Delta_{k-1}|=\gamma O(\lambda_k)=O\left(\frac{1}{n\sqrt{\log n}}\right).$$

因此 $|E_n|=|\mathscr{E}_1+\cdots+\mathscr{E}_l|$ 等于

$$\sum_{i=1}^{l}\left\{\frac{4\pi}{2n+1}-\frac{4}{n^2}-O\left(\frac{1}{n\sqrt{\log n}}\right)\right\}$$

$$=l\left\{\frac{4\pi}{2n+1}-\frac{4}{n^2}-O\left(\frac{1}{n\sqrt{\log n}}\right)\right\}$$

$$=2\pi+O\left(\frac{1}{\log n}\right).$$

从而 $|E_n|\to 2\pi$. 引理证毕.

【定理1的证明】 当 $n_1, n_2, \cdots, n_{k-1}$ 既定之后, 取 n_k 适合于

$$\max(q_{n_1}, q_{n_2}, \cdots, q_{n_{k-1}})\leqslant\frac{1}{2^k}\sqrt{M_{n_k}},$$

$$\sum_{i=1}^{k-1}\max_{\nu,x}|S_\nu(\varphi_{n_i}, x)|\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{M_{n_k}}.$$

由于 $\varphi_n(x)\geqslant 0$,

$$\int_0^{2\pi}\varphi_n(x)\,dx=2,$$

所以

$$\Phi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}}\varphi_{n_k}(x)$$

的积分等于

$$\sum\frac{1}{\sqrt{M_k}}<\sum 2^{-k}<\infty.$$

上记的级数概敛于 $\Phi(x)$, 这是应用富弼尼(Fubini)的定理得出的.

设 $E=\overline{\lim}E_{n_k}$, 则 $|E|=2\pi$. 当 $x_0\in E$ 时, x_0 属于无数个 E_{n_j}, 利用引理中的 p_{n_j}, 将 $\Phi(x_0)$ 的部分和写成 $S_{p_{n_j}, x_0}(\Phi, x_0)$, 它等于

$$\frac{1}{\sqrt{M_{n_j}}}S_{p_{n_j}, x_0}(\varphi_{n_j}, x_0)+\left(\sum_{k=1}^{j-1}+\sum_{k=j+1}^{\infty}\right)\frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}}S_{p_{n_j}, x_0}(\varphi_{n_k}, x_0),$$

由于 $S_k(f, x)$ 的绝对值不大于

$$k\int_0^{2\pi}|f(t)|\,dt\quad(k>0),$$

所以应用引理和 n_k 的意义, 我们见到

$$
\begin{aligned}
&|S_{p_{n_j}, x_0}(\Phi, x_0)| \\
&\geqslant \sqrt{M_{n_j}}-\frac{1}{2}\sqrt{M_{n_j}}-\sum_{k=j+1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}}q_{n_j}\int_0^{2\pi}\varphi_{n_k}(t)\,dt \\
&\geqslant \frac{1}{2}\sqrt{M_{n_j}}-2\sum_{k=j+1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}}\frac{\sqrt{M_k}}{2^k}=\frac{1}{2}\sqrt{M_{n_j}}-\frac{2}{2^j}.
\end{aligned}
$$

这样的 j 有无数个，从而在 E 上，

$$
\overline{\lim_{n\to\infty}}|S_n(\Phi, x_0)|=\infty.
$$

定理证毕.

上面的 $\Phi(x)$ 是不取负值的，我们称 $\Phi(x)$ 为柯尔莫哥洛夫的函数.

定理 2 柯尔莫哥洛夫函数的共轭函数不属于 $L(0, 2\pi)$. 当 $p>1$ 时，柯尔莫哥洛夫函数不属于 $L^p(0, 2\pi)$.

【证明】 首先建立黎斯 (M. Riesz) 的定理：假如 f 和 $\bar{f}$ 都属于 $L(0, 2\pi)$，那末当 $f(x)\geqslant 0$ 时，

$$
f(x)\log^+ f(x)\in L(0, 2\pi),
$$

这里 $\log^+X=\max(0, \log X)$. 不妨假设 $f(x)\geqslant 1$. 设 f, $\bar{f}$ 的普阿松积分为 $u(z)$, $v(z)$; $F(z)=u(z)+iv(z)$, $z=re^{i\varphi}(0<r<1)$. 由柯西定理，

$$
\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}F(z)\log F(z)\frac{dz}{z}=\lim_{z\to 0}F(z)\log F(z).
$$

取两边的实部，得到

$$
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{u\log\sqrt{u^2+v^2}-v\arg\frac{v}{u}\right\}d\varphi=u(0)\log u(0).
$$

由于 $0\leqslant v\arg\dfrac{v}{u}\leqslant\dfrac{\pi}{2}|v|$，所以

$$
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u\log u\,d\varphi\leqslant\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}|v|\,d\varphi+u(0)\log u(0).
$$

又因 $\bar{f}$ 是可积的，所以上式左端当 $r\to 1$ 时，是有限的. 这是所要证的结果.

因此，假使 $\Phi(x)$ 的共轭函数 $\bar{\Phi}(x)$ 属于 $L(0, 2\pi)$，那末

$$\Phi(x)\log^+\Phi(x)\in L(0,\ 2\pi).$$

我们要证这是不合理的. 事实上, 从上式得到

$$\int_0^{2\pi}\Phi(x)\log^+\Phi(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}}\int_0^{2\pi}\varphi_{n_k}(x)\log^+\Phi(x)dx,$$

这里

$$M_n=\sqrt{\log n}-2<\sqrt{\log n}.$$

简写 $K=n_k$, 右边第 k 项中的积分大于

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}\varphi_K(x)\log^+\frac{\varphi_K(x)}{\sqrt{M_K}}dx\\&=\sum_{\nu=1}^{K}\frac{m_\nu^2}{K}\log^+\frac{m_\nu^2}{K\sqrt{M_K}}>\sum_{\nu=1}^{K}\frac{1}{K}\log\frac{K}{\sqrt{M_K}}\\&\geqslant\log\frac{K}{\sqrt{M_K}}\geqslant\log\frac{K}{(\log K)^{\frac{1}{4}}}\geqslant\frac{1}{2}\log K,\end{aligned}$$

从而达到如下的矛盾:

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}\Phi(x)\log^+\Phi(x)dx\\&\geqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}}\log n_k\geqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\log n_k}{(\log n_k)^{\frac{1}{4}}}=\infty.\end{aligned}$$

由是可知 $\Phi(x)\overline{\in}L^p(0,\ 2\pi)$, $p>1$. 证明完毕.

我们还应该注意, 在任何区间 $[\alpha,\ \beta]$ 上, $\overline{\Phi}(x)\overline{\in}L(\alpha,\ \beta)$, 从上面关于

$$\int_0^{2\pi}\Phi(x)\log^+\Phi(x)dx=\infty$$

的证明, 我们见到, 在任一区间 $(\delta,\ \gamma)$ 上,

$$\int_\delta^\gamma\Phi(x)\log^+\Phi(x)dx=\infty.$$

假如 $\Phi(x)\in L(\alpha,\ \beta)$, 那末我们可以作成如下的正值可积函数 $\Phi_1(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$: 在 $[\delta,\ \gamma]\subset(\alpha,\ \beta)$ 上, $\Phi_1(x)=\Phi(x)$, $\Phi_1(x)\in L(0,\ 2\pi)$. 由黎斯的定理,

$$\Phi_1(x)\log^+\Phi_1(x)\in L(0,\ 2\pi).$$

从而达到矛盾

$$\Phi(x)\log^+\Phi(x)=\Phi_1(x)\log^+\Phi_1(x)\in L(\delta,\ \gamma).$$

柯尔莫哥洛夫于 1926 年的(巴黎)科学院公报 (C. R.) 上还指出到处无限发散的富理埃级数的存在.

定理 3 存在如下的 $f(x)\in L(0,\ 2\pi)$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}S_n(f,\ x)=\infty$ 处处成立, 这里 $S_n(f,\ x)$ 表示 $\mathfrak{S}[f]$的部分和.

【证明】 前节定理 2 的证明中的例子,就能满足这里的要求.

马辛基维斯 (J. Marcinkiewicz, F. M. 27, 1936) 指出富理埃级数的概散不一定是无界概散,下面是他的结果.

定理 4 存在有界概散的富理埃级数. 详细地说, 有勒贝格富理埃级数 $\mathfrak{S}[f]$ 几乎处处适合于

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|S_n(f,\ x)|<\infty,\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}S_n(f,\ x)<\overline{\lim_{n\to\infty}}S_n(f,\ x).$$

【证明】 这里仍然利用作成 $\Phi(x)$时的 $\varphi_n(x)$, $\varphi_n(x)$是正值函数, 在$(0,\ 2\pi)$上的积分等于 2. $f_n(x)=\varphi_n(x)/\log n$ 的话,

$$\int_0^{2\pi}f_n(x)dx=\frac{2}{\log n},$$

$$|(f_n(x)>0)|=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{(m_k^{(n)})^2}\to 0\quad(n\to\infty).$$

置

$$E_n^{(\delta)}=\Big(\max_{m_1^{(n)}<j<m_n^{(n)}}|S_j(f_n,\ x)|>\delta\Big).$$

我们证明: 对于正数 η, 必有 $\delta=\delta(\eta)$, $N=N(\eta)$, 使当 $n\geqslant N$ 时,

$$|E_n^{(\delta)}|>2\pi-\eta;$$

就是说, $|(\max\limits_{m_1<j<m_n}|S(\varphi_n,\ x)|>\delta\log n)|>2\pi-\eta$. 事实上, 在点集

$$\tau_{k-1}=\left(\frac{1}{2\pi^2}\left|\sin\left(m_k+\frac{1}{2}\right)x\right|\geqslant\alpha,\ x\in\Delta_{k-1}\right)$$

上,

$$|S_{n_k}(\varphi_n,\ x)|\geqslant\alpha\log n-2\quad(k=2,\ 3,\ \cdots,\ n-\sqrt{n}).$$

又因

$$|\tau_{k-1}|=\frac{4\pi}{2n+1}-\frac{4}{n^2}+O\left(\frac{\alpha}{n}\right),$$

所以 $|\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_{n-[\sqrt{n}]-1}|=2\pi+O(\alpha)+O\left(\frac{1}{n}\right)$. 由是可知存在着如下的正数 α 和 β:

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left|\left(\max_{m_1<j<m_n}|S_j(\varphi_n, x)|\geqslant\alpha\log n\right)\right|\geqslant\beta,$$

这里 α 可以很近于 0, 而 β 可以很近于 2π. 从而对于 η, 有 δ 和 N 如上述.

置

$$d_k=\left[x_k+\frac{1}{n\log n},\ x_{k+1}-\frac{1}{n\log n}\right],$$

$$x_k=\frac{4k\pi}{2n+1},\quad D_n=d_1+\cdots+d_{n-1}.$$

在 D_n 上, 我们证明 $S_i(f_n, x)$ 的绝对值小于一个常数 M. 事实上,我们只要证明

$$\int_0^{2\pi}f_n(t)\frac{dt}{|x-t|}\leqslant C\quad(C\text{ 常数}).$$

设 $1\leqslant k<n$, $x_0\in d_k$, 则当 $n>3$ 时, 上式左端 $(x=x_0)$ 与 $\log n$ 的乘积等于

$$\int_0^{x_0}+\int_{x_0}^{2\pi}\frac{\varphi_n(t)}{|x_0-t|}dt$$

$$=\sum_{s=1}^{k-1}\int_{J_s}\frac{\varphi_n(t)}{x_0-t}dt+\int_{J_k}\frac{\varphi_n(t)}{x_0-t}dt+\int_{J_{k+1}}\frac{\varphi_n(t)}{t-x_0}dt+\sum_{s=k+2}^{n}\int_{J_s}\frac{\varphi_n(t)}{t-x_0}dt$$

$$\leqslant\sum_{s=1}^{k-1}\frac{m_s^2}{n}\frac{2n+1}{4\pi(k-s)}\frac{2}{m_s^2}+\frac{m_k^2}{n}\frac{1}{\frac{1}{n\log n}-\frac{1}{m_k^2}}\frac{2}{m_k^2}$$

$$+\frac{m_{k+1}^2}{n}\frac{1}{\frac{1}{n\log n}-\frac{1}{m_{k+1}^2}}\frac{2}{m_{k+1}^2}$$

$$+\sum_{s=k+2}^{n}\frac{m_s^2}{n}\frac{2n+1}{4\pi(s-k-1)}\frac{2}{m_s^2}$$

$$\leqslant\sum_{s=1}^{k-1}\frac{1}{k-s}+\frac{4\log n}{1-\frac{\log n}{n}}+\sum_{s=k+2}^{n}\frac{1}{s-k-1}\leqslant C\log n.$$

两边除以 $\log n$, 就知道所论的积分 $\leqslant C$. 因此,

$$|S_i(f_n, x)|<M \quad (x\in D_n);$$

这里 $|D_n|=(n-1)\left(\frac{4\pi}{2n+1}-\frac{2}{n\log n}\right)\to 2\pi$.

取适宜的 $\{n_i\}$，函数 $f(x)=\sum f_{n_k}(x)$ 就能满足所要的条件．在选取正数 $n_i(i\leqslant k)$ 和 $q_j(j<k)$ 满足

$$4\leqslant n_1<n_2<\cdots<n_k,\quad 2\leqslant q_1<q_2<\cdots<q_{k-1}$$

之后，我们决定 n_{k+1} 和 q_k 如下．置 $\Phi_k(x)=f_{n_1}(x)+\cdots+f_{n_k}(x)$．当 $p\geqslant q$ 时，适合 $|S_p(\Phi_k(x), x)-\Phi_k(x)|<\frac{1}{k}$ 的一切 x 所成之点集，记它做 $E_{k,q}$．当 q 甚大时，$|E_{k,q}|$ 甚近于 2π．我们可设

$$|[0, 2\pi]-E_{k,q}|<\frac{1}{2^k}$$

当 $q\geqslant q(k)$ 时成立．又设 $q(k)$ 和 $m_{n_k}^{(n_k)}$ 中之大者为 q_k，则可选定 n_{k+1} 如下：

$$\int_0^{2\pi} f_{n_k}(t)\,dt>q_k\int_0^{2\pi} f_{n_{k+1}}(t)\,dt,$$

$$|(\max_i|S_i(f_{n_{k+1}}, x)|>M)|<\frac{1}{2^k},$$

$$n_{k+1}>n_k,\quad m_1^{(n_{k+1})}>q_k.$$

事实上，由于

$$\int_0^{2k} f_{n_{k+1}}(t)\,dt=\frac{1}{\log n_{k+1}},$$

$$|(\max_i|S_i(f_n, x)|\leqslant M)|\to 2\pi,$$

所以上述的 n_{k+1} 是存在的．这样，通过数学归纳法，$\{n_k\}$ 和 $\{q_k\}$ 可以完全决定．由于 $q_k\geqslant 2$，所以

$$\int_0^{2\pi} f_{n_{k+1}}(t)\,dt<\frac{1}{q_k}\cdot\frac{1}{q_{k-1}}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{q_1}\int_0^{2\pi} f_{n_1}(t)\,dt,$$

从而函数 $f(x)=\sum f_{n_k}(x)$ 属于 $L(0, 2\pi)$．

对于 i，有 k 适合于 $q_k\leqslant i<q_{k+1}$．置 $\psi_k(x)=f(x)-\Phi_k(x)$，则

$$S_i(f, x)=S_i(\Phi_k, x)+S_i(f_{n_{k+1}}, x)+S_i(\psi_{k+1}, x).$$

由于

八甲

$$|S_i(\psi_{k+1}, x)|\leqslant 4i\int_0^{2\pi}\sum_{s=k+2}^{\infty} f_{n_s}(t)dt\leqslant 8i\int_0^{2\pi} f_{n_{k+2}}(t)dt$$

$$\leqslant\frac{8i}{q_{k+1}}\int_0^{2\pi} f_{n_{k+1}}(t)dt\leqslant 8\int_0^{2\pi} f_{n_{k+1}}(t)dt=o(1),$$

所以当 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 时，$\lim\limits_{i\to\infty}|S_i(\psi_{k+1})|=0$. 从而

$$\lim_{i\to\infty} S_i(\Phi_k, x)\doteq f(x),$$

这里 $q_k\leqslant i<q_{k+1}$, 故 $i\to\infty$ 含有 $k\to\infty$. 由于上述 $S_i(f, x)$的三项表达式的 $S_i(f_{n_{k+1}}, x)$的绝对值几乎到处小于 M, 所以

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}|S_i(f, x)|<\infty.$$

在$[0, 2\pi]$中几乎到处成立.

我们还要证明 $\mathfrak{S}[f]$几乎处处发散. 我们已经证明$[0, 2\pi]$含有测度为 2π 的点集 A, 在 A 上, 成立着

$$\lim_{i\to\infty} S_i(\Phi_k, x)=f(x).$$

置
$$E=\overline{\lim_{k\to\infty}}\{A\cdot E_{n_k}^{(\delta)}\}.$$

对于 $\varepsilon>0$, 有 δ 和 N, 当 $n\geqslant N$ 时, $|E_n^{(\delta)}|>2\pi-\varepsilon$, 从而$|E|>2\pi-\varepsilon$. 当 $x_0\in E$ 时, $x_0\in A$ 并且 $x_0\in E_{n_{k_j}}^{(\delta)}(j=1, 2, \cdots)$. 设

$$q_{k_j-1}\leqslant i<q_{k_j},$$

则 $S_i(f, x_0)=S_i(\Phi_{k_j-1}, x_0)+S_i(f_{n_{k_j}}, x_0)+S_i(\psi_{k_j}, x_0)$. 当 $i\to\infty$ 时, 末项是 $o(1)$, 第一项是 $f(x_0)+o(1)$. 由于 $x_0\in E_{n_{k_j}}^{(\delta)}$, 所以对于 $m_1^{(n_{k_j})}\leqslant i\leqslant m_{n_{k_j}}^{(n_{k_j})}$ 的 i,

$$\max_i|S_i(f_{n_{k_j}}, x_0)|>\delta\quad(n_{k_j}>N).$$

上记的整数 i 都在 q_{k_j-1} 和 q_{k_j} 之间,因此存在如下的 $i_0=i_0(x_0, j)$:

$$q_{k_j-1}\leqslant i_0<q_{k_j},\quad |S_{i_0}(f_{n_{k_j}}, x_0)|>\delta>0.$$

总结起来,有无数个 i_0 适合于$|S_{i_0}(f, x_0)-f(x_0)|>\delta$. 由是可知 $\mathfrak{S}[f]$ 在 E 上发散. 证明完毕.

我们当然要问: 存在概散的 $\mathfrak{S}[f]$处处满足 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|S_n(f, x)|<\infty$的

吗？这是富理埃级数论中的一个严重问题．假如这个问题具有肯定的回答，那末必有有界函数 f，它的 $\mathfrak{S}[f]$ 在一个正测度的点集上发散．换句话说，是否存在这样的有界函数是一个大问题．现在把这些问题间的联系，更明显地写在下面：

定理 5 假如有概散的 $\mathfrak{S}[f]$，它的部分和处处有界，那末必有有界函数 f，$\mathfrak{S}[f]$ 在正测度的点集上发散．

【证明】 记 $E_{n,m}=(|S_n(F,\ x)|\leqslant m)$，$E_m=\prod_{n=1}^{\infty}E_{n,m}$，$E_m$ 是一个闭集．由假设，$E_1+E_2+\cdots=[0,\ 2\pi]$．因此，总有一个点集 E_k 在 $[0,\ 2\pi]$ 的某一子区间 $J=[a,\ b]$ 是稠密的．由于 E_k 是闭的，所以 $J\subset E_k$；从而

$$|S_n(F,\ x)|\leqslant k\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots;\ x\in J).$$

在 J 上，$\mathfrak{S}[F]$ 的费耶平均 $\sigma_n(F,\ x)$ 的绝对值也不大于 k，从而

$$|F(x)|\leqslant k\quad(x\in J).$$

假如 $\varphi(x)$ 在 $[0,\ 2\pi]$ 是有界，$\varphi(x)=F(x)\ (x\in J)$，那末 $\mathfrak{S}[\varphi]$ 在 J 上几乎处处发散．定理证毕．

3．函数的平均连续性与级数的概散

设 $0<\omega(t)\downarrow 0\ (t\to+0)$．当 $L(0,\ 2\pi)$ 中的 $f(x)$ 几乎处处满足条件

$$\Phi_x(t)=\frac{1}{t}\int_0^t|f(x+u)-f(x)|du=O(\omega(t))$$

时，我们称 $f(x)$ 具有马辛基维斯的 $\omega(t)$ 平均连续性．

定理 1 设 $f(x)\in L(0,2\pi)$，在 $[0,2\pi]$ 上 $f(x)$ 几乎处处具有 $\omega(t)$ 平均连续性，那末当 $\lim\limits_{t\to 0}\omega(t)\log\dfrac{1}{t}=\infty$ 时，$\mathfrak{S}[f]$ 可能几乎处处发散 (Marcinkiewicz, F. M. 27, 1936)．

【证明】 置 $\varphi(t)=\omega(t)\log\dfrac{1}{t}$，则当 $t\to+0$ 时，$\varphi(t)\to\infty$．我们不妨假设 $\varphi(t)$ 是偶函数，当 $0\leqslant t\leqslant\dfrac{1}{3}$ 时，由上记的等式定义着，在 $[0,\ \pi]$ 上 $\varphi(t)$ 具有连续性．我们要证：存在具有 $\omega(t)$ 平均连续的可积函数 $f(x)$，$\mathfrak{S}[f]$ 概散，

由于在区间 $0<t\leqslant\frac{1}{3}$ 上，$\varphi(t)$ 和 $\dfrac{1}{t\log\frac{1}{t}}$ 都是单调减少的，所以两者的乘积 $\dfrac{\omega(t)}{t}$ 也是如此. 设 $0<\alpha\leqslant 1$，则

$$\alpha\omega(t)=\alpha t\,\frac{\omega(t)}{t}<\alpha t\,\frac{\omega(\alpha t)}{\alpha t}=\omega(\alpha t).$$

所以不等式 $\alpha\omega(t)<\omega(\alpha t)$ 当 $0<\alpha<1$，$0<t<\frac{1}{3}$ 时成立.

由于 $\omega\left(\frac{1}{n}\right)\log n\to\infty$，所以存在如下的 ε_n：

$$\frac{1}{n}\leqslant\varepsilon_n\leqslant 1,\quad \varepsilon_n=o(1),\quad \varepsilon_n^3\omega\left(\frac{1}{n}\right)\log n\to\infty.$$

利用前述柯尔莫哥洛夫的函数 $\varphi_n(x)$，作出

$$f_n(x)=\varepsilon_n^2\omega\left(\frac{1}{n}\right)\varphi_n(x),$$

这里 $n>3$. 因此 $f_n(x)\geqslant 0$ 并且

$$\int_0^{2\pi}f_n(x)\,dx=2\varepsilon_n^2\omega\left(\frac{1}{n}\right)=o(1);$$

除开测度为 $O(\varepsilon_n)$ 的一个点集，

$$\max_{m_1^{(n)}<p<m_2^{(n)}}|S_p(f_n,x)|\geqslant\varepsilon_n^3\omega\left(\frac{1}{n}\right)\log n-2=M_n.$$

从而
$$\left|\left(\max_{m_1^{(n)}<p<m_2^{(n)}}|S_p(f_n,x)|\geqslant M_n\right)\right|=2\pi+o(1).$$

设 $x_k=\dfrac{4k\pi}{2n+1}$，则点集 $D_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left[x_k-\dfrac{\sqrt{\varepsilon_n}}{n},\ x_{k+1}-\dfrac{\sqrt{\varepsilon_n}}{n}\right]$ 的 $|D_n|\to 2\pi$. 由于 $\varepsilon_n\leqslant 1$ 以及 $\varphi_n(x)$ 的阶梯性，所以当 $0<|u|<\dfrac{\sqrt{\varepsilon_n}}{2n}$ 时，

$$\frac{1}{u}\int_0^u|f_n(x_0+t)-f_n(x_0)|\,dt=0\quad(x_0\in D_n).$$

假如 $x_0\in D_n$，$\dfrac{\sqrt{\varepsilon_n}}{2n}\leqslant|u|\leqslant\dfrac{1}{n}$，那末 $f_n(x_0)=0$，

$$\left|\frac{1}{u}\int_0^u|f_n(x_0+t)-f_n(x_0)|\,dt\right|=\left|\frac{1}{u}\int_0^u f_n(x_0+t)\,dt\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{|u|}\,\frac{2}{n}\,\varepsilon_n^2\omega\left(\frac{1}{n}\right)\leqslant 4\varepsilon_n^{\frac{3}{2}}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\leqslant 8\varepsilon_n\omega\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{2n}\right)\leqslant 8\varepsilon_n\omega(u).$$

同样，当 $\frac{k}{n}\leqslant|u|\leqslant\frac{k+1}{n}$ $(k=1, 2, \cdots, n)$时，上式左端不大于

$$\frac{1}{|u|}\frac{2k+2}{n}\varepsilon_n^2\omega\left(\frac{1}{n}\right)\leqslant\frac{2k+2}{k}\varepsilon_n^2\omega\left(\frac{1}{n}\right)\leqslant 4\varepsilon_n\omega(u).$$

总结起来，当 $|u|\leqslant\frac{1}{3}$ 时，对于 D_n 中一切 x 成立着

$$\frac{1}{u}\int_0^u|f(x+t)-f_n(x)|dt\leqslant 8\varepsilon_n\omega(u).$$

我们证明：取适当的 $\{n_k\}$，函数 $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_{n_k}(x)$ 适合我们的要求．假如 $4<n_1<n_2<\cdots<n_k$ 已经决定，那末取 n_{k+1} 使它适合下列几个条件：

$$n_k<n_{k+1},\quad \varepsilon_{n_{k+1}}<2^{-1-k},\quad m_1^{(n_{k+1})}>n_k^{(n_k)},\quad |D_{n_{k+1}}|>2\pi-2^{-1-k},$$

$$\int_0^{2\pi}f_{n_{k+1}}(x)dx\leqslant 2^{-k}m_{n_k}^{-(n_k)},$$

$$\max_{1\leqslant i\leqslant k}\max_{0\leqslant x\leqslant 2\pi}\max_{0<p<\infty}|S_p(f_{n_i}, x)|\leqslant\frac{1}{2k}M_{n_{k+1}}.$$

由是可知 $f(x)\in L(0, 2\pi)$.

现在证明 $\mathfrak{S}[f]$ 是概散的．设

$$E_n=\left\{\max_{m_1^{(n)}\leqslant p\leqslant m_n^{(n)}}|S_p(f_n, x)|\geqslant M_n\right\},\quad \overline{\lim_{k\to\infty}}E_{n_k}=E,$$

则 $|E|=2\pi$．点集 E 中任一点 x_0 属于无数个 $E_{n_{k_j}}$．设

$$m_{n_{k_j}-1}^{(n_{k_j}-1)}<i\leqslant m_{n_{k_j}}^{(n_{k_j})},$$

写着

$$S_i(f, x_0)=\sum_{p=1}^{k_j-1}S_i(f_{n_p}, x_0)+S_i(f_{n_{k_j}}, x_0)+\sum_{p=k_j+1}^{\infty}S_i(f_{n_p}, x_0),$$

由于 $|S_p(f_{n_i}, x)|\leqslant\frac{1}{2k}M_{n_{k+1}}(i\leqslant k)$，所以上式右端第一项小于 $\frac{1}{2}M_{n_{k_j}}$．又因 $x_0\in E_{n_{k_j}}$，所以存在 i_{k_j}，适合于

$$|S_{i_{k_j}}(f_{n_{k_j}}, x_0)|\geqslant M_{n_{k_j}},\quad m_1^{(n_{k_j})}\leqslant i_{k_j}\leqslant m_{n_{k_j}}^{(n_{k_j})}.$$

利用 $|S_p(\psi, x)|\leqslant 4p\int_0^{2\pi}|\psi(x)|dx$，我们见到

$$\left|\sum_{p=k_j+1}^{\infty} S_{i_{k_j}}(f_{n_p},\ x)\right| \leqslant 4i_{k_j}\sum_{p=k_j+1}^{\infty}\frac{1}{2^{p-1}m_{n_{p-1}}^{(n_{p-1})}}$$

$$\leqslant 4\sum_{p=k_j+1}^{\infty}\frac{1}{2^{p-1}}\frac{m_{n_{k_j}}^{(n_{k_j})}}{m_{n_{p-1}}^{(n_{p-1})}}\leqslant 4.$$

从而得到 $$|S_{i_{k_j}}(f,\ x_0)| \geqslant \frac{1}{2}M_{n_{k_j}}-4.$$

由是在 E 上，$\overline{\lim}|S_i(f,\ x)|=\infty$. 所以 $\mathfrak{S}[f]$是概散的.

最后证明 $f(x)$具有 $\omega(t)$ 平均连续性. 设 $\varepsilon>0$, $2^{-p}<\varepsilon$, 则通集

$$D_\varepsilon=\prod_{k=p+1}^{\infty}D_{n_k}$$

的测度

$$|D_\varepsilon|\geqslant 2\pi-2^{-p}>2\pi-\varepsilon$$

(见 n_{k+1} 的决定). 函数 $f_{n_1}(x)$, $\cdots$, $f_{n_k}(x)$在闭区间 $[0,\ 2\pi]$ 上只有有限个不连续点，今以全长为 ε 的有限个闭区间掩盖这几个不连续点，余下的开集 B_ε 是由有限个区间组成, 在每一区间上, $f_{n_1}(x)$, $\cdots$, $f_{n_k}(x)$都是常数. 置

$$A_\varepsilon=D_\varepsilon\cdot B_\varepsilon,$$

则 $|A_\varepsilon|>2\pi-2\varepsilon$. 现在证明 $f(x)$在 A_ε 的任一点 x_0 是 $\omega(t)$平均连续的. 事实上, 函数 $F(x)=\sum_{k=p+1}^{\infty}f_{n_k}(x)$适合

$$\frac{1}{u}\int_0^u|F(x_0+t)-F(x_0)|\,dt$$

$$\leqslant\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{1}{u}\int_0^u|f_{n_k}(x_0+t)-f_{n_k}(x_0)|\,dt$$

$$\leqslant\sum_{k=p+1}^{\infty}8\varepsilon_{n_k}\omega(u)\leqslant 4\omega(u).$$

另一方面, 由于 $x_0\in B_\varepsilon$, 故当 $0<|u|<\delta$ 时, 函数 $f(x)-F(x)$适合

$$\frac{1}{u}\int_0^u|(f(x_0+t)-F(x_0+t))-(f(x_0)-F(x_0))|\,dt$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{u}\int_0^u|f_{n_k}(x_0+t)-f_{n_k}(x_0)|\,dt=0.$$

结合起来, 得到

$$\frac{1}{u}\int_0^u |f(x_0+t)-f(x_0)|dt \leqslant 4\omega(u) \quad (|u|<\delta,\ x_0\in A_s).$$

定理证明完毕.

我们于第三章第三节引入了沙勒姆(R. Salem)的概收敛定理:

$$\frac{1}{u}\int_0^u \{f(\theta+t)-f(\theta-t)\}dt = O\left(\frac{1}{\log\frac{1}{|u|}}\right) \quad (u\to 0)$$

的话, $\mathfrak{S}[f]$概收敛, 并且指出此时$\mathfrak{S}[f,\ \theta]$收敛的充要条件是

$$\frac{1}{h}\int_0^h \{f(\theta_0+t)-f(\theta_0)\}dt = o(1) \quad (h\to 0),$$

下面是马辛基维斯的概敛定理, 在第三章§5中已经证明过(定理2). 这个定理也说明定理1的正确性.

定理 2 设 $f(x)\in L(0,\ 2\pi)$, 在 $E\subset[0,\ 2\pi]$ 上 $f(x)$ 几乎处处具有

$$\omega(t) = \left[\log\frac{1}{t}\right]^{-1}$$

平均连续性, 那末当 $|E|>0$ 时, $\mathfrak{S}[f]$ 在 E 上概收敛.

4. 相互共轭的两个三角级数可能都成概散的富理埃级数

下述引理, 见之于哈戴(Hardy)-洛各净斯基(Rokosinski)的《富理埃级数》:

引理 对于大于1的自然数 n, 存在正值三角多项式 $T_n(x)$, $[0,\ 2\pi]$中的点集 E_n, 正数 M_n; 当 $x_0\in E_n$ 时, 还存在 p_{n,x_0} 如下:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T_n(x)dx = 1,$$

$$|E_n|\to 2\pi, \quad M_n\to\infty, \quad |S_{p_n,x_0}(T_n,\ x_0)|\geqslant M_n.$$

【证明】 我们利用费耶(Fejér)的核来作成

$$T_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} K_{m_i}(x-x_i),$$

$$K_i(t)=\frac{1}{2(i+1)}\left[\frac{\sin(i+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{1}{2}t}\right]^2.$$

这里 $n_0\geqslant n^4$, $m_{k+1}>2m_k$, $2m_k+1=\lambda_k(2n+1)$ (λ_k: 奇数), $x_i=\dfrac{4i\pi}{2n+1}$.
当 m_k 是 $m_0, \cdots, m_n$ 中的一个数时, 我们见到, $(n+1)S_{m_k}(T_n, x)$ 等于

$$\sum_{i=0}^{k}K_{m_i}(x-x_i)+\sum_{i=k+1}^{n}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{j=1}^{m_k}\frac{m_i+1-j}{m_i+1}\cos j(x-x_i)\right\}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}K_{m_i}(x-x_i)$$

$$+\sum_{i=k+1}^{n}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{j=1}^{m_k}\frac{(m_k+1-j)+m_i-m_k}{m_i+1}\cos j(x-x_i)\right\}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}K_{m_i}(x-x_i)$$

$$+\sum_{i=k+1}^{n}\left\{\frac{1}{2}+\frac{m_k+1}{m_i+1}\left[K_{m_k}(x-x_i)-\frac{1}{2}\right]\right\}$$

$$+\sum_{i=k+1}^{n}\frac{m_i-m_k}{m_i+1}\left[D_{m_k}(x-x_i)-\frac{1}{2}\right].$$

从而 $S_{m_k}(T_n, x)=\sum_{k,1}+\sum_{k,2}+\sum_{k,3}$, 这里

$$\textstyle\sum_{k,1}=\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{i=0}^{k}K_{m_i}(x-x_i),$$

$$\textstyle\sum_{k,2}=\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{i=k+1}^{n}\frac{m_k+1}{m_i+1}K_{m_k}(x-x_i),$$

$$\textstyle\sum_{k,3}=\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{i=k+1}^{n}\frac{m_i-m_k}{m_i+1}D_{m_k}(x-x_i).$$

在区间 $\varDelta_k=(x_k+n^{-2}, x_{k+1}-n^{-2})\ni x$ 上, 我们估计 $\sum_{k,1}, \sum_{k,2}, \sum_{k,3}$.
由于 $K_i(t)=O\left(\dfrac{1}{it^2}\right)$, 所以当 $x\in\varDelta_k$, $i\leqslant k$ 时,

$$K_{m_i}(x-x_i)=O\left(\frac{1}{m_i(x-x_i)^2}\right)=O\left(\frac{n^4}{m_i}\right)=O(1),$$

从而 $\sum_{k,1}=O(1)$. 同样, 当 $x\in\varDelta_k$ 时,

$$\textstyle\sum_{k,2}=\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{i=k+1}^{n}\frac{m_k+1}{m_i+1}O\left(\frac{1}{m_k(x-x_i)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{i=k+1}^{n}O(1)=O(1).$$

因此 $$|S_{m_k}(T_n, x)|>|\Sigma_{k,3}|-O(1) \quad (x\in\Delta_k).$$

对于 $\Delta_{k,3}$, 我们首先注意: $\sin\left(m_k+\frac{1}{2}\right)(x-x_i)$ 等于

$$\sin\left[\left(m_k+\frac{1}{2}\right)(x-x_{k+1})+\left(m_k+\frac{1}{2}\right)\frac{k+1-i}{2n+1}4\pi\right]$$
$$=\sin\left(m_k+\frac{1}{2}\right)(x-x_{k+1}).$$

从而得到

$$\Sigma_{k,3}=\frac{1}{n+1}\sin\left(m_k+\frac{1}{2}\right)(x-x_{k+1})\sum_{i=k+1}^{n}\frac{m_i-m_k}{m_i+1}$$
$$\times\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}(x_i-x)}.$$

最后的和, 当 $k<n-\sqrt{n}$, $x\in\Delta_k$ 时, 不小于

$$\sum_{i=k+1}^{n}\frac{m_i-(m_i-1)/2}{m_i+1}\cdot\frac{1}{x_i-x}$$
$$\geqslant\frac{1}{2}\sum_{i=k+1}^{n}\frac{1}{x_i-x_k}=\frac{2n+1}{8\pi}\sum_{i=k+1}^{n}\frac{1}{i-k}\geqslant\frac{2n+1}{8\pi}\log(n-k)$$
$$\geqslant\frac{2n+1}{8\pi}\log\sqrt{n}=\frac{2n+1}{16\pi}\log n.$$

因此我们得到如下的结果: 当 $k<n-\sqrt{n}$, $x\in\Delta_k$ 时,

$$|S_{m_k}(T_n, x)|\geqslant\frac{2n+1}{16\pi}\frac{\log n}{n+1}\left|\sin\left(m_k+\frac{1}{2}\right)(x_{k+1}-x)\right|-O(1)$$
$$\geqslant\frac{\log n}{16\pi}\left|\sin\left(m_k+\frac{1}{2}\right)x\right|-O(1).$$

置 $$E_n=\sum_{0\leqslant k\leqslant n-\sqrt{n}}\left\{\Delta_k\cdot\left(\left|\sqrt{\log n}\sin\left(m_k+\frac{1}{2}\right)x\right|>1\right)\right\},$$

则当 $x_0\in E_n$ 时,

$$|S_{m_k}(T_n, x)|\geqslant\frac{\sqrt{\log n}}{16\pi}-O(1)\geqslant M_n, \quad M_n\to\infty.$$

我们还要证明 $|E_n|\to2\pi$. 首先注意 $\Delta_0, \Delta_1, \cdots, \Delta_{[n-\sqrt{n}]}$ 的全长等于

$$\frac{4\pi}{2n+1}[n-\sqrt{n}]-\frac{2}{n^3}[n-\sqrt{n}]\to2\pi.$$

从$\Delta_0+\Delta_1+\cdots+\Delta_{[n-\sqrt{n}]}$除去适合$\left|\sin\left(m_k+\frac{1}{2}\right)x\right|\leqslant(\log n)^{-\frac{1}{2}}$的一切点，则得点集 E_n. 每一个 Δ_k 中的点能适合这个不等式的，其所成点集的测度是$O\left(\frac{1}{n\log n}\right)$. 因此，从$\sum\limits_{k=0}^{[n-\sqrt{n}]}O\left(\frac{1}{n\log n}\right)=O\left(\frac{1}{\log n}\right)$知 $|E_n|\to 2\pi$. 引理证毕.

哈戴-洛各净斯基的定理可述如下：

定理 1 存在如下的$f(x)\in L(0, 2\pi)$，它的共轭函数 $\tilde{f}(x)$ 也属于 $L(0, 2\pi)$，并且 $\mathfrak{S}[f]$和 $\mathfrak{S}[\tilde{f}]$ 在$[0, 2\pi]$上都是概散的.

【证明】 我们利用引理中的$\{M_n\}$和$\{T_n(x)\}$. 取 $n_1<n_2<\cdots$，使 $\sum M_{n_k}^{-\frac{1}{2}}$ 收敛. 将$T_n(x)$写成指数表达式：

$$T_{n_k}(x)=\sum_{l=-m_{n_k}}^{m_{n_k}}c_l^{(k)}e^{ilx}\quad(k=1, 2, 3, \cdots).$$

设 $\nu_1>m_{n_1}$, $\nu_k>\nu_{k-1}+m_{n_{k-1}}+m_{n_k}(k>1)$. 置

$$P_{n_k}(x)=\frac{e^{i\nu_k x}}{\sqrt{M_{n_k}}}T_{n_k}(x)=\frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}}\sum_{l=-m_{n_k}}^{m_{n_k}}c_l^{(k)}e^{i(l+\nu_k)x}.$$

级数 $P_{n_1}(x)+P_{n_2}(x)+\cdots$ 是不互相并项的. 由引理，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}|P_{n_k}(x)|dx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sigma}{\sqrt{M_{n_k}}}<\infty,$$

所以$\sum P_{n_k}(x)$概敛于一个函数 $F(x)\in L(0, 2\pi)$. 置 $F(x)=f_1(x)+if_2(x)$. 我们可证 $f_1(x)=f(x)$满足定理 1 的条件. 设

$$F(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}c_k e^{ikx},\qquad c_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(x)e^{-ikx}dx.$$

又设 $E=\overline{\lim}\, E_{n_k}$, 则 $|E|=2\pi$ (见引理). 又由引理以及 $F(x)$ 的项 $P_{n_k}(x)$的定义，当 $x_0\in E$ 时，存在 α_s 和 β_s 使

$$\left|\sum_{\nu=\alpha_s}^{\beta_s}c_\nu e^{i\nu x_0}\right|\geqslant\sqrt{M_{n_{k_s}}}.$$

这种 α_s 和 β_s 有无数个. 因此

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\sum_{k=1}^{n}c_k e^{ikx_0}\right|=\infty\quad(x_0\in E).$$

设 $c_k=a_k-ib_k$, 则从

$$c_k e^{ikx}=a_k\cos kx+b_k\sin kx+i(a_k\sin kx-b_k\cos kx)$$

易知 $\mathfrak{S}[f_1]=\sum(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$, $\mathfrak{S}[f_2]=\sum(a_k\sin kx-b_k\cos kx)$. 两者都是富理埃级数,由 §1 的定理 4, $f_1=f$ 是合乎这里的要求的. 证明完毕.

系 函数族 H_1 中有函数 $\Phi(z)=\sum c_k z^k$ 在 $|z|=1$ 上概散.

【证明】 利用定理中的 c_k, 作幂级数 $\Phi(z)=\sum c_k z^k$. 我们只要证明

$$\int_0^{2\pi}|\Phi(re^{ix})|dx=O(1)\quad(0<r<1)$$

好了. 由于

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{f(t)+i\bar{f}(t)\}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-x)+r^2}dt,$$

所以
$$\int_0^{2\pi}|\Phi(re^{ix})|dx\leqslant\int_0^{2\pi}|f(t)+i\bar{f}(t)|dt.$$

证明完毕.

5. 富理埃级数的概散点集可以为任意的 G_δ 集

要作成如题所述的 $\mathfrak{S}[f]$, 首先建立下面的

引理 设 $[c,d]\subset[a,b]\subset(0,2\pi)$. 对于很小的正数 ε 以及很大的自然数 N, 存在如下的三角多项式 $T_{\varepsilon,N}(x)\equiv T(x)$:

$$T(x)=\sum_{k=p}^{q}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),\quad q\geqslant p\geqslant N,$$

$$\int_0^{2\pi}|T(x)|dx<\varepsilon;$$

假如 $x\in[c,d]$, 那末有 k_x 使 $|S_{k_x}(T,x)|>\dfrac{1}{\varepsilon}$; 当 $x\in[0,2\pi]-[a,b]$ 时,

$$|S_k(T,x)|<\varepsilon\quad(k=0,1,2,\cdots).$$

【证明】 由柯尔莫哥洛夫的定理,存在处处无限发散的 $\mathfrak{S}[f]$. 现在从 f 作出 f_1:

$$f_1(x)=f(x)\quad(c\leqslant x\leqslant d),$$
$$f_1(x)=0\quad(0\leqslant x<c,\ d<x\leqslant 2\pi).$$

由收敛的局部性原理，$\mathfrak{S}[f_1]$ 在 $[0, c)+(d, 2\pi]$ 上收敛，在 (c, d) 上无限发散．假如 $\mathfrak{S}[f_1]$ 在 $x=c$ 和 $x=d$ 都是无限发散，那末取 f_1 为 φ: $\varphi(x)\equiv f_1(x)$．假如不然，那末取连续函数 $\tau(x)$ 使 $\mathfrak{S}[\tau; c]$ 或是 $\mathfrak{S}[\tau; d]$ 无限发散，在 $[0, 2\pi]-[c, d]$，$\tau(x)=0$．总之，$\varphi(x)=f_1(x)+\tau(x)$ 的 $\mathfrak{S}[\varphi]$ 在 $[c, d]$ 上无限发散，在 $[0, 2\pi]-[c, d]$，$\varphi(x)=0$．置

$$\|\varphi\|=\int_0^{2\pi}|\varphi(x)|\,dx, \quad M=\frac{1}{\varepsilon}+3\varepsilon,$$

$$\delta=\min(1, a, c-a, b-d), \quad \psi(x)=\frac{\delta\varepsilon\varphi(x)}{2^{10}N\|\varphi\|},$$

则 $\int_0^{2\pi}|\psi(x)|\,dx=\delta\varepsilon 2^{-10}/N$．由于 $\mathfrak{S}[\psi]$ 在 $[c, d]$ 上是无限发散，所以对于 $[c, d]$ 中的任一点 x，有如下的 n_x:

$$|S_{n_x}(\psi, x)|>M,$$

从而有 x 的邻域 $(x-\eta_x, x+\eta_x)$，当 $t\in(x-\eta_x, x+\eta_x)$ 时，成立着

$$|S_{n_x}(\psi, t)|>M.$$

由波赖耳-哈伊纳的掩盖定理，有有限个 $(x-\eta_x, x+\eta_x)$ 可以掩盖 $[c, d]$．因此存在着 L 适合

$$N\leqslant n_x<L, \quad |S_{n_x}(\psi, x)|>M \quad (x\in[c, d]).$$

由于 $L(0, 2\pi)$ 中的函数 $\psi(x)$ 在点集 $[0, 2\pi]-[c, d]$ 上取值 0，所以存在导数 $\alpha'(x)$ 属于 $C'(0, 2\pi)$ 的周期函数 $\alpha(x)$，周期是 2π，适合

$$\alpha(x)=0 \quad (x\in[0, 2\pi]-[c, d]), \quad \|\psi-\alpha\|<\frac{\delta\varepsilon}{2^{10}L}.$$

又因 $\alpha'(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上积分等于 $\alpha(2\pi)-\alpha(0)=0$，故当 $\alpha'(x)$ 用三角多项式 $\beta(x)$ 来逼近时，$\beta(x)$ 常数项为 0，阶数 $m\geqslant L$，并且适合

$$|\alpha'(x)-\beta(x)|<\frac{\delta\varepsilon}{2^{10}L} \quad (0\leqslant x\leqslant 2\pi).$$

置
$$\gamma(x)=\int_0^x\beta(t)\,dt=\sum_{k=0}^{m}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

则
$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\gamma(x)\,dx, \quad a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\gamma(x)\cos kx\,dx,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\gamma(x)\sin kx\,dx,$$

这里 $k>1$. 由是

$$|\alpha(x)-\gamma(x)|<\delta\varepsilon 2^{-7}L^{-1},\quad \|\alpha-\gamma\|<\delta\varepsilon 2^{-4}L^{-1}.$$

从而 $$\|\psi-\gamma\|<\delta\varepsilon 2^{-3}L^{-1},\quad \|\gamma\|<\delta\varepsilon(4N)^{-1}.$$

由于 $|\alpha(x)-\gamma(x)|<\delta\varepsilon 2^{-7}L^{-1}$ 以及 $\alpha(x)=0$ 在 $[0,\ 2\pi]-[c,\ d]$ 上成立，所以在 $[0,\ 2\pi]-[c,\ d]$ 上，成立着

$$|\gamma(x)|<\delta\varepsilon 2^{-7}L^{-1},\quad |\gamma'(x)|=|\beta(x)|<\delta\varepsilon 2^{-10}L^{-1}.$$

现在证明三角多项式 $T(x)=\sum\limits_{k=N}^{m}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ 满足引理中一切条件. 首先由于 $\|\gamma\|<\delta\varepsilon/4N$, 所以

$$\int_0^{2\pi}|T(x)|dx=\int_0^{2\pi}\left|\gamma(x)-\sum_{k=0}^{N-1}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right|dx$$

$$\leqslant(2N+1)\int_0^{2\pi}|\gamma(x)|dx\leqslant\frac{2N+1}{4N}\delta\varepsilon<\varepsilon.$$

其次，设 $x\in[c,\ d]$，则

$$|S_{n_x}(T,\ x)|=\left|S_{n_x}(\gamma,\ x)-\sum_{k=0}^{N-1}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right|$$

$$\geqslant|S_{n_x}(\psi,\ x)|-2N\int_0^{2\pi}|\gamma(x)|dx-|S_{n_x}(\psi-\gamma,\ x)|$$

$$\geqslant M-2N\frac{\delta\varepsilon}{4N}-(2n_x+1)\|\psi-\gamma\|$$

$$\geqslant\frac{1}{\varepsilon}+3\varepsilon-(2N+1)\frac{\delta\varepsilon}{8L}-\frac{\varepsilon}{2}>\frac{1}{\varepsilon}.$$

最后，当 $0<t_2-t_1\leqslant 2\pi$ 时，我们见到

$$\left|\int_{t_1}^{t_2}D_n(t)dt\right|=\left|\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{1}{2}+\cos t+\cdots+\cos nt\right)dt\right|$$

$$<2\pi\left(\frac{1}{2}+2\right)<2^5.$$

设 $x\in[0,\ a]+[b,\ 2\pi]$，则

$$S_n(\gamma,\ x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\gamma(t)D_n(t-x)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{x-\delta}^{2\pi+x-\delta}\gamma(t)D_n(t-x)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{x-\delta}^{x+\delta}+\frac{1}{\pi}\int_{x+\delta}^{2\pi+x-\delta}=J_1(x)+J_2(x).$$

第一个积分 $J_1(x)$ 等于

$$\frac{1}{\pi}\gamma(x+\delta)\int_{x-\delta}^{x+\delta} D_n(u-x)\,du-\frac{1}{\pi}\int_{x-\delta}^{x+\delta}\gamma'(t)\int_{x-\delta}^{t} D_n(u-x)\,du\,dt,$$

因此，

$$|J_1(x)|\leqslant\frac{1}{\pi}\frac{\delta\varepsilon}{2^7L}2^6+\frac{1}{\pi}\frac{\delta\varepsilon}{2^{10}L}2^5\cdot 2\pi<\frac{\varepsilon}{4},$$

$$|J_2(x)|=\frac{1}{\pi}\left|\int_{x+\delta}^{2\pi+x-\delta}\gamma(t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\sin\frac{1}{2}(t-x)}dt\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\frac{\|\gamma\|}{2\sin\frac{\delta}{2}}\leqslant\frac{1}{2\delta}\frac{\delta\varepsilon}{2^2N}<\frac{\varepsilon}{8}.$$

合并起来，得到 $|S_n(\gamma, x)|<\frac{\varepsilon}{2}$，但 $x\in[0, a]+[b, 2\pi]$．但是

$$\sum_{k=0}^{N-1}(|a_k|+|b_k|)\leqslant 2N\int_0^{2\pi}|\gamma(x)|dx\leqslant 2N\frac{\delta\varepsilon}{2^2N}\leqslant\frac{\varepsilon}{2},$$

所以，从

$$T(x)=\gamma(x)-\sum_{k=0}^{N-1}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

得到

$$|S_n(T, x)|\leqslant|S_n(\gamma, x)+S_n(T-\gamma, x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

引理证明完毕.

利用这个引理，就可以证明下述采娄(K. Zeller, Archiv der Math. 6, 1955)的定理了.

定理 1　设 E 是[0, 2π)中的 G_δ 集，$E_1+E=[0, 2\pi)$，$E_1\cdot E=0$，则必有勒贝格-富理埃级数 $\mathfrak{S}[f]$ 在 E 上收敛，在 E_1 上无限发散.

【证明】　当 $E=0$，$E_1=[0, 2\pi)$ 时，定理 1 是已知的事实．因此我们不妨假设 0 属于 E，从而 $E_1\subset(0, 2\pi)$．由于 E 是 G_δ 集，所以 $(0, 2\pi)$ 中有开集 C_1, C_2, … 适合 $E_1=\prod_{i=1}^{\infty}C_i$．置

$$G_n=C_1C_2\cdots C_n\quad(n=1, 2, \cdots),$$

则 G_i 是递减的，$E_1=\prod_{i=1}^{\infty}G_i$；$G_i$ 都是 $(0, 2\pi)$ 中的开集．开集是可列无

限个开区间的和．开区间 (α, β) 是可列无限个闭区间的和：$(\alpha, \beta)=\sum[\alpha_i, \beta_i]$．当 $x\in(\alpha, \beta)$ 时，至多只有两个 $[\alpha_i, \beta_i]$ 含有 x．由是可知：每一 G_i 可以有如下的两种表达式：

$$G_i=\sum_{j=1}^{\infty}[a_j^{(i)}, b_j^{(i)}]=\sum_{j=1}^{\infty}[c_j^{(i)}, d_j^{(i)}],$$

$$[a_j^{(i)}, b_j^{(i)}]\supset[c_j^{(i)}, d_j^{(i)}];$$

当 $x\in G_i$ 时，含有 x 的 $[a_j^{(i)}, b_j^{(i)}]$ 不出两个．因此，E_1 的每一点 x，属于无数个 $[a_j^{(i)}, b_j^{(i)}]$，也属于无数个 $[c_j^{(i)}, d_j^{(i)}]$．改换区间的号码，将一切 $[a_j^{(i)}, b_j^{(i)}]$ 写成 $[a_k, b_k]$，一切 $[c_j^{(i)}, d_j^{(i)}]$ 写成 $[c_k, d_k]$，且使

$$[c_k, d_k]\subset[a_k, b_k]\quad(k=1, 2, \cdots).$$

由是，

$$E_1=\prod_{m=1}^{\infty}\sum_{k=m}^{\infty}[a_k, b_k]=\prod_{m=1}^{\infty}\sum_{k=m}^{\infty}[c_k, d_k].$$

由引理，对于任何 $k(k=1, 2, \cdots)$，存在如下的 $T_k(x)$：

$$T_k(x)=\sum_{n=p_k}^{q_k}(a_{n,k}\cos nx+b_{n,k}\sin nx),\quad q_k>p_k,$$

$$\int_0^{2\pi}|T_k(x)|dx<2^{-k},$$

$$S_n(T_k, x)<2^{-k}(x\in[0, 2\pi]-[a_k, b_k]);$$

当 $x\in[c_k, d_k]$ 时，存在 $p_x^{(k)}\geqslant p_k$ 使

$$|S_{p_x^{(k)}}(T_k, x)|>2^k\quad(p_x^{(k)}\leqslant q_k).$$

我们证明 $f(x)=T_1(x)+T_2(x)+\cdots$ 是满足定理中的一切条件的．由于

$$\int_0^{2\pi}|f(x)|dx<\sum\int|T_k(x)|dx<\sum 2^{-k}<\infty,$$

所以 $f(x)\in L(0, 2\pi)$．又因 $p_k>q_{k-1}$，所以 $f(x)=\sum T_k(x)$ 中的任何两个 $T_k(x)$ 并不并项．

现在证明 $\mathfrak{S}[f]$ 在 E_1 上无界发散．设 $x\in E_1$，则

$$x\in[c_{n_i}, d_{n_i}]\quad(i=1, 2, \cdots);$$

因此

$$|S_{p_x^{(n_i)}}(f, x)-S_{q_{n_i-1}}(f, x)|=|S_{p_x^{(n_i)}}(T_{n_i}, x)|>2^{n_i}.$$

其次证明 $\mathfrak{S}[f]$ 在 E 上收敛．当 $x\in E$ 时，$x\bar{\in}E_1$，从而

$$x\in[0, 2\pi]-[a_i, b_i] \quad (i\geqslant i_x).$$

$$|S_n(T_i, x)|<2^{-i} \quad (i\geqslant i_x, n=1, 2, \cdots).$$

对于正数 ε，取 $N\geqslant i_x$ 适合于 $\sum\limits_N^\infty 2^{-k}<\frac{1}{2}\varepsilon$. 当 $n\geqslant N$, $p\geqslant 0$ 时，

$$S_{n+p}(f, x)-S_n(f, x)=\sum_{k=1}^{N-1}[S_{n+p}(T_k, x)-S_n(T_k, x)]$$

$$+\sum_{k=N}^\infty S_{n+p}(T_k, x)-\sum_{k=N}^\infty S_n(T_k, x).$$

假如 $N\geqslant i_x$，那末上式最后两项的绝对值之和小于

$$\sum_{k=N}^\infty 2^{-k}+\sum_{k=N}^\infty 2^{-k}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

取 N_1 使 $S_{n+p}(T_k,x)=T_k(x)=S_n(T_k, x)$ 当 $n\geqslant N_1$, $0<k\leqslant N$, $p>0$ 时成立. 因此，$n>\max(N, N_1)$ 时，在 $x\in E$，成立着

$$|S_{n+p}(f, x)-S_n(f, x)|<\varepsilon.$$

证明完毕.

6. L^2 中的富理埃级数的更序级数可以概散

1927 年，柯尔莫哥洛夫和孟孝夫(Д. Е. Меньшов)在(德国)数学时刊第 26 卷上指出：存在 L^2 中的 $\mathfrak{S}[f]$，经过适当的更序，新得的级数可以几乎到处发散. 过了三十多年，一直不见证明. 到了 1960 年，柴霍斯基(Z. Zohorski)在巴黎科学公报(C. R.)的第 251 卷上，指示一个上述函数的作法，言之不详. 在 1961 年的(苏联)数学科学进展 XVI 上，乌里雅诺夫(П. Л. Ульянов)有比较详细的关于柴霍斯基函数的说明. 事实上，乌里雅诺夫证得下述

定理 1 $L^2(0, 2\pi)$ 中存在 $f(\theta)$，它的富理埃级数经过适当的更序，新的级数几乎到处无限发散.

证明的出发点是在空间 $L^2(0, 2\pi)$ 的"基底". 设 $f_n(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的一列函数，都属于 $L^2(0, 1)$；假如对于 $L^2(0, 1)$ 中任一函数 $f(x)$，存在唯一的数列 $\{c_n\}$ 适合于

$$\|f(x)-c_1f_1(x)-c_2f_2(x)-\cdots-c_nf_n(x)\|=o(1),$$

那末 $\{f_n(x)\}$ 是 $L^2(0, 1)$ 的一个基底．当

$$\|f_n\|=\sqrt{\int_0^1 |f_n^2|dx}=1 \quad (n=1, 2, \cdots)$$

时，称基底 $\{f_n(x)\}$ 是就范的．

对于就范的基底 $\{f_n(x)\}$，$L^2(0, 1)$ 中有函数列 $\{\psi_n(x)\}$ 适合于

$$\int_0^1 f_n(x)\psi_m(x)dx=\delta_{nm} \quad [\delta_{mm}=1, \quad \delta_{nm}=0 \ (m\neq n)].$$

这是巴拿赫(Banach)的定理，参见他的《泛函分析》．

当上面的极限等式 $\|f-c_1f_1-c_2f_2-\cdots-c_nf_n\|=o(1)$ 成立时，称 $\sum f_n(x)$ 在 $L^2(0, 1)$ 中平均收敛于 $f(x)$．我们建立下面的

引理 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $L^2(0, 1)$ 中就范的基底，$\{a_n\}$ 是一数列．假如

$$S_{q_k}(x)=\sum_{n=1}^{q_k} a_nf_n(x) \quad (q_k<q_{k+1})$$

当 $k\to\infty$ 时，在 $L^2(0, 1)$ 平均收敛于 $\Phi(x)$，那末 $\Phi(x)\sim\sum a_nf_n(x)$：

$$a_n=\int_0^1 \Phi(x)\psi_n(x)dx \quad (n=1, 2, \cdots).$$

【证明】 这里 $\{\psi_n\}$ 与 $\{f_n\}$ 在 $L^2(0, 1)$ 中互成双直交系：

$$\int f_n\psi_m dx=\delta_{nm}.$$

我们见到，当 $q_k>n$ 时，

$$\int_0^1 \Phi(x)\psi_n(x)dx-a_n=\int_0^1\left[\Phi(x)-\sum_{i=1}^{q_k}a_if_i(x)\right]\psi_n(x)dx.$$

从而左端的绝对值的平方不大于

$$\int_0^1\left[\Phi(x)-\sum_{i=1}^{q_k}a_if_i(x)\right]^2dx\cdot\int_0^1(\psi_n(x))^2dx\to 0 \quad (k\to\infty),$$

这就完成了引理的证明．

乌里雅诺夫(ДАН 138, 1961)将定理 1 拓广成如下的形式：

定理 2 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $L^2(0, 1)$ 中就范的基底，则 $L^2(0, 1)$ 中存在如下的 $F(x)$：级数 $\sum a_nf_n(x)$ 在 $L^2(0, 1)$ 中平均收敛于 $F(x)$，而它的一个更序级数可以无界概散．

【证明】 设 $\{\psi_n\}$ 与 $\{f_n\}$ 在 $L^2(0, 1)$ 互成双直交系．设 $\chi_i(x)$ 是哈尔(Haar)系统中的一个函数，那末

$$\chi_i(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu^{(i)}f_\nu(x),\quad a_\nu^{(i)}=\int_0^1\chi_i(x)\psi_\nu(x)dx.$$

取适当的整数 $\delta(i)$, $\delta(i)<\delta(i+1)$, 可使 $\delta(i)>i$,

$$\int_0^1\Big[\chi_i(x)-\sum_{\nu=1}^{\delta(i)}a_\nu^{(i)}f_\nu(x)\Big]^2dx<2^{-i}\quad(i=1,\ 2,\ \cdots).$$

由贝塞尔的不等式

$$\sum_{i=1}^{\infty}[a_\nu^{(i)}]^2\leqslant\int_0^1\psi_\nu^2(x)dx.$$

取如下的 p_ν, $p_\nu<p_{\nu+1}$, $\sum\limits_{i=p_\nu}^{\infty}[a_\nu^{(i)}]^2<4^{-\nu}$. 利用 $\{p_\nu\}$, 定义整数值梯形函数 $u(i)$:

$$u(i)=\begin{cases}1 & (1\leqslant i<p_1),\\ k & (p_k\leqslant i<p_{k+1},\ k=1,\ 2,\ \cdots).\end{cases}$$

由是 $u(i)\leqslant i<\delta(i)$. 由于 $u(i)\uparrow\infty$, 所以存在如下的整数 m_1, m_2, $\cdots$:

$$m_1=1,\quad \delta(m_k)<u(m_{k+1})\quad(k=1,\ 2,\ \cdots).$$

除此而外我们还要取 $\{m_k\}$ 使它具有如下的性质: 有整数 n_k 适合于

$$m_{2k}<2^{n_k}<2^{n_k+1}<m_{2k+1}.$$

我们把 $\chi_i(x)$ 写成下面的形式: $\chi_i(x)=\varphi_i'(x)+\varphi_i''(x)+\varphi_i'''(x)$, 这里

$$\varphi_i'(x)=\sum_{\nu=1}^{u(i)}a_\nu^{(i)}f_\nu(x),\quad \varphi_i''(x)=\sum_{\nu=u(i)+1}^{\delta(i)}a_\nu^{(i)}f_\nu(x),$$

$$\varphi_i'''(x)=\chi_i(x)-\sum_{\nu=1}^{\delta(i)}a_\nu^{(i)}f_\nu(x).$$

那末

$$\sum_{i=1}^{\infty}b_i\chi_i(x)=\sum_{i=1}^{\infty}b_i\varphi_i'(x)+\sum_{i=1}^{\infty}b_i\varphi_i''(x)+\sum_{i=1}^{\infty}b_i\varphi_i'''(x).$$

当

$$\sum b_i^2=D<\infty$$

时, 级数 $\sum b_i\chi_i(x)$ 在 $L^2(0,\ 1)$ 中平均收敛. 回顾 $\delta(i)$ 的性质, 我们见到

$$\int_0^1\Big\{\sum_{i=1}^{\infty}|b_i\varphi_i'''(x)|\Big\}^2dx\leqslant\sum b_i^2\cdot\sum\int_0^1\{\varphi_i'''(x)\}^2dx$$

$$\leqslant\sum b_i^2\cdot\sum 2^{-i}=D<\infty.$$

因此 $\sum b_i\varphi_i'''(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ 几乎处处绝对收敛.

另一方面,级数 $\sum|b_i\varphi_i'(x)|$ 不大于

$$\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|\sum_{\nu=1}^{u(i)}|a_\nu^{(i)}|\cdot|f_\nu(x)|\leqslant\sum_{\nu=1}^{\infty}\Big\{\sum_{u(i)>\nu}|b_i||a_\nu^{(i)}|\Big\}|f_\nu(x)|$$

$$\leqslant\sum_{\nu=1}^{\infty}d_\nu|f_\nu(x)|,$$

这里

$$d_\nu=\sum_{i=p_\nu}^{\infty}|b_i||a_\nu^{(i)}|\leqslant\sqrt{\sum_{i=p_\nu}^{\infty}b_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=p_\nu}^{\infty}|a_\nu^{(i)}|^2}\leqslant\sqrt{D}2^{-\nu}.$$

因此,从

$$\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^1|b_i\varphi_i'(x)|dx\leqslant\sum_{\nu=1}^{\infty}d_\nu\int_0^1|f_\nu(x)|dx\leqslant\sqrt{D}\sum 2^{-\nu}=\sqrt{D}$$

知道 $\sum b_i\varphi_i'(x)$ 在[0, 1]中几乎处处绝对收敛.

现在, 设 $M<N$, 除开$[M, N]$中的 i 而外, 将一切 b_i 都代以 0: $\bar{b}_i=b_i(M\leqslant i\leqslant N)$, $\bar{b}_i=0(i<M,\ i>N)$. 又将此时的 d_ν 写做 $\bar{d}_\nu$. 那末

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\bar{b}_i\varphi_i'(x)|\leqslant\sum_{\nu=1}^{\infty}\bar{d}_\nu|f_\nu(x)|,$$

$$0\leqslant\bar{d}_\nu\leqslant\frac{1}{2^\nu}\sqrt{\bar{b}_{p_\nu}^2+\cdots}\leqslant\frac{1}{2^\nu}\sqrt{b_M^2+\cdots+b_N^2}.$$

从而积分 $\int_0^1(b_M\varphi_M'(x)+\cdots+b_N\varphi_N'(x))^2dx$ 等于

$$\int_0^1\Big(\sum_1^{\infty}\bar{b}_i\varphi_i'(x)\Big)^2dx\leqslant\int_0^1\Big\{\sum_{\nu=1}^{\infty}\bar{d}_\nu|f_\nu(x)|\Big\}^2dx$$

$$\leqslant\int_0^1\sum\bar{d}_\nu^2f_\nu^2(x)dx+\int_0^1\sum_{\nu\neq\mu}\bar{d}_\nu\bar{d}_\mu|f_\nu(x)|\cdot|f_\mu(x)|dx$$

$$\leqslant\sum\bar{d}_\nu^2+\sum_{\nu\neq\mu}\bar{d}_\nu\bar{d}_\mu=(\sum\bar{d}_\nu)^2$$

$$\leqslant\Big(\sum 2^{-\nu}\Big(\sum_M^N b_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big)^2\leqslant\sum_{i=M}^{\infty}b_i^2,$$

$$\lim_{N>M\to\infty}\int_0^1(b_M\varphi_M'(x)+\cdots+b_N\varphi_N'(x))^2dx=0.$$

所以级数 $\sum b_i\varphi_i'(x)$ 在 $L^2(0, 1)$ 中是平均收敛的.

总的说来, 当 $\sum b_i^2=D<\infty$, $\chi_i(x)=\varphi_i'(x)+\varphi_i''(x)+\varphi_i'''(x)$ 时, 级数 $\sum b_i\varphi_i'''(x)$ 和 $\sum b_i\varphi_i'(x)$ 在(0, 1)中几乎处处绝对收敛,并且在 $L^2(0,$

1)中平均收敛. 由于$\sum b_i\chi_i(x)$在$L^2(0, 1)$中也是平均收敛, 所以级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i\varphi_i''(x)=\sum_{i=1}^{\infty} b_i\left\{\sum_{\nu=u(i)+1}^{\delta(i)} a_\nu^{(i)} f_\nu(x)\right\}$$

在$L^2(0, 1)$中平均收敛.

设当$2^{n_k}+1\leqslant i\leqslant 2^{n_k+1}$时, $b_i=c_i$, 在其他的i, $b_i=0$; $\sum b_i^2<\infty$. 将函数

$$B_k(x)=\sum_{i=2^{n_k}+1}^{2^{n_k+1}} c_i\left\{\sum_{\nu=u(i)+1}^{\delta(i)} a_\nu^{(i)} f_\nu(x)\right\}$$

改写成——注意到$u(m_{k+1})>\delta(m_1)$, $m_{2k}<2^{n_k}<2^{n_k+1}<m_{2k+1}$——

$$B_k(x)=\sum_{i=u(m_{2k})}^{\delta(m_{2k+1})} e_j f_j(x),$$

这是没有并项的, 由于级数

$$\sum b_i\varphi_i''(x)=\sum b_i\sum_{\nu=u(i)+1}^{\delta(i)} a_\nu^{(i)} f_\nu(x)$$

平均收敛, 所以从等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=2^{n_k}+1}^{2^{n_k+1}} c_i\chi_i(x)=\sum b_i\varphi_i'(x)+\sum b_i\varphi'''(x)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=2^{n_k}+1}^{2^{n_k+1}} c_i\sum_{\nu=u(i)+1}^{\delta(i)} a_\nu^{(i)} f_\nu(x)$$

知道级数$B_1(x)+B_2(x)+\cdots$在$L^2(0,1)$中平均收敛于某一函数$\Phi(x)$. 由引理, $\sum e_j f_j(x)$在$L^2(0, 1)$中平均收敛于$\Phi(x)$.

记忆着$\sum b_i\varphi_i'(x)$和$\sum b_i\varphi_i'''(x)$是几乎处处绝对收敛, 假如能从级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\sum_{i=2^{n_k}+1}^{2^{n_k+1}} c_i\chi_i(x)\right\}$$

获得一个无限概散的级数, 那末相应地从$\sum B_k(x)$获得无限概散的级数. 但是这种$\sum A_k(x)$或是$\{c_n\}$——$b_i=c_n$或$b_i=0$, $\sum b_n^2<\infty$——的存在, 是下面的定理3所能保证的. 这里的$\chi_i(x)$与定理3的$\chi_{n_k}^{(s)}(x)$的关系如下:

$$\chi_i(x)=\chi_{n_k}^{(s)}(x)\quad (i=2^{n_k}+s,\ 1\leqslant s\leqslant 2^{n_k}).$$

取得$\{c_n\}$, 就能获得$\Phi(x)$, 从而得到定理2中的$F(x)$. 定理2证毕.

这里回顾一下哈尔的直交函数系 $\chi_1(x)$, $\chi_2(x)$, $\cdots$;

$$\chi_1(x)=\chi_0^{(0)}(x)=1 \quad (0\leqslant x\leqslant 1),$$

$$\chi_m(x)=\chi_n^{(k)}(x) \quad (m=2^n+k;\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ 2^n),$$

$$\chi_n^{(k)}(x)=\begin{cases}\sqrt{2^n} & \left(\dfrac{2k-2}{2^{n+1}}\leqslant x<\dfrac{2k-1}{2^{n+1}}\right),\\ -\sqrt{2^n} & \left(\dfrac{2k-1}{2^{n+1}}<x\leqslant\dfrac{2k}{2^{n+1}}\right),\\ 0 & (x\text{ 在}[0,\ 1]\text{中其他的地方})\end{cases} \qquad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ 2^n).$$

哈尔的系统是完备的. 当 $f(x)\in L(0,\ 1)$时, 哈尔级数 $\sum c_n\chi_n(x)$概敛于 $f(x)$, 这里 $c_n=\int_0^1 f\chi_n dx$. 乌里雅诺夫于 1961 年 (ДАН 137) 证明: $L^2(0,\ 1)$中有 $f(t)\sim\sum a_n\chi_n(t)$, 它的一个更序级数在 $[0,\ 1]$ 中无限概散, 后来他又(ДАН, 138)加强到如下的情况:

定理 3 设 $n_m\uparrow\infty$, 存在如下的 $a_{n_m}^{(k)}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 2^{n_m};\ m=1,\ 2,\ \cdots)$:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n_m}}(a_{n_m}^{(k)})^2<\infty,$$

级数 $\sum_{m=1}^{\infty}A_m(t)$, $A_m(t)=\sum_{k=1}^{2^{n_m}}a_{n_m}^{(k)}\chi_{n_m}^{(k)}(t)$, 的某一更序级数 $\sum A_{m_\nu}(t)$ 在 $[0,\ 1]$ 中无限概散, $\{m_n\}$ 是 1, 2, 3, $\cdots$ 的一个更序.

现在考虑如下的问题: 当 $a_n\downarrow 0$ 时, 在怎样条件下, 哈尔级数 $\sum a_n\chi_n(x)$ 无条件收敛? 毛利兹(Ф. Мориц) 在苏联科学院院报(数学之辑, 1963)第 27 卷上解决了这个问题. 他将 $\{a_n\}$ 写成 $\{a_n^{(k)}\}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 2^n;\ n=0,\ 1,\ \cdots)$. 定理可述如下:

定理 4 假如哈尔级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^n}a_n^{(k)}\chi_n^{(k)}(x)$ 的系数单调减少, 极限是 0, 那末它具有无条件收敛性的充要条件是

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\sum_{k=1}^{2^n}(a_n^{(k)})^2}<\infty.$$

【证明】 积分

$$I_n=\int_0^1\left|\sum_{k=1}^{2^n}a_n^{(k)}\chi_n^{(k)}(x)\right|dx$$

的平方 I_n^2 不大于

$$\int_0^1\left(\sum_{k=1}^{2^n}a_n^{(k)}\chi_n^{(k)}(x)\right)^2dx=\sum_{k=1}^{2^n}(a_n^{(k)})^2.$$

因此在所设条件下，$\sum I_n<\infty$. 由富豣尼的收敛定理，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{2^n}a_n^{(k)}\chi_n^{(k)}(x)\right|$$

几乎处处收敛，从而 $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^n}|a_n^{(k)}\chi_n^{(k)}(x)|$ 概收敛. 绝对收敛级数是无条件收敛的，这就建立了条件的充分性.

条件的必要性，证明冗长，这里从略.

毛利兹自己发现定理 4 已经含在乌里雅诺夫的工作中(所指的工作是"无条件收敛的瓦伊耳因子", M. сб. 60, 详见次节). 关于一般的直交(就范的)函数级数 $\sum a_n\varphi_n(x)$, 匈牙利的丹独利 (K. Tandori) 证明: 当 $\{a_n\}$ 是单调减少数列时，$\sum a_n\varphi_n(x)$ 具有无条件收敛性的充要条件是

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\sum_{k=1}^{2^n}(a_k^2\log^2 k)}<\infty$$

(见 Acta Szeged 21, 1960).

7. 瓦伊耳因子

对于直交函数级数 $\sum c_n\varphi_n(x)$, H. 瓦伊耳(Weyl)首先探求怎样的因子 $\omega(n)\uparrow\infty$, 能使 $\sum c_n^2\omega(n)<\infty$ 含有 $\sum c_n\varphi_n(x)$ 在直交区间上的概收敛(1909). 孟孝夫于 1923 年解决了这个一般问题: $\sum c_n^2(\log n)^2<\infty$ 含有 $\sum c_n\varphi_n(x)$ 的概收敛; 假如 $\omega(n)=O(\log^2 n)$, 那末 $\sum c_n^2\omega(n)<\infty$ 未必能保证 $\sum c_n\varphi_n(x)$ 的概敛.

但是，对于一定的直交(就范)函数系 $\{\varphi_n(x)\}$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$, 存在"准确的瓦伊耳因子"否? 换句话说，存在如下的 $\omega(n)$ 吗? $\sum c_n^2\omega(n)<\infty$ 含有 $\sum c_n\varphi_n(x)$ 的概敛, $\omega_1(n)=O(\omega(n))$ 的话, $\sum c_n^2\omega_1(n)<\infty$ 未必保证级数的概敛. 对于无条件概收敛，我们也可以定义准确的瓦伊耳因子: 当 $\sum c_n^2\omega(n)<\infty$ 时, $\sum c_n\varphi_n(x)$ 无条件概敛; 当 $\omega_1(n)=O(\omega(n))$ 时,

$\sum c_n^2\omega_1(n)<\infty$ 未必保证 $\sum c_n\varphi_n(x)$ 的无条件概敛. 简称这样的 $\omega(n)$ 为 $\{\varphi_n(x)\}$ 的**瓦伊耳关于无条件收敛的准确因子**.

对于哈尔函数列 $\{\chi_n(x)\}$, 哈尔证明 $\omega(n)=1$ 是准确的瓦伊耳收敛因子. 但是乌里雅诺夫于 1961 年在 ДАН СССР 137 上指出: $\omega(m)=1$ 并不是哈尔函数列的无条件概敛的瓦伊耳因子. 下面是乌里雅诺夫的定理.

定理 1 对于哈尔的函数系 $\{\chi_m(x)\}$, $(\log m)^{1+\varepsilon}$ $(\varepsilon>0)$ 是无条件概敛的瓦伊耳因子. $(\log m)^{1-\varepsilon}(\varepsilon>0)$ 不是这种因子.

【证明】 当 $m=2^n+k$, $1\leqslant k\leqslant 2^n$ 时, $\chi_m(t)=\chi_n^{(k)}(t)$, 从而

$$A_m\equiv\int_0^1|\chi_m(t)|dt=\int_0^1|\chi_n^{(k)}(t)|dt=\frac{1}{\sqrt{2^n}}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m}};$$

$$\sum_{m=2}^{\infty}\frac{A_m^2}{(\log m)^{1+\varepsilon}}\leqslant 2\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m(\log m)^{1+\varepsilon}}<\infty.$$

设 $\{\chi_{p_i}(x)\}$ 是 $\{\chi_m(x)\}$ 的一个更序函数列, 关于它的勒贝格函数是 $L_n(x)=\int_0^1\left|\sum_{i=1}^{n}\chi_{p_i}(x)\chi_{p_i}(t)\right|dt$. 那末

$$L_n(x)\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\chi_{p_i}(x)|\int_0^1|\chi_{p_i}(t)|\,dt=\sum_{i=1}^{n}|\chi_{p_i}(x)|A_{p_i}.$$

简写 $(\log m)^{1+\varepsilon}=l_m$, 我们见到

$$\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^1\frac{A_{p_i}}{l_i}|\chi_{p_i}(x)|\,dx=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{A_{p_i}^2}{l_i}.$$

当 $a_1\geqslant a_2$, $b_1\geqslant b_2$ 时, $(a_1b_1+a_2b_2)-(a_1b_2+a_2b_1)=(a_1-a_2)(b_1-b_2)\geqslant 0$. 由是, 假如 $a_n\downarrow$, $b_n\downarrow$, 那末 $\sum a_nb_n\geqslant\sum a_nb_{p_n}$, ——$\{b_{p_n}\}$ 是 $\{b_n\}$ 的一个排列. 从而 $\sum\frac{A_{p_i}^2}{l_i}\leqslant\sum\frac{A_i^2}{l_i}$,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^1\frac{A_{p_i}}{l_i}|\chi_{p_i}(x)|\,dx<\infty.$$

由富弼尼的收敛定理, 级数 $\sum l_i^{-1}A_{p_i}|\chi_{p_i}(x)|$ 概收敛. 从而

$$\sum_{i=1}^{n}A_{p_i}|\chi_{p_i}(x)|\doteq o(l_n).$$

我们见到 $L_n(x)\doteq o((\log n)^{1+\varepsilon})$.

对于整数 k，有整数 n_k 适合于 $k\leqslant l_{n_k}<k+1$. 当 $\sum c_n^2 l_n<\infty$ 时有 $f(t)$ 适合于

$$\int_0^1[f(t)-S_n(t)]^2dt=\sum_{i=1}^{\infty}c_i^2=r_n,\quad S_n(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i\chi_{p_i}(t).$$

由于 $\sum r_{n_k}=\sum(r_{n_k}-r_{n_{k+1}})k+\lim kr_{n_{k+1}}\leqslant\sum c_m^2 l_m<\infty$, 所以 $\{S_{n_k}(t)\}$ 概敛于 $f(t)$. 要证 $S_n(t)\Rightarrow f(t)$, 我们利用下述

引理 $L_n(x)\doteq O(l_n)$ 含有 $\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\chi_{p_i}(t)\doteq O(\sqrt{l_n})$, $\sum b_i^2<\infty$ 的话.

由于 $\sum c_m^2 l_m<\infty$, 所以必有 $\{\delta_n\}$, $\delta_n\uparrow\infty$, $\sum c_m^2 l_m\delta_m^2<\infty$. 置 $b_m=c_m\delta_m\sqrt{l_m}$, 则 $\sum b_m^2<\infty$, 从而 $\sum\limits_{j=1}^{m}b_j\chi_{p_j}(t)$ 的绝对值 $\leqslant\alpha(t)\sqrt{l_m}$ $(\alpha(t)>0)$. 由是, 当 $n_k<n<n_{k+1}$ 时, $S_n(t)-S_{n_k}(t)$ 等于

$$\sum_{i=n_k+1}^{n}b_i\chi_{p_i}(t)\frac{1}{\delta_i\sqrt{l_i}}=\sum_{i=n_k+1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}b_j\chi_{p_j}(t)\right)\left(\frac{1}{\delta_i\sqrt{l_i}}-\frac{1}{\delta_{i+1}\sqrt{l_{i+1}}}\right)$$

$$+\frac{1}{\delta_{n+1}\sqrt{l_{n+1}}}\sum_{j=1}^{n}b_j\chi_{p_j}(t)-\frac{1}{\delta_{n_k+1}\sqrt{l_{n_k+1}}}\sum_{j=1}^{n_k}b_j\chi_{p_j}(t).$$

利用引理, 我们得到

$$|S_n(t)-S_{n_k}(t)|\leqslant\alpha(t)\sqrt{l_{n_{k+1}}}\sum_{i=n_k+1}^{n}\left(\frac{1}{\delta_i\sqrt{l_i}}-\frac{1}{\delta_{i+1}\sqrt{l_{i+1}}}\right)+\frac{2\alpha(t)}{\delta_{n_k}}$$

$$\leqslant\alpha(t)\frac{1}{\delta_{n_k+1}}\sqrt{\frac{l_{n_{k+1}}}{l_{n_k+1}}}+\frac{2\alpha(t)}{\delta_{n_k}}\to 0\quad(k\to\infty).$$

从而 $S_n(t)\Rightarrow f(t)$. 我们还要证明引理.

写着
$$K_n(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\chi_{p_i}(x)\chi_{p_i}(t),$$

$$g(t)=\sum b_i\chi_{p_i}(t),\quad \sigma_n(t)=\sum_{i=1}^{n}b_i\chi_{p_i}(t),$$

我们见到

$$\sigma_n(x)=\int_0^1 g(t)K_n(t,x)dt.$$

对于 x 和 n, 存在如下的 $p=p(x,n)$:

$$v_n(x)=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{\sigma_k(x)}{\sqrt{l_k}}=\frac{\sigma_p(x)}{\sqrt{l_p}}.$$

函数列 $\{v_n(x)\}$ 是单调增加的. 置 $J_n=\int_0^1 v_n(x)dx$, 则

$$J_n=\int_0^1 dx\int_0^1 g(t)K_p(x,\ t)l_p^{-\frac{1}{2}}dt=\int_0^1 g(t)\int_0^1\frac{K_p(x,t)}{\sqrt{l_p}}dx\,dt,$$

$$J_n^2\leqslant\int_0^1 g^2(t)\,dt\int_0^1\left(\int_0^1\frac{K_p(x,t)}{\sqrt{l_p}}dx\right)^2 dt$$

$$=\int_0^1 g^2(t)\,dt\int_0^1\int_0^1\int_0^1\frac{K_p(x,\ t)K_q(x',\ t)}{\sqrt{l_p}\sqrt{l_q}}dt\,dx\,dx'.$$

或是——$r=\min(p,\ q)$ 的话, $\int_0^1 K_pK_q\,dt=K_r(x,\ x')$,——

$$\frac{J_n^2}{\int_0^1 g^2(t)\,dt}\leqslant\int_0^1\int_0^1\frac{|K_r(x,\ x')|}{l_r}dx\,dx'=O(1).$$

这就证明了引理.

定理的后半含在定理 2 之中.

现在研究哈尔函数列是否具有无条件收敛的瓦伊耳准确因子. 首先证明

定理 2 如下的 $\omega(n)$: $\omega(n)\uparrow\infty$, $\sum(n\omega(n))^{-1}=\infty$, 决不是 $\{\chi_n(x)\}$ 关于无条件收敛的瓦伊耳准确因子.

【证明】 我们要作出如下的级数 $\sum c_i\chi_i(x)$: 它不是无条件收敛, 但是

$$\sum c_i^2\omega(i)<\infty.$$

现在取如下的整数 R_0, R_1, $\cdots$: 设 $R_0=0$, 取 R_1 足够大, 使

$$D_1=\sum_{i=2^{R_0}+1}^{2^{R_1}}\frac{1}{i\omega(i)}\geqslant 2^1,\quad \omega(2^{R_0})\leqslant D_1.$$

取定了 R_{s-1}, 然后取 R_s:

$$D_s=\sum_{i=2^{R_{s-1}}+1}^{2^{R_s}}\frac{1}{i\omega(i)}\geqslant 2^s,\quad \omega(2^{R_{s-1}})\leqslant D_s.$$

由是 $\sum D_s^{-1}\leqslant\sum 2^{-s}<\infty$. 当 $m=2^n+k$, $1\leqslant k\leqslant 2^n$ 时,

$$\frac{1}{\sqrt{m}}\int_0^1|\chi_m(t)|dt=\frac{1}{\sqrt{2^n}}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m}}.$$

设 $2^{R_{s-1}}+1\leqslant m<2^{R_s}$. 函数 $\chi_m(x)=\chi_n^{(k)}(x)$ 具有特征零点 $x_0=\frac{2k-1}{2^{n+1}}$. $\left[\text{注意 }\chi_n^{(k)}(x)\text{ 在}\left(\frac{2k-2}{2^{n+1}},\frac{2k}{2^{n+1}}\right)\text{中除 }x_0\text{ 而外}\neq 0.\right]$经过更序，$\{\chi_m\}$变成 $\{\chi_{m_i}\}$. 设 $2^{R_{s-1}}+1\leqslant i\leqslant 2^{R_s}$, $\chi_{m_i}(x)$ 的特征零点是 x_i. 置

$$\begin{aligned}Q_s(x)&=\sum_{i=2^{R_{s-1}}+1}^{2^{R_s}}\left\{\frac{1}{D_s\omega(m_i)}\int_{[x_i,1]}\chi_{m_i}(t)dt\right\}\chi_{m_i}(x)\\&=\sum_{k_1}^{k_2}a_i\chi_{m_i}(x)\quad(k_1=2^{R_{s-1}}+1,\ k_2=2^{R_s}),\end{aligned}$$

$$Q_s^*(x)=\sup_{k_1\leqslant j\leqslant k_2}\left|\sum_{i=k_1}^{j}(-a_i\chi_{m_i}(x))\right|,$$

则必

$$\int_0^1 Q_s^*(x)dx\geqslant\sum_{k_1}^{k_2}-a_i\int_{[x_i,1]}\chi_{m_i}(x)dx.$$

事实上，$[x_{k_1},1]\supset[x_{k_1+1},1]\supset\cdots\supset[x_{k_2},1]$, $\sum_{i=k_1}^{j}(-a_i\chi_{m_i}(x))\leqslant Q_s^*(x)$.

从而

$$\begin{aligned}\int_0^1 Q_s^*(x)dx\geqslant&\int_{[x_{k_1},x_{k_1+1}]}+\int_{[x_{k_1+1},x_{k_1+2}]}+\cdots+\int_{[x_{k_2-1},x_{k_2}]}\\&+\int_{[x_{k_2},1]}Q_s^*(x)dx\geqslant-\int_{[x_{k_1},x_{k_1+1}]}a_1\chi_{m_1}(x)dx\\&-\int_{[x_{k_1+1},x_{k_1+2}]}(a_1\chi_{m_1}(x)+a_2\chi_{m_2}(x))dx-\cdots\\&-\int_{[x_{k_2},1]}[a_1\chi_{m_1}(x)+\cdots+a_{k_2}\chi_{m_{k_2}}(x)]dx\\&=-\sum_{k_1}^{k_2}a_i\int_{[x_i,1]}\chi_{m_i}(x)dx\\&=\sum_{k_1}^{k_2}\frac{1}{D_s\,\omega(m_i)}\left(\int_{[x_i,1]}\chi_{m_i}(x)dx\right)^2.\end{aligned}$$

由于

$$\int_{[x_i,1]}\chi_{m_i}(x)dx=-\frac{1}{2}\int_0^1|\chi_{m_i}(x)|dx,$$

所以得到

$$\int_0^1 Q_s^*(x)\,dx \geqslant \frac{1}{D_s}\sum_{i=2^{R_{s-1}}+1}^{2^{R_s}} \frac{1}{\omega(m_i)}\left\{\int_{[x_i,1]}\chi_{m_i}(x)\,dx\right\}^2$$

$$\geqslant \frac{1}{D_s}\sum_{i=2^{R_{s-1}}+1}^{2^{R_s}} \frac{1}{\omega(m_i)}\left(\frac{1}{2\sqrt{m_i}}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4D_s}\sum_{2^{R_{s-1}}+1}^{2^{R_s}} \frac{1}{j\omega(j)}=\frac{1}{4}.$$

最后的和等于

$$\sum_{\nu=R_{s-1}}^{R_s}\sum_{j=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}}\frac{1}{j\omega(j)} \geqslant \sum_{\nu=R_{s-1}}^{R_s-1}\frac{2^\nu}{2^{\nu+1}\omega(2^{\nu+1})}$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\sum_{\nu=R_{s-1}}^{R_s-1}\frac{1}{\omega(2^\nu)}-\frac{1}{2\omega(2^{R_{s-1}})}.$$

从而

$$D_s \geqslant \frac{1}{2}\sum_{\nu=R_{s-1}}^{R_s-1}\frac{1}{\omega(2^\nu)}-\frac{1}{2\omega(2^{R_{s-1}})},$$

$$\sum_{\nu=R_{s-1}}^{R_s-1}\frac{1}{\omega(2^\nu)} \leqslant 2D_s+\frac{1}{\omega(2^{R_{s-1}})} \leqslant 3D_s.$$

由是，除开一个零集，

$$Q_s^*(x) \leqslant \sum_{i=2^{R_{s-1}}+1}^{2^{R_s}}\left\{\frac{1}{D_s\omega(m_i)}\left|\int_{[x_i,1]}\chi_{m_i}(x)\,dx\right|\right\}|\chi_{m_i}(x)|$$

$$\leqslant \frac{1}{D_s}\sum_{n=R_{s-1}}^{R_s-1}\sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{\omega(2^n+k)}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1|\chi_n^{(k)}(t)|\,dt\cdot|\chi_n^{(k)}(x)|$$

$$\leqslant \frac{1}{2D_s}\sum_{n=R_{s-1}}^{R_s-1}\frac{1}{\omega(2^n)} \leqslant \frac{3D_s}{2D_s}<2.$$

将 $Q_s(x)$ 中的项排成自然顺序：

$$Q_s(x)=\sum_{i=2^{R_{s-1}}+1}^{2^{R_s}}\left\{-\frac{1}{2D_s\omega(i)}\int_0^1|\chi_i(t)|\,dt\right\}\chi_i(x)$$

$$=\sum_{i=2^{R_{s-1}}+1}^{2^{R_s}} c_i\chi_i(x).$$

从 $\sum\limits_1^\infty Q_s(x)$ 得到 $\sum\limits_2^\infty c_i\chi_i(x)$，这里

$$\sum_2^\infty c_i^2\omega(i)=\sum_{s=1}^\infty\sum_{i=2^{R_{s-1}}+1}^{2^{R_s}} c_i^2\omega(i) \leqslant \sum_{s=1}^\infty\frac{1}{D_s}<\infty.$$

从而 $F(x)\sim\sum c_i\chi_i(x)$ 的话，$F(x)\in L_1^2$.

另一方面，将 $Q_s(x)$ 排成 $\sum_{k_1}^{k_s} a_i\chi_{m_i}(x)$ 的顺序，那末级数 $\sum Q_s(x)$ 在某一正测度的点集上发散. 设

$$A_s=\left\{x,\ Q_s^*(x)\geqslant\frac{1}{8}\right\},$$

则因

$$Q^*(x)\leqslant 2,\quad \int_0^1 Q_s^*\,dx\geqslant\frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{4}\leqslant\int_0^1 Q_s^*(x)\,dx=\int_{A_s}+\int_{[0,1]-A_s}\leqslant 2|A_s|+\frac{1}{8},$$

$|A_s|\geqslant\frac{1}{16}$. 由是，虽然 $\sum c_i^2\omega(i)$ 收敛，$\sum Q_s(x)$ 的更序级数在正测度的某一点集上发散. 定理 2 证明完毕.

利用定理 1 的证明，不加实质上的修改，我们可述如下的

定理 3 设 $\omega(m)\uparrow\infty$, $\sum\frac{1}{m\omega(m)}<\infty$, 则当 $\sum a_m^2\omega(m)<\infty$ 时，级数 $\sum a_m\chi_m(x)$ 无条件收敛.

结合定理 2 和定理 3,

定理 4(乌里雅诺夫, M. cб. 60) 对于哈尔函数列 $\{\chi_m(x)\}$，不存在准确的无条件收敛瓦伊耳因子.

一般的直交函数系 $\{\varphi_n(x)\}(0\leqslant x\leqslant 1)$，更不必说，不具有准确的无条件收敛瓦伊耳因子. 但是我们可证明如下的

定理 5 假如增加函数 $\omega(m)$ 满足 $\sum\frac{1}{m\omega(m)\log m}$，那末 $\omega(m)(\log m)^2$ 是任一直交函数系 $\{\varphi_n(x)\}$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ 的无条件收敛瓦伊耳因子.

这个定理等价于下述奥尔列兹(Orlicz)的定理:

定理 6 设 $\omega(n)\uparrow\infty$, $n_k\uparrow\infty$, $n_{k+1}\leqslant n_k^c$(c: 常数), $\sum\frac{1}{\omega(n_k)}<\infty$, 则当 $\sum a_n^2\omega(n)\log^2 n<\infty$ 时，任一直交函数级数 $\sum a_n\varphi_n(x)$ 无条件收敛.

事实上，设 $A\geqslant 2$, $a_n\downarrow 0$, 则 $\sum_2^\infty a_m$ 等于

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=A^n+1}^{A^{n+1}}a_m,$$

小于 $\sum_0^{\infty}A^{n+1}a_{A^n}$ 而大于

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_{A^{n+1}}\sum_{m=A^n+1}^{A^{n+1}}1=\left(1-\frac{1}{A}\right)\sum_{n=0}^{\infty}A^{n+1}a_{A^{n+1}}.$$

由是可知当 $a_n\downarrow 0$ 时，$\sum a_m$ 与 $\sum A^{\nu}a_{A^{\nu}}$ $(A\geqslant 2)$ 同时收敛或同时发散．今设 $A>\max(c,\ n_1)$，则因

$$n_k\leqslant n_{k-1}^c\leqslant\cdots\leqslant n_1^{c^{k-1}}\leqslant A^{A^k},$$

从 $\sum\dfrac{1}{\omega(n_k)}<\infty$ 得到 $\sum\dfrac{A^k}{A^k\omega(A^{A^k})}<\infty$，因此

$$\sum\frac{1}{k\omega(A^k)}<\infty,\quad \sum\frac{1}{k\omega(k)\log_A k}<\infty.$$

反过来，如上式成立，则置 $n_k=2^{2^k}$ 的话，$n_{k+1}\leqslant n_k^2$，从 $\sum(k\omega(k)\log_2 k)^{-1}$ 的收敛(应用柯西的定理)，得到 $\sum(k\omega(2^k))^{-1}<\infty$，从而

$$\sum\frac{1}{\omega(2^{2^k})}<\infty.$$

【定理 6 的证明】 设 $g(s)$ $(s=1,\ 2,\ \cdots)$ 是自然数列 $\{s\}$ 的更序数列，后者的 s 对应于前者的 $g(s)$，那末 $\sum a_{g(s)}\varphi_{g(s)}(x)$ 是 $\sum a_s\varphi_s(x)$ 的一个更序级数．设落在$(n_{k-1},\ n_k]$ $(n_0=0)$中的自然数 s 的个数为 H_k，这些 s 对应于

$$G_k:\ g(n_{k-1}+1),\ g(n_{k-1}+2),\ \cdots,\ g(n_k).$$

G_k 中共有 $\gamma_k=n_k-n_{k-1}$ 个数，依照$\{g(s)\}$的次序，记它们为

$$g_1(k),\ g_2(k),\ \cdots,\ g_{\gamma_k}(k).$$

现在我们应用下述

引理 对于区间$[a,\ b]$上的就范直交函数 $\psi_1(t),\psi_2(t),\cdots,\psi_l(t)$，存在如下的 $\delta(t)$和常数 $\varkappa$:

$$\left|\sum_{\nu=\nu_1}^{\nu_2}\gamma_\nu\psi_\nu(t)\right|\leqslant\delta(t)\quad(1\leqslant\nu_1\leqslant\nu_2\leqslant l),$$

$$\int_a^b\delta^2(t)dt\leqslant\varkappa\log^2 l\sum_1^l\gamma_\nu^2.$$

当 $1\leqslant n\leqslant m\leqslant r_k$ 时,

$$\left|\sum_{i=n}^{m} a_{g_i}\varphi_{g_i}(t)\right|\leqslant\delta_k(t),\quad \int_0^1\delta_k^2(t)\,dt\leqslant\varkappa\log^2 r_k\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k}a_i^2.$$

因此

$$\omega(n_{k-1})\int_0^1\delta_k^2(t)\,dt\leqslant\varkappa\omega(n_{k-1})c'\log^2 n_{k-1}\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k}a_i^2$$
$$<c\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k}a_i^2\omega(i)\log^2 i.$$

置 $a_i=0\,(n_{k-1}<i<n_k)$, 则得

$$\omega(n_{k-1})\int_0^1\delta_k^2(t)\,dt<ca_{n_k}^2\omega(n_k)\log^2 n_k.$$

两边施行加法, 我们见到

$$\sum_{k=1}^{\infty}\omega(n_{k-1})\int_0^1\delta_k^2(t)dt\leqslant c\sum_1^{\infty}a_{n_k}^2\omega(n_k)\log^2 n_k.$$

由富弼尼的定理, $\sum\omega(n_{k-1})\,\delta_k^2(t)$ 在 $[0, 1]$ 上几乎处处收敛. 设 t 是 $\sum\omega(n_{k-1})\,\delta_k^2(t)$ 的一个收敛点, 对于 $\varepsilon>0$, 有 j 适合于 $\dfrac{1}{\omega(n_j)}+\cdots<\varepsilon^2$. 设 $k\geqslant j$, 当 $g(s)\,(n\leqslant s\leqslant m)$ 都落在 G_k 中时,

$$\left|\sum_{s=n}^{m}a_{g(s)}\varphi_{g(s)}(t)\right|\leqslant\sum_{k=j}^{\infty}\delta_k(t)$$
$$\leqslant\sqrt{\sum_{k=j}^{\infty}\delta_k^2\,\omega(n_{k-1})\sum_{k=j}^{\infty}\frac{1}{\omega(n_k)}}<\varepsilon\rho_{j-1},$$

这里 $\rho_{j-1}^2=\sum\limits_{k=j}^{\infty}\delta_k^2\omega(n_{k-1})$. 由是可知 $\sum a_{g(s)}\varphi_{g(s)}(t)$ 概敛.

现在证明所用的引理, 首先假设 $l=2^r$ (r: 整数). 置

$$d(t)=\frac{1}{2}\,\delta(t),$$

则

$$\left|\sum_1^{m}\gamma_\nu\varphi_\nu(t)\right|\leqslant d(t)\quad(1\leqslant m\leqslant l)$$

能成立的话, $|\gamma_{\nu_1}\varphi_{\nu_1}(t)+\cdots+\gamma_{\nu_1}\psi_{\nu_1}(t)|\leqslant\delta(t)$ 就成立. 区间 $[0, n]$ 由 $[0, 2^{r-1})$ 和 $(2^{r-1}, 2^r)$ 所成, 两者分别由等长的两个区间所成, 如是进行至 r 回, 每个区间的长都是 1. 设 $0<j<n$, 区间 $(0, j)$ 是由上述若干个

小区间所合成，长者居左，短者居右(利用二进位法)．记 $(i, j)=\sum_{k=i+1}^{j}\gamma_k\psi_k(t)$，则 $(0, j)=\sum_{q=0}^{r}p_q(t)$，$p_q(t)$ 的形式为 $(i, i+q)$．记一切 $p_q(t)$ 平方的和为 A_q，$r(A_0+A_1+\cdots+A_r)=(d(t))^2$，我们见到，

$$(0, j)^2\leqslant d^2(t), \quad \left|\sum_1^j\gamma_\nu\psi_\nu(t)\right|\leqslant d(t).$$

另一方面，

$$\int_0^1(d(t))^2dt=r\int_0^1(A_0+\cdots+A_r)dt=r(\gamma_1^2+\gamma_2^2+\cdots+\gamma_l^2).$$

由于

$$r\leqslant(r+1)^2=\left(\frac{r+1}{\log l}\right)^2\log^2 l\leqslant\varkappa\log^2 l,$$

所以引理成立．

应用这个引理，我们给第三章§2的定理2一个新证明．

孟孝夫-拉特马吼(Rademacher)的定理 在[0, 1]上就范的直交函数级数 $\sum a_n\varphi_n(x)$ 适合 $\sum a_n^2\log^2 n<\infty$ 的话，它必概收敛．

事实上，置 $S_n(x)=\sum_0^n a_\nu\varphi_\nu(x)$，我们只要证明：当 $2^k<m<2^{k+1}$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}[S_n(x)-S_{2^k}(x)]=0$$

几乎处处成立．由引理，我们见到

$$\sum_1^\infty\int_0^1(S_n(t)-S_{2^k}(t))^2dt\leqslant C\sum_{k=1}^\infty\left(k^2\sum_{\nu=2^k+1}^{2^{k+1}}a_\nu^2\right)$$
$$\leqslant C\sum a_\nu^2\log^2\nu<\infty.$$

从而得到所要的结果．

利用定理5，我们易证下述孟孝夫的另一定理：

定理7 当 $\sum|a_n|^{2-\varepsilon}<\infty$ $(\varepsilon<2)$ 时，就范的直交函数级数 $\sum a_n\varphi_n(x)$ 无条件概收敛．

【证明】 将 $\{|a_n|\}$ 排成单调顺序 $\{|a_{n(s)}|\}$，从 $\sum|a_{n(s)}|^{2-\varepsilon}<\infty$ 得到

$$\lim_{s\to\infty}s|a_{n(s)}|^{2-\varepsilon}=0, \quad a_{n(s)}^2<s^{-\frac{2}{2-\varepsilon}} \quad (s\geqslant s_0).$$

从而

$$\sum_{s=s_0}^{\infty} a_{n(s)}^2 \log^2 s (\log\log s)^{1+\varepsilon}<\infty.$$

函数 $\omega(n)=(\log\log n)^{1+\varepsilon}$ 适合定理 5 的条件，故定理 7 成立．

具有定理 7 的"项的无顺序性"而类似于定理 6 的，有如下的

定理 8 设 $\omega(t)\uparrow\infty$, $\sum[\omega(n)]^{-1}<\infty$, 则当 $a_n\to 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \log^2|a_n|\cdot\omega(\log|\log|a_n||)<\infty$$

时，直交函数级数 $\sum a_n\varphi_n(x)$ 无条件概收敛．

【证明】 由于所设条件无关于 $\{|a_n|\}$ 的顺序，所以不妨假设 $|a_n|\downarrow 0$ 来证明定理，并且可以假设 $\sum|a_n|^2=1$．适合 $(n+1)^{-1}\leqslant|a_m|<n^{-1}$ 的一切 a_m 成一集体 G_n．当 $a_m\in G_n$ 时，置

$$A(m)=\omega(\log\log\sqrt{n}).$$

由于 $\sum|a_n|^2=1$, G_n 中至多含有 n 个元素，所以 $m\leqslant 1+2+\cdots+n\leqslant n^2$,

$$A(m)\geqslant\omega(\log|\log|a_m||),\quad 16\log^2|a_m|\geqslant 4\log^2 n\geqslant\log^2 m,$$

从而 $\sum a_m^2 A(m)\log^2 m<\infty$．于定理 6，取

$$\omega(m)=A(m),\quad n_{k+1}=n_k^2,\quad \log_2\log_2\sqrt{n_k}=k,$$

则 $\sum 1/A(n_k)<\infty$．从而 $\sum a_n\varphi_n(x)$ 无条件收敛．

以上关于无条件收敛发散的议论，都是就级数的系数展开的，在其他一些情况，可以在函数的连续模的角度来讨论问题．设

$$0\leqslant\tau(x)\in L(a,b),$$

则有 n 次多项式 $P_n(x)$ 适合

$$\int_a^b P_n(x)P_m(x)\tau(x)dx=\delta_{mn}\quad(\delta_{nn}=1,\ \delta_{mn}=0,\ m\neq n).$$

设
$$f(x)\sim\sum_0^{\infty} c_nP_n(x),\quad c_n=\int_a^b f(x)P_n(x)\tau(x)dx$$

(存在的话)．设 $\omega(t)$ 是连续函数 $f(x)$ 的连续模，我们可证：当积分

$$\int_0^1 \omega^2(t)\left(\log\frac{1}{t}\right)^2\frac{dt}{t}$$

收敛时，$f(x)$ 的级数 $\sum c_nP_n(x)$ 无条件收敛．更一般地，下述定理成立（见科学记录，新辑第三卷，1959 年，直交多项式级数的求和）：

定理 9 设 $1\leqslant p<\infty$, $\omega_k(f, t)_{L_p}$ 表示

$$\sup_{|h|\leqslant t}\left[\int_a^b\left|\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{k-\nu}\binom{k}{\nu}f(x+\nu h)\right|^p\tau(x)dx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

设 $l_1(t)=|\log t|$, $l_{\nu+1}(t)=|\log l_\nu(t)|$. 当积分

$$\int_0^\eta \omega_k^2(f;\ t)_{L_2}\cdot l_1(t)l_2(t)\cdots l_{j-1}(t)l_j^p(t)\ \frac{dt}{t}$$

对于整数 j 收敛时，$f(x)$的级数 $\sum c_nP_n(x)$ 在(a, b) 上无条件概收敛.

对于三角级数，成立着相应于定理 9 的结果.

另一方面，设 $T_n(\theta)$是一 n 阶的三角多项式，记

$$E_n(f)_{L_2}=\inf_{T_n}\int_0^{2\pi}|f(\theta)-T_n(\theta)|^2dx.$$

我们还有下面的定理：

定理 10 若

$$\sum_N^\infty n^{-1}l_1(n)\cdots l_{j-1}(n)l_j^p(n)E_n(t)_{L_2}\quad(p>1)$$

收敛，则 f 的 $\mathfrak{S}[f]$ 无条件概敛.

8. 函数族 $L^p(0, 2\pi)$ 中有 F，它的富理埃级数具有概散的更序级数

下述定理 1 在 $p=2$ 的情况，已经在 §6 中说过.

定理 1 函数族 $L^p(0, 2\pi)$ $(p>0)$中存在 $F(x)$，它的富理埃级数的某一更序级数概散.

事实上，成立着更强的命题.

定理 2 $L^p(0, 2\pi)$ $(p>0)$ 中有 $F(x)\sim\sum(c_k\cos kx+d_k\sin kx)$，它对于任一如下的求和法 $T^*=\|a_{nm}\|$:

$$\lim_{n\to\infty}a_{nm}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^\infty a_{nm}=1,$$

存在更序级数 $\sum(c_{m_i}\cos m_ix+d_{m_i}\sin m_ix)$ 几乎处处不能用 T^* 法求和，甚至几乎处处 T^* 无界.

定理 2 是下述定理 3 的特殊情况：

定理 3 设均匀有界函数列 $f_1(x), f_2(x), \cdots$ 在 $L^2(0, 1)$ 中成黎斯基底，那末空间 $L^p(0, 1)$ $(p>0)$ 存在如下的 $F(x)$：当

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\left|F(x)-\sum_{k=1}^n c_k f_k(x)\right|^2 dx=0$$

时，级数 $\sum c_k f_k(x)$ 的一个更序级数 $\sum c_{q_m} f_{q_m}(x)$ 几乎处处不能用 T^* 求和法求和.

【证明】 黎斯基底是这样的：它是 $L^2(0, 1)$ 中的基底，当

$$\left\|F-\sum_1^n c_k f_k\right\|=o(1)$$

时，$\sum c_k^2<\infty$；当 $\sum c_k^2<\infty$ 时，$L^2(0, 1)$ 中必有 $F(x)$ 适合

$$\left\|F-\sum_1^n c_k f_k\right\|=o(1).$$

由 §6 的定理 2，$L^2(0, 1)$ 存在如下的 $f(x)$：

$$\left\|f-\sum_1^n c_k f_k\right\|=o(1),$$

$\sum c_k f_k(x)$ 的一个更序级数 $\sum c_{q_m} f_{q_m}(x)$ 在 $[0, 1]$ 中无界概散.

利用拉特马吼的函数

$$\varphi(t)=\operatorname{sgn}\sin(2^{n+1}t) \quad (0\leqslant t\leqslant 1)$$

作级数 $S_t(x)=\sum a_k f_k(x)\,\varphi_k(t)$. 由于拉特马吼级数 $\sum c_k\varphi_k(t)$ 当 $\sum c_k^2<\infty$ 时概敛，所以固定 x，$\sum a_k f_k(x)\varphi_k(t)$ 关于 t 概敛，因此在正方形

$$0\leqslant x\leqslant 1, \quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

中，使 $\sum a_k f_k(x)\varphi_k(t)$ 收敛的点 (x, t) 的集 E 的平面测度等于 1. 由是 E 与 $x=x_0$ $(0\leqslant x_0\leqslant 1)$ 的线测度概等于 1（参考实函数论中巴拿赫的定理）. 另一方面，E 与直线 $t=t_0$ 的线测度概等于 1，因此取适当的 ε_k $(\varepsilon_k=+1$ 或 $-1)$，可使级数 $\sum \varepsilon_k a_k f_k(x)$ 概敛于如下的一个函数 $F(x)$：

$$\int_0^1 e^{cF^2(x)}dx<\infty \quad (c>0).$$

由是，对于任一正数 p，$F(x)\in L^p(0, 1)$. 但是 $\{f_k\}$ 是黎斯基底，$\sum(\varepsilon_k a_k)^2<\infty$，因此 $\sum \varepsilon_k a_k f_k(x)$ 是 $L^2(0, 1)$ 中某一函数 $\Phi(x)$ 的"展

开”，从而 $F(x) \doteq \Phi(x)$. 置 $\varepsilon_k a_k = c_k$，由 §6 的定理 2，级数 $\sum c_k f_k(x)$ 的一个更序级数 $\sum c_{q_m} f_{q_m}(x)$ 无界概散.

置 $b_{nm} = \sum\limits_{k=m}^{\infty} a_{nk}$，则 $b_{nm} = o(1)\,(m\to\infty)$，$b_{nm} = 1 + o(1)\,(n\to\infty)$.

从上面所得的结果，定理 3 的证明可以用下述定理 4 来完成：

定理 4 设在正测度的点集 E 上的可测函数 $f_n(x)$ 做成概散的级数 $\sum f_n(x)$，尽管 $f_n(x)$ 在 E 上概等于 0，对于线性求和法

$$\|b_{nm}\| \quad (b_{nm} = o(1)\,(m\to\infty), b_{nm} = 1 + o(1)\,(n\to\infty)),$$

必有更序级数 $\sum f_{q_i}(x)$ 不能用此法求和.

【证明】 由于 $f_n(x)\to 0$，所以存在 $\sum f_{p_i}(x)$ 在 $[0, 1]$ 上概敛. 设

$$\{p_i'\} + \{p_i\} = \{n\}_{n=1,2,\cdots}, \quad p_1' < p_2' < \cdots,$$

则级数 $\sum f_{p_i'}(x)$ 概散. 现在分三种情况来证明定理.

第一种情况，存在 n_0 使 $\lim\limits_{k\to\infty} \sup |b_{n_0 k}| = \infty$. 那末必有增加数列 $\{k_i\}$ 使级数 $\sum f_{p_i'}(x) b_{n_0 k_i}$ 概散. 设

$$E_i = \{|f_{p_i'}(x)| > 0\},$$

则 $\overline{\lim\limits_{i\to\infty}} E_i = E$ 的测度等于 1. 取正数 ε_i 很小使

$$A_i = \{0 < |f_{p_i'}(x)| < \varepsilon_i\}$$

的测度 $|A_i| < 2^{-i}$; $A = \overline{\lim} A_i$ 的话，$|A| = 0$，置 $B_i = E_i - A_i$，则

$$B = \overline{\lim} B_i \supset E - A, \quad |E - B| = 0.$$

取 $k_i \uparrow \infty$ 使 $\varepsilon_i b_{n_0 k_i} \geqslant 1$. 当 $x_0 \in B$ 时，x_0 属于某一 B_{i_s}，从而

$$|f_{p_i'}(x_0) b_{n_0 k_i}| \geqslant \varepsilon_{i_s} b_{n_0 k_{i_s}} \geqslant 1,$$

$\sum f_{p_i'}(x) b_{n_0 k_i}$ 在 $x = x_0$ 发散，从而在 B 上发散.

从发散级数 $\sum f_{p_i'}(x) b_{n_0 k_i} (x \in B)$ 除去第二因子 $b_{n_0 k_i}$ 而保留 $f_{p_i'}(x)$，将 $f_{p_i}(x)$ 依其顺序插入，得级数 $\sum f_{q_i}(x)$. 从此级数所作成的

$$\sigma_{n_0}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_{q_i}(x) b_{n_0 i} \quad (x \in B)$$

并不收敛，因此，$\sum f_{q_i}(x)$ 在 B 上不能用 $\|b_{nm}\|$ 求和.

第二种情况，有 n_0 使 $\lim\limits_{k\to\infty} \sup |b_{n_0 k}| < \infty$，则必有 k_i' 如下：

$$\lim_{i\to\infty} b_{n_0k'_i}=c\neq 0.$$

由卢金的一个定理，[0, 1] 有完全点集 P_k，在 P_k 上，一切 $f_{p'_i}(x)$ 具有连续性，并且

$$P_0\subset P_1\subset P_2\subset\cdots,\quad |P_k|>1-\frac{1}{k+1}=\frac{k}{k+1}.$$

置

$$B_k=1+\sum_{i=0}^{k}\max_{x\in P_k}|f_{p'_i}(x)|\quad (k=0,\ 1,\ 2,\cdots).$$

从 $\{k'_i\}$ 选出如下的子列 $\{k_i\}$：

$$k_i>1+k_{i-1},\quad |c-b_{n_0k_i}|<\frac{1}{2^iB_i}.$$

仿效第一种情况作成级数 $\sum f_{q_i}(x)$，在 k_i 的地方是 $f_{p'_i}(x)$；设 $f_{p_i}(x)$ 是在 r_i 的地方．由是

$$\begin{aligned}
&c\sum_{i=0}^{N}f_{q_i}(x)-\sum_{i=0}^{N}b_{n_0i}f_{q_i}(x)\\
&=\sum_{i=0}^{N}(c-b_{n_0i})f_{q_i}(x)\\
&=\sum_{i=0}^{N_1}cf_{p_i}(x)-\sum_{i=0}^{N_2}f_{p_i}(x)b_{n_0r_i}+\sum_{i=0}^{N_3}f_{p'_i}(x)(c-b_{n_0k_i})\\
&=S_N^{(1)}(x)+S_N^{(2)}(x)+S_N^{(3)}(x),
\end{aligned}$$

这里 N_1, N_2, N_3 都不大于 N，当 $N\to\infty$ 时，都趋向于 ∞，当 $N\to\infty$ 时，$S_N^{(1)}(x)$ 和 $S_N^{(2)}(x)$ 都几乎处处有一定的极限．至于 $S_N^{(3)}(x)$，当 $x\in P_k$ 时，它的绝对值是

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=0}^{N_3}f_{p'_i}(x)(c-b_{n_0k_i})\right| &\leqslant\sum_{i=0}^{N_3}|f_{p'_i}(x)|\cdot|c-b_{n_0k_i}|\\
&\leqslant\sum_{i=0}^{k-1}|f_{p'_i}(x)|\frac{1}{2^iB_i}\\
&\quad+\sum_{i=k}^{\infty}\frac{B_i}{2^iB_i}<\infty.
\end{aligned}$$

因此，$\sum_{i=0}^{\infty}f_{p'_i}(x)(c-b_{n_0k_i})$ 在 P_k 上收敛．从而 $\sum f_{p'_i}(x)b_{n_0k_i}$ 概散，级数 $\sum f_{q_i}(x)$ 概不能用 $\|b_{nm}\|$ 求和法求和．

第三种情况，$\lim\limits_{m\to\infty} b_{nm}=0(n=0, 1, 2, \cdots)$. 利用卢金定理，作$\{P_k\}$和数列$\{B_k\}$，如在第二种情况，由数学归纳法，作出数列$\{n_i\}$和$\{m_i\}$：当$n_0, n_1, \cdots, n_{k-1}$; $m_0, m_1, \cdots, m_{k-1}$已定时，取$n_k>n_{k-1}$适合于

$$|1-b_{nm}|<\frac{1}{2^k B_k} \quad (0\leqslant m\leqslant m_{k-1},\ n\geqslant n_k).$$

然后取$m_k>m_{k-1}+1$使

$$|b_{nm}|<\frac{1}{2^k B_k} \quad (0\leqslant n\leqslant n_k,\ m\geqslant m_k).$$

最后用下述方法作出$\sum f_{q_i}(x)$：在m_k的地方，取$f_{p'_k}(x)$，照$\{p_k\}$的顺序取$f_{p_k}(x)$. 平均值$\sigma_n(x)=\sum f_{q_i}(x)b_{ni}$几乎处处有意义. 特别对于$n=n_k(k=1, 2, \cdots)$，

$$\sigma_{n_k}(x)-\sum_{i=0}^{m_{k-1}} f_i(x)=o(1)+\sum_{i=0}^{\infty} f_{p'_i}(x)b_{n_k m_i}-\sum_{i=0}^{k-1} f_{p'_i}(x)$$

$$=S_1+S_2+o(1),$$

这里

$$|S_1(x)|=\left|\sum_{i=0}^{k-1} f_{p'_i}(x)(b_{n_k m_i}-1)\right|\leqslant\sum_{i=0}^{k-1}|f_{p'_i}(x)|\frac{1}{2^k B_k}\leqslant\frac{1}{2^k},$$

$$|S_2(x)|=\left|\sum_{i=k}^{\infty} f_{p'_i}(x)b_{n_k m_i}\right|\leqslant\sum_{i=k}^{\infty}|f_{p'_i}(x)||b_{n_k m_i}|$$

$$\leqslant\sum_{i=k}^{\infty} B_i\frac{1}{2^i B_i}=\frac{1}{2^{k-1}}.$$

由是，当$k\to\infty$时，几乎处处成立着

$$\sigma_{n_k}(x)-\sum_{i=0}^{k-1} f_{p'_i}(x)-F(x)=o(1).$$

但是，$\sum f_{p'_i}(x)$是一概散的级数，所以$\lim\sigma_{n_k}(x)$概不存在. 换句话说，$\sum f_{q_i}(x)$概不能用$\|b_{nm}\|$求和. 定理证明完毕.

现在讨论$f(x)\in L^p$, $0<p<2$的情况，详细地说：

定理 5 设 $f(x)\in L^p(0, 2\pi)$, $0<p<2$, $f(x)\overline{\in} L^2(0, 2\pi)$，则富理埃级数

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

的一个更序级数$\frac{a_0}{2}+\sum_{i=1}^{\infty}(a_{m_i}\cos m_ix+b_{m_i}\sin m_ix)$ 几乎处处不能用 $|b_{mn}|$求和法求和，这里 $\lim\limits_{n\to\infty} b_{nm}=1$, $\lim\limits_{m\to\infty} b_{nm}=0$.

【证明】 置 $a_n\cos nx+b_n\sin nx=\rho_n\cos(nx+x_n)$, $\rho_n\geqslant 0$. 假如级数

$$\sum(a_n\cos nx+b_n\sin nx)^2$$

在正测度的点集 E 上收敛，那末——可设 E 是闭的——级数在 E 上小于一个常数 M，由是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n^2\int_E\cos^2(nx+x_n)\,dx\leqslant M|E|.$$

第 n 项的积分趋近于 $\frac{1}{2}|E|$，所以 $\sum\rho_n^2<\infty$，有背于所设的条件:

$$\sum(a_n^2+b_n^2)=\infty\quad(f\in L^2).$$

利用拉特马吼的函数列，我们断言有 $\varepsilon_n=\pm1$ 使级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

概散. 现在将这个级数分成两个级数: $\varepsilon_{k'}=+1$ 的话,

$$\sum(a_{k'}\cos k'x+b_{k'}\sin k'x),$$

$\varepsilon_{k''}=-1$ 的一切项做成级数 $-\sum(a_{k''}\cos k''x+b_{k''}\sin k''x)$. 由下面的定理 6，从 $\sum(a_{k'}\cos k'x+b_{k'}\sin k'x)$ 和 $\sum(a_{k''}\cos k''x+b_{k''}\sin k''x)$ 两个概散级数，可以做成 $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ 的一个无界概散的更序级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{i=0}^{\infty}(a_{\nu_i}\cos\nu_ix+b_{\nu_i}\sin\nu_ix).$$

我们知道，无界概散级数 $\sum f_i(x)$ 对于任一$\|b_{nm}\|$，存在一个更序级数 $\sum f_{q_i}(x)$，概不能用$\|b_{nm}\|$求和. 这就完成了定理 5 的证明.

定理 6 设两个级数(都以可测的有限函数为项) $\sum f_n(x)$ 和 $\sum g_n(x)$分别在 $E\subset[0, 1]$和 $F\subset[0, 1]$上概散，则有混合级数

$$\sum(\varepsilon_nf_{p_n}(x)+\delta_ng_{q_n}(x))$$

$$(\varepsilon_n+\delta_n=1,\ \varepsilon_n\delta_n=0,\ p_n=\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n,\ q_n=\delta_1+\cdots+\delta_n)$$

在和集 $E+F$ 上概散.

【证明】 不妨假设 $E\cdot F=0$, $|E|>0$, $|F|>0$. 设 $E=E_1+E_2$, $F=F_1+F_2$. 在 E_1 和 F_1 上级数 $\sum f_n(x)$ 和 $\sum g_n(x)$ 分别无界发散, E_2 和 F_2 分别是 $\sum f_n(x)$ 和 $\sum g_n(x)$ 的有界发散点集. 在 E 和 F 上, 分别作 $\varphi(x)$ 和 $\gamma(x)$ 如下:

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & (x\in E_1),\\ \dfrac{1}{2}\left[\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(f_1(x)+\cdots+f_n(x))-\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(f_1(x)+\cdots+f_n(x))\right] & (x\in E_2),\end{cases}$$

$$\gamma(x)=\begin{cases}1 & (x\in F_1),\\ \dfrac{1}{2}\left[\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(g_1(x)+\cdots+g_n(x))-\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(g_1(x)+\cdots+g_n(x))\right] & (x\in F_2).\end{cases}$$

设 $\mathscr{E}_i$, $\mathscr{F}_i$ 分别是 E, F 中的完全点集, $\mathscr{E}_i\subset\mathscr{E}_{i+1}$, $\mathscr{F}_i\subset\mathscr{F}_{i+1}$,

$$|\mathscr{E}_i|>|E|-\frac{1}{i^2},\quad |\mathscr{F}_i|>|F|-\frac{1}{i^2};$$

在 $\mathscr{E}_i$ 上 $f_k(x)$ 和 $\varphi(x)$ 都是连续的, 在 $\mathscr{F}_i$ 上 $g_i(x)$ 和 $\gamma(x)$ 都是连续的;

$$m_i=\min_{x\in\mathscr{E}_i}\varphi(x),\quad \mu_i=\min_{x\in\mathscr{F}_i}\gamma(x)$$

的话, $m_i>0$, $\mu_i>0$. 设 $x_0\in\mathscr{E}_i$, 则必有如下的整数 $\bar{\alpha}_k^{(i)}(x_0)$ 和 $\bar{\beta}_k^{(i)}(x_0)$:

$$\bar{\alpha}_k^{(i)}<\bar{\beta}_k^{(i)},\quad \left|\sum_{\bar{\alpha}_k^{(i)}}^{\bar{\beta}_k^{(i)}}f_\nu(x_0)\right|>m_i.$$

当 $x_0\in\mathscr{F}_i$ 时, 同样可得

$$\bar{a}_k^{(i)}(x_0)<\bar{b}_k^{(i)}(x_0),\quad \left|\sum_{\bar{a}_k^{(i)}}^{\bar{b}_k^{(i)}}g_\nu(x_0)\right|>\mu_i.$$

上面两个不等式中的 $f_\nu(x_0)$ 和 $g_\nu(x_0)$ 可以用 $f_\nu(x)$ 和 $g_\nu(x)$ 来代, 但 x 是以 x_0 为中心的某一区间中的点. 由是可知存在如下的整数 α, β, a, b:

$$1<\alpha_1^{(1)}<\beta_1^{(1)}<\alpha_{i_1}^{(2)}<\beta_{i_1}^{(2)}<\alpha_{i_2}^{(1)}<\beta_{i_2}^{(1)}<\alpha_{i_2}^{(2)}<\beta_{i_2}^{(2)}$$
$$<\alpha_{i_2}^{(3)}<\beta_{i_2}^{(3)}<\alpha_{i_3}^{(1)}<\beta_{i_3}^{(1)}<\cdots,$$

以 a, b 代 α, β, 得到另一组整数. 从这些整数, 作成如下的混合级数:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{p=1}^{\alpha_1^{(1)}-1} f_p(x)+\sum_{p=\alpha_1^{(1)}}^{\beta_1^{(1)}} f_p(x)+\sum_{p=1}^{a_1^{(1)}-1} g_p(x) \\
&\qquad +\sum_{p=a_1^{(1)}}^{b_1^{(1)}} g_p(x)+\sum_{p=\beta_1^{(1)}+1}^{\alpha_{i_1}^{(2)}-1} f_p(x)+\sum_{p=\alpha_{i_1}^{(2)}}^{\beta_{i_1}^{(2)}} f_p(x) \\
&\qquad +\sum_{p=b_1^{(1)}}^{a_{j_1}^{(1)}-1} g_p(x)+\sum_{p=a_{j_1}^{(1)}}^{b_{j_1}^{(2)}} g_p(x)+\cdots,
\end{aligned}
$$

这就是所要的级数. 事实上,设 $\mathscr{E}_i\to\mathscr{E}$, $\mathscr{F}_i\to\mathscr{F}$, 则因 $E\cdot F=0$,

$$|\mathscr{E}|+|\mathscr{F}|=|\mathscr{E}+\mathscr{F}|=|E|+|F|.$$

当 $x_0\in\mathscr{E}$ 时, $x_0\in\mathscr{E}_i(i\geqslant i_0(x_0))$. 由上述,存在无数个的整数对 $\alpha(x_0)$, $\beta(x_0)$ 适合

$$\left|\sum_{\alpha(x_0)}^{\beta(x_0)} f_p(x_0)\right|>m_i.$$

由是可知: 混合级数在 $\mathscr{E}$ 上发散. 同样可证混合级数在 $\mathscr{F}$ 上发散. 定理证毕.

系 假如 $\sum(\alpha_n^2+\beta_n^2)=\infty$, 那末 $\sum(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)$ 的一个更序级数概不能用 $\|a_{nm}\|$ 求和法求和,但

$$a_{nm}=o(1)\quad(n\to\infty),\quad \lim_{n\to\infty}\sum a_{nm}=1.$$

9. 连续函数的富理埃级数的发散点集

富理埃级数 $\mathfrak{S}[f]$ 在 f 的连续点,有可能是发散的,早在十九世纪,就有人指出连续函数的富理埃级数的发散点集,是可以几乎处处稠密的(Du Bois Reymond, 1876).

定理 1 连续函数的富理埃级数的发散点集可以到处稠密.

【证明】 首先证明余弦多项式

$$C_n(r,\ x)=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\cos(r+\nu)x}{n+1-\nu}-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\cos(r+n+\nu)x}{\nu}$$

的绝对值小于 λ, λ 与 n, r, x 都无关系.

事实上,由于

$$C_n(r,\ x)=2\sin\left(r+n+\frac{1}{2}\right)x\cdot\left\{\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{3x}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\sin\frac{(2n+1)x}{2}\right\},$$

所以我们只要证明

$$\sin t+\frac{1}{2}\sin 3t+\cdots+\frac{1}{n}\sin(2n-1)t$$

关于 n 和 t 是均匀有界，从后者减去

$$2\left(\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\cdots+\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)t\right)\to\frac{\pi}{2}$$
$$(0<t<\pi)$$

得到

$$\frac{1}{1\cdot 2}\sin t+\frac{1}{3\cdot 4}\sin 3t+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n)}\sin(2n-1)t,$$

其绝对值小于1. 由是可知 $|C_n(r,\ x)|$ 小于一个绝对常数 λ.

置 $g_m=2^{m^2+1}$, 以下式定义 $A_n(g_1+\cdots+g_{m-1}<n<g_1+\cdots+g_m)$:

$$\sum_{n=g_1+g_2+\cdots+g_{m-1}+1}^{g_1+g_2+\cdots+g_m}A_n\cos nx=\frac{1}{m^2}C_{\frac{1}{2}g_m}(g_1+g_2+\cdots+g_{m-1},\ x).$$

由是可知，$\sum A_n\cos nx$ 是连续函数 $f(x)$ 的富理埃级数，$f(x)$ 是匀敛级数 $\sum\limits_2^\infty\{S_{g_1+\cdots+g_m}(x)-S_{g_1+\cdots+g_{m-1}}(x)\}+S_{g_1}(x)$ 的和. 但是，

$$S_{g_1+\cdots+g_{m-1}+\frac{1}{2}g_m}(0)=\frac{1}{m^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^{m^2}}\right)$$
$$>\frac{1}{m^2}\log 2^{m^3}>m\log 2,$$

$\sum A_n=\mathfrak{S}[f,\ 0]$ 发散.

现在考察如下的连续函数:

$$f(x)=\sum_{m=1}^\infty\sum_{n=g_1+g_2+\cdots+g_{m-1}+1}^{g_1+\cdots+g_m}A_n\cos nm!x$$
$$=\sum_{m=1}^\infty\frac{1}{m^2}C_{\frac{1}{2}g_m}(g_1+\cdots+g_{m-1},\ m!x).$$

当 $\frac{x}{\pi}$ 是有理数 $\frac{\mu}{\nu}$ 时，上述级数第 m 项的正系数部分，当 m 足够大时，

$$\frac{1}{m^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^{m^2}}\right)>m\log 2.$$

从而级数 $\sum\limits_m\sum\limits_n A_n\cos nmx$ 在点 $x=\frac{\mu}{\nu}\pi$ 发散，$f(x)$ 的富理埃级数的发散点集是稠密的．证明完毕．

现在讨论如下的问题：在连续函数 f 的无限发散点 x，部分和 $S_n(f, x)$ 可以有多大？换句话说，对于 $\lambda_n\to\infty$，存在连续函数 f，能适合 $S_n(f, x)>\lambda_n$ 吗？对于这个问题，我们证明

定理 2 设 $\lambda_n=o(\log n)$，则必有连续函数 f 使 $S_n(f, 0)>\lambda_n$ 对于无数个 n 成立．这里的 $\log n$ 不能改成更大(阶级)的数．

【证明】 我们利用下述引理来证明．

引理 设在区间 $[a, b]$ 上，函数 $y_n(t)$ 与任一连续函数 $x(t)$ 的乘积的积分

$$u_n(t)=\int_a^b x(t)y_n(t)dt$$

常成一有界数列，那末

$$\int_a^b |y_n(t)|dt=O(1).$$

固定 n，取连续函数 $f_n(t)$ 使在 $[0, \pi]$ 中，除开 $\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t$ 的变号点的附近，等于 $\operatorname{sign}\left[\left(\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\Big/\pi\sin\frac{t}{2}\right]$，并且使它适合

$$S_n(f_n, 0)=\int_0^\pi f_n(t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\pi\sin\frac{t}{2}}dt$$

$$>\frac{1}{2}\int_0^\pi\left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\pi\sin\frac{t}{2}}\right|dt,$$

最后的积分等价于 $\frac{1}{\pi}\log n$．因此，关系

$$S_n(f, 0)=O(\lambda_n)$$

不能对一切连续函数都成立，否则由引理，将有背于 $\lambda_n=o(\log n)$ 的假设．因此存在 f 如定理所述．

当 f 是有界时，$S_n(f, x)=O(\log n)$。这就完成了定理的证明。

所用的引理是泛函分析中巴拿赫-斯太因豪斯定理的特殊情况：设在巴拿赫空间 E 中，定义着有界线性泛函数叙列 $\{u_n(x)\}$。假如对于 E 中任一 x，$\|u_n(x)\|=O(1)$，那末有常数 M 适合于

$$\|u_n(x)\|\leqslant M\|x\| \quad (x\in E,\ n=1,\ 2,\ \cdots).$$

巴拿赫-斯太因豪斯定理，可以更一般地叙述于下。设 $\{u_n(x)\}$ 是在巴拿赫空间 E 中所定义的有界线性泛函数叙列，F 是 E 的一个第二类型的集（就是说 F 不可以写成可列无限个疏朗集的和）。假如对于 F 中任一点（函数）x，$\|u_n(x)\|=O(1)$，那末有常数 M 如上述。

现在于空间 $C_{2\pi}$ 上，定义线性泛函数

$$S_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}f(x_0+t)\,dt,$$

由于勒贝格常数的无界性，$C_{2\pi}$ 中除一第一类型的集 $\{f\}$，数列 $\{S_n(f)\}$ 是无界的。由是我们可述定理如下：

定理 3 从 $C_{2\pi}$ 除去一个第一类型的（函数）集，其中任一连续函数的富理埃级数在任一区间中存在发散点。

我们要问：连续函数 $f(x)$ 的 $\mathfrak{S}[f]$ 可以有正测度的点集吗？乌里雅诺夫证明了（УМН 1961）如下的事实：

定理 4 假如存在一个连续函数的富理埃级数，具有正测度的发散点集，那末亦必存在一个连续函数，它的富理埃级数几乎处处无界发散。

证明是利用下述引理的。

引理（孟孝夫） 任一周期（周期是 2π）连续函数 $f(x)$ 可以写成如下的两个周期连续函数 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的和——$f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$，使部分和 $\{S_n(\varphi, x)\}$ 与 $\{S_n(\psi, x)\}$ 有子列 $\{S_{n_k}(\varphi, x)\}$ 与 $\{S_{n_k}(\psi, x)\}$，分别匀敛于 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$。（详见 1944 年的 M. сб. 15.）

【证明】 由于 $\mathfrak{S}[f]$ 在一正测度的点集 U 上发散，所以我们不妨假设 $\mathfrak{S}[\varphi]=\sum(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 在正测度的 U 的子集 U_1 上发散。

从§8的定理6的证明，我们可得如下的结果：U_1中有正测度的子集E，正数η，正整数p_k和q_k（$p_1<q_1<p_2<\cdots<p_k<q_k<\cdots$），当$x_0\in E$时，$[p_k, q_k]$中有$\alpha_k(x_0)$和$\beta_k(x_0)$适合

$$p_k\leqslant\alpha_k(x_0)\leqslant\beta_k(x_0)\leqslant q_k,$$

$$\left|\sum_{p=\alpha_k(x_0)}^{\beta_k(x_0)}(a_p\cos px_0+b_p\sin px_0)\right|\geqslant\eta\quad(k=1,\ 2,\ \cdots).$$

对于正整数α，存在m_0，当$i>j\geqslant m_0$时，成立着

$$|S_{n_i}(\varphi,\ x)-S_{n_j}(\varphi,\ x)|<\frac{1}{2^\alpha}\quad(-\infty<x<+\infty).$$

取$i_\alpha>j_\alpha\geqslant m_0$使有$p_{k_\alpha}$与$q_{k_\alpha}$落入$n_{j_\alpha}\leqslant p_{k_\alpha}\leqslant q_{k_\alpha}\leqslant n_{i_\alpha}$. 不妨假设$n_{j_{\alpha+1}}>n_{i_\alpha}(\alpha=1,\ 2,\ \cdots)$；置

$$T_\alpha(x)=\sum_{p=n_{j_\alpha+1}}^{n_{i_\alpha}}(a_p\cos px+b_p\sin px)\quad(\alpha=1,\ 2,\ \cdots),$$

则$|T_\alpha(x)|<\frac{1}{2^\alpha}(\alpha=1,\ 2,\ \cdots)$. 当$\alpha_1\neq\alpha_2$时，$T_{\alpha_1}(x)$与$T_{\alpha_2}(x)$没有重复的项. 因此，当$x_0\in E$时，有$p'$, p''如下：

$$n_{j_\alpha}<p'(x_0)\leqslant p''(x_0)\leqslant n_{i_\alpha},\quad\left|\sum_{p=p'}^{p''}(a_p\cos px_0+b_p\sin px_0)\right|>\eta.$$

设N_α是一正整数，$x=N_\alpha t$；$E\subset[0,\ 2\pi]$的话，E变成E_α，

$$|E_\alpha|=\frac{1}{N_\alpha}|E|.$$

现在将E_α开拓成具有周期性的集$\bar{E}_\alpha$：即当$t\in E_\alpha$时，

$$t+\frac{2k\pi}{N_\alpha}\quad(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

都属于$\bar{E}_\alpha$. 取N_α适合

$$N_{\alpha-1}n_{i_{\alpha-1}}<N_\alpha n_{j_\alpha}<N_\alpha n_{i_\alpha}\quad(\alpha>1),\quad N_\alpha\uparrow\infty\quad(\alpha\to\infty).$$

那末$(-\infty,\ \infty)$中除开一零集，任何t属于无数个$\bar{E}_\alpha$.

将级数$\sum_{\alpha=1}^{\infty}\alpha T_\alpha(N_\alpha t)$中一切项都展成三角多项式，由于并无并项之事，所以得到一个三角级数$\sum(\alpha_k\cos kt+\beta_k\sin kt)$. 但是从$\sum\alpha|T_\alpha(N_\alpha t)|<\sum\alpha2^{-\alpha}$，知道这个三角级数是一连续函数$g(t)$的富

理埃级数 $\mathfrak{S}[g]$. 另一方面，从上面“$>\eta$”的不等式，$\mathfrak{S}[g]$几乎处处无界发散. 定理证明完毕.

由是可述如下的结果：

定理 5 除非一切连续函数的富理埃级数都是概收敛，必有连续函数，它的富理埃级数几乎处处无界发散.

问题 我们要问定理 4 能否拓广到直交函数级数？具体地说，设 $\{\varphi_n(x)\}$在$[0, 1]$上是一就范的直交函数系，$\sum a_n^2<\infty$. 假如 $\sum a_n\varphi_n(x)$ 在一个正测度的点集 $E\subset[0, 1]$ 发散，是否存在一个概散的级数 $\sum b_n\varphi_n(x)$？但 $\sum b_n^2<\infty$.

一般地说，从所设条件，不能得到概散的 $\sum b_n\varphi_n(x)$. 例如从具有周期 1 的哈尔直交函数列 $\chi_m(x)$ $(m=1, 2, \cdots; 0\leqslant x\leqslant 1)$，可以作成如下的概散级数 $\sum c_m\chi_{p_m}(x)$，$\sum c_m^2<\infty$(§ 6 定理 3). 在$[0, 1]$上，现在作出就范的直交函数系 $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$，$\cdots$: 在$\left[0, \frac{1}{2}\right]$上，设

$$\varphi_{2m}(x)=\varphi_{2m-1}(x)=\chi_{p_m}(x);$$

在$\left(\frac{1}{2}, 1\right]$上，设 $\varphi_{2m}(x)=-\varphi_{2m-1}(x)=\chi_{p_m}\left(\frac{1}{2}x\right)$. 我们见到(哈尔级数的性质)：当 $\sum d_m^2<\infty$ 时，级数 $\sum d_m\varphi_m(x)$ 在$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$上概敛，假如

$$d_{2m-1}=0, \quad d_{2m}=c_m,$$

那末 $\sum d_m\varphi_m(x)$ $(\sum d_m^2<\infty)$ 在$\left(0, \frac{1}{2}\right)$上概散.

10. 从函数 $f(x)\in L(0, 2\pi)$ 产生的几个特殊积分

设 $f(x+2\pi)\equiv f(x)\in L(0, 2\pi)$. 我们考虑如下几个特殊积分：

$$\int_{+0}^{\pi}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}dt, \quad \int_{+0}^{\pi}\frac{|f(x+t)-f(x-t)|}{t}dt,$$

$$\int_{+0}^{\pi}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}dt, \quad \int_{+0}^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}dt.$$

设 $0<\varepsilon<\pi$，置 $\sigma_\varepsilon(x)\equiv\sigma_\varepsilon(f, x)=\int_{\varepsilon}^{\pi}\{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)\}\frac{dt}{t}$. 当 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\sigma_\varepsilon(x)$存在时，$\sigma_{+0}(x)$就是上列四个积分的最后一个. 早在 1925

年，哈戴和立脱尔伍德举例指出：存在连续函数 $f(x)$，使 $\sigma_{+0}(x)$概不存在. 乌里雅诺夫于1959年的莫斯科大学学报上证得如下的

定理 1 $C_{2\pi}$ 中有 $f(x)$，$\mathfrak{S}[f, x]$ 匀敛于 $f(x)$ 而无一点 x 使 $\sigma_+(f, x)$存在.

首先叙述一个明显的事实作为

引理 设 $t<0$，$x\in[a, b]$，$b_{n,t}(x)$是均匀有界，当 $t\to\infty$ 时，$b_{n,t}(x)$匀敛于 $b_n(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$，则对于正项收敛级数 $\sum a_n$，成立着

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_{n,t}(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n(x)\equiv S(x).$$

记左端的级数为 $S_t(x)$，当 $t\to\infty$ 时，$S_t(x)$ 匀敛于 $S(x)$.

事实上，于

$$\begin{aligned}&\left|\sum a_n b_n(x)-\sum a_n b_{n,t}(x)\right|\\ &\qquad\leqslant\sum_1^N a_n\left|b_n(x)-b_{n,t}(x)\right|+2\sum_{N+1}^{\infty} a_n B\quad(B\geqslant|b_n(x)|),\end{aligned}$$

令 $t\to\infty$，然后使 $N\to\infty$，就得到 $\lim S_t(x)\to S(x)$.

其次我们还要利用下述函数 $f(x)\equiv f(x+2\pi)$：

$$f(x)=\begin{cases}\left|\log\dfrac{x}{2\pi}\right|^{-\frac{1}{2}} & \left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{2\pi}{3},\ \text{这里 }\log t=\log_2 t\right),\\ f\left(\dfrac{4\pi}{3}-x\right) & \left(\dfrac{2\pi}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{4\pi}{3}\right),\\ af\left(x-\dfrac{4\pi}{3}\right) & \left(\dfrac{4\pi}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{10\pi}{6}\right),\\ af\left(\dfrac{10\pi}{3}-x\right) & \left(\dfrac{10\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2\pi\right),\end{cases}$$

其中的 a，从$\int_0^{2\pi} f(x)dx=0$ 决定. 容易证明：当 $\dfrac{2\pi}{n^2}\leqslant h(n, x)\leqslant\dfrac{2\pi}{n}$ 时，存在正的常数 C_1 适合(参见 Kaczmarz, Studia M., 1931)

$$\begin{aligned}|J_n(x)|&=\left|\int_{h(n,x)}^{\pi}\{f(n(n+t))+f(n(x-t))-2f(nx)\}\frac{dt}{t}\right|\\ &\geqslant C_1\log n.\end{aligned}$$

一般地说，$\mathfrak{S}[g]$的部分和$S_n \equiv S_n(g, x)$与费耶和$\sigma_n \equiv \sigma_n(g, x)$之间存在等式

$$S_n + S_{n+1} + \cdots + S_{2n-1} = 2n\sigma_{2n} - n\sigma_n.$$

记左端为$V_n \equiv V_n(x) \equiv V_n(g, x)$，那末$|V_n| \leqslant 3\max|g(x)|$，$g(x) \in C_{2\pi}$的话. 由是,假如$T_n(x)$是最逼近于$g(x)$的$n$阶三角多项式:

$$\max|g(x) - T_n(x)| = E_n(g),$$

那末从$V_n(T_n) = T_n$和

$$V_n(g - T_n, x) \leqslant 3\max|g(x) - T_n(x)| = 3E_n$$

得到$|V_n(g(x), x) - T_n(x)| \leqslant 3E_n$. 因此

$$|V_n(g(x), x) - g(x)| \leqslant 4E_n.$$

另一方面,我们知道$E_n = O\left[\omega\left(g, \frac{1}{n}\right)\right]$. 将此结果与上式相结合而应用于$f(x)$：由于$\omega\left(g, \frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\log n}}\right)$,所以

$$V_n(f(x), x) - f(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\log n}}\right).$$

有界变差函数$f(x)$的$S_n(f, x)$，其绝对值不大于一个常数B. 由于

$$S_k(S_m(f, x), x) = S_{\min(k, m)}(f, x), \quad |V_n(f, x)| \leqslant B,$$

所以

$$S_k(V_n, x) = \frac{1}{n}\{S_k(S_n) + S_k(S_{n+1}) + \cdots + S_k(S_{2n-1})\}$$

的绝对值不大于

$$nB/n = B.$$

这就是说，$|S_k(V_n(f))| \leqslant B$. 以$mx$为变数,我们见到

$$|S_k(V_n(f, mx), x)| \leqslant B.$$

由于$h(n, x) \in \left(\frac{2\pi}{n^2}, \frac{2\pi}{n}\right)$，$V_n(f) - f = O\left(\frac{1}{\sqrt{\log n}}\right)$，所以，当$\alpha$为正整数时,简写$V_{n^\alpha}(x) = V_{n^\alpha}(f, x)$，积分

$$J_{n,x}=\int_{h(n,x)}^{\pi}\{f(n(x+t))+f(n(x-t))-2f(nx)$$

$$-V_{n^\alpha}(n(x+t))-V_{n^\alpha}(n(x-t))-2V_{n^\alpha}(nx)\}\frac{dt}{t}$$

的绝对值小于

$$\int_{h(n,x)}^{\pi}\frac{3\times 4E_{n^\alpha}(f)}{t}dt<\frac{C_2}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\log n}\quad(C_2,\ C_3,\ \cdots\text{都是常数})。$$

取适当大的 α, 我们得到

$$|J_{n,x}|<\frac{C_1}{2}\sqrt{\log n}.$$

将此不等式与 $|J_1(x)|>C_1\sqrt{\log n}$ 相结合, 我们见到

$$\left|\int_{h(n,x)}^{\pi}\frac{V_{n^\alpha}(n(x+t))+V_{n^\alpha}(n(x-t))-2V_{n^\alpha}(nx)}{t}dt\right|$$

$$>\frac{C_1}{2}\sqrt{\log n}.$$

将 2×2, 2×3, $\cdots$, $2\times i$ 作为 2^3 的"指数", 置

$$b_i=2^{3^{\cdot^{\cdot^{2i}}}},\quad n_i=2^{b_i^4},\quad a_i=\frac{1}{b_i}.$$

我们证明 $F(x)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_iV_{n_i^\alpha}(n_ix)$ 适合定理 1 的要求.

由于 $$S_k(S_m(f),\ x)=S_{\min(k,m)}(f,\ x),$$

所以 $\mathfrak{S}[F(x)]$ 的部分和

$$S_k(F,\ x)=\sum_{i=1}^{\infty}a_iS_k(V_{n_i^\alpha}(n_ix),\ x)$$

收于 $F(x)$. 现在考虑积分 $J_n(x)$. 当 $n=n_i$ 时, $J_n(x)$ 等于

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k\int_{h(n_i,x)}^{\pi}\frac{V_{n_k^\alpha}(n_k(x+t))+V_{n_k^\alpha}(n_k(x-t))-2V_{n_k^\alpha}(n_kx)}{t}dt$$

$$\geqslant a_i\left|\int_{h(n_i,x)}^{\pi}\{V_{n_i^\alpha}(n_i(x+t))+V_{n_i^\alpha}(n_i(x-t))\right.$$

$$\left.-2V_{n_i^\alpha}(n_ix)\}\frac{dt}{t}\right|-\left|\sum_{k=1}^{i-1}+\sum_{k=i+1}^{\infty}\right|.$$

从贝恩斯坦的不等式 $|T_n'(x)|\leqslant n\max|T_n(x)|$,

$$|V_{n^\alpha}'(x)|\leqslant C_3n^\alpha.$$

因 $\sum_{1}^{i-1}$ 中的一般项的绝对值不大于 $2C_3 n_k^{\alpha} n_k \pi = C_4 n_k^{\alpha+1}$. 由是

$$|J_{n_i}(x)| \geqslant \frac{C_1}{2} a_i \sqrt{\log n_i} - C_4 \sum_{k=1}^{i-1} a_k n_k^{\alpha+1} - C_5 \log n_i \sum_{k=i+1}^{\infty} a_k$$

$$= b_i \left\{ \frac{C_1}{2} - C_4 \frac{n_{i-1}^{\alpha+1}}{b_i} \sum_{k=1}^{i-1} a_k \left(\frac{n_k}{n_{i-1}} \right)^{\alpha+1} \right.$$

$$\left. - C_5 \frac{b_i^4}{b_i} a_{i+1} \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{a_k}{a_{i+1}} \right\}$$

$$> b_i \left[\frac{C_1}{2} - C_6 \frac{n_{i-1}^{\alpha+1}}{b_i} - C_7 \frac{b_i^3}{b_{i+1}} \right].$$

易证 $b_i^3/b_{i+1} \to 0$, $n_{i-1}^{\alpha+1}/b_i \to 0$; 因此 $|J_{n_i}(x)| \to \infty$. 定理证明完毕.

积分 $\sigma_{+0}(f, x)$ 和级数 $S(x)$: $\sum_{1}^{\infty} [f(x) - S_k(f, x)]/k$ 是有联系的. 首先考虑级数 $S^* = \sum [f(x) - S_k^*(f, x)]/k$, 这里

$$S_k^*(f, x) = S_k(f, x) - \frac{1}{2} A_k(x), \quad f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{1}^{\infty} A_k(x).$$

记级数 $\sum (\sin \nu x)/\nu$ 的开始 n 项的和为 $U_n(x)$, 而以 $S_n^*(x)$ 表示级数 $S(x)$的开始 n 项的和, 我们见到

$$S_n^*(x) = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \right) \frac{-\varphi_x(t) U_n(t)}{2 \sin \frac{t}{2}} dt.$$

由于 $\frac{\pi - x}{2} - U_n(x) = O\left(\frac{1}{nx} \right)$, $|U_n(x)| \leqslant nx$ $(0 < x < \pi)$, 所以在 f 的勒贝格点 x, 成立着

$$S_n^*(x) - \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \frac{\varphi_x(t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \frac{\pi - t}{2} dt = o(1).$$

换句话说: 在 f 的勒贝格点 x, 级数 $S^*(x)$ 收敛的充要条件是积分

$$\int_{+0}^{\pi} \frac{\varphi_x(t)}{t} dt$$

的存在. 假如 $f \in L^p(0, 2\pi)$, $p > 1$, 那末

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{|a_k| + |b_k|}{k} < \infty,$$

这里 $\{a_k, b_k\}$ 是 f 的系数. 由是可知: 当 $f \in L^p(0, 2\pi)$ $(p > 1)$时, 在 f

的勒贝格点，积分 $\sigma_{+0}(x)$ 的存在等价于级数 $S(x)$ 的收敛．由定理 1，我们可述

定理 2　连续函数族 $C_{2\pi}$ 中有 f，$\mathfrak{S}[f]$ 匀敛于 f，但是没有 x 使级数 $\sum(S_n(f,\ x)-f(x))/n$ 收敛．

现在证明如下的

定理 3　$C_{2\pi}$ 中存在 f 与其共轭函数 $\bar{f}$，使两个积分

$$\int_{+0}^{\pi}\{f(x+t)-f(x-t)\}\frac{dt}{t}$$

和

$$\int_{+0}^{\pi}\{\bar{f}(x+t)-\bar{f}(x-t)\}\frac{dt}{t}$$

到处存在而无一点 x 使这些积分（任何一个）依勒贝格的意义存在．并且 f 和 $\bar{f}$ 的富理埃级数都是匀敛的．

【证明】　设 $g(x)=\cos x+\sin x+\cos 2x+\sin 2x$．我们证明连续函数 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}g(2^{(n!)^3}x)/n!$ 满足定理的一切要求．

设 $0<h<H\leqslant\pi$，则当 n 是一正整数时，积分

$$J_n(h,\ H)=\int_h^H[g(nx+nt)-g(nx-nt)]\frac{dt}{t}$$

的绝对值——注意到恒等式

$$\begin{aligned}&g(x+t)-g(x-t)\\&\quad=\sqrt{2}\left\{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin t+\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)\sin 2t\right\}\end{aligned}$$

——等于

$$\begin{aligned}&\left|\sqrt{2}\int_{nh}^{nH}\left\{\sin\left(\frac{\pi}{4}-nx\right)\sin u+\sin\left(\frac{\pi}{4}-2nx\right)\sin 2u\right\}\frac{du}{u}\right|\\&\quad\leqslant\sqrt{2}\left|\int_{nh}^{nH}\frac{\sin u}{u}du\right|+\sqrt{2}\left|\int_{nh}^{nH}\frac{\sin 2u}{u}du\right|.\end{aligned}$$

由是，$J_n(h,\ H)$ 对于 $h,\ H,\ n$ 以及 x 是均匀有界．因此，积分

$$\int_h^{\pi}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}J_{2^{(n!)^3}}(h,\ \pi)$$

当 $h\to+0$ 时，到处存在．另一方面，从

$$\bar{f}(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{+0}^{\pi}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}dt$$

$$=-\frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{+0}^{\pi}\frac{g(2^{(n!)^2}(x+t))-g(2^{(n!)^2}(x-t))}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}dt$$

得到 $\bar{f}(x)=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n!}\bar{g}(2^{(n!)^2}x)$. 由是可知极限

$$\lim_{b\to+0}\int_{b}^{\pi}\frac{\bar{f}(x+t)-\bar{f}(x-t)}{t}dt$$

到处存在.

由 $g(t)$ 的周期性, 我们见到, 当 n 是偶数时,

$$\int_{+0}^{\pi}\frac{|g(nx+nt)-g(nx-nt)|}{t}dt$$

$$=\int_{+0}^{n\pi}\frac{|g(nx+t)-g(nx-t)|}{t}dt$$

$$=\int_{+0}^{2\pi}|g(nx+t)-g(nx-t)|$$

$$\times\left[\frac{1}{t}+\frac{1}{t+2\pi}+\frac{1}{t+4\pi}+\cdots+\frac{1}{t+n\pi}\right]dt$$

$$>\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)$$

$$\times\int_{+0}^{2\pi}|g(nx+t)-g(nx-t)|dt$$

$$>A\log n,$$

A 是一正的常数. 事实上, $g(x+t)-g(x-t)\neq 0$ (固定任一 x). 由是 $|f(x+t)-f(x-t)|/t$ 在 $[2^{-(n!)^2},\pi]$ 上的积分大于

$$\frac{1}{n!}\int_{2^{-(n!)^2}}^{\pi}\frac{|g(2^{(n!)^2}(x+t))-g(2^{(n!)^2}(x-t))|}{t}dt$$

$$-\left(\sum_{k=1}^{n-1}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\right)\int_{2^{-(n!)^2}}^{\pi}\frac{|g(2^{(k!)^2}(x+t))-g(2^{(k!)^2}(x-t))|}{k!\,t}dt$$

$$>\frac{1}{n!}A\log 2^{(n!)^2}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{A'}{k!}\log 2^{(k!)^2}-\sum_{k=n+1}^{\infty}\int_{2^{-(n!)^2}}^{\pi}\frac{2dt}{k!\,t}$$

$$>An!+o(n!).$$

从而积分$\int_{+0}^{\pi}|f(x+t)-f(x-t)|\frac{dt}{t}$到处不存在. 同样可证

$$\int_{+0}^{\pi}\frac{|\bar{f}(x+t)-\bar{f}(x-t)|}{t}dt=\infty.$$

最后从

$$\lim_{n\to\infty}S_n(f, x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\lim_{n\to\infty}S_n(g(2^{(k!)^3}x), x)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}g(2^{(k!)^3}x)$$

断言f的富理埃级数匀敛于$f(x)$. 同样$\mathfrak{S}[\bar{f}]$匀敛于$\bar{f}$. 定理证毕.

11. 部分和趋向于无穷大的问题

设$S_n(f, x)$是$\mathfrak{S}[f, x]$的部分和, E是一正测度的点集. 关系$S_n(f, x)\to+\infty$在E上是否有成立的可能? 这个问题至今尚未见解决. 孟孝夫于1947年证明: $S_n(f, x)$在E有可能"度量收敛"于$+\infty$. 从这个结果,似乎$S_n(f, x)\to+\infty(x\in E)$可能成立. 但是某些直交函数级数决不可能在一正测度的点集上趋向于$+\infty$. 下面将详细说明这个事实.

首先说明哈尔(Haar)的函数系. 写着$\chi_0^{(0)}(x)\equiv1$, $\chi_0^{(1)}(x)$在$\left[0, \frac{1}{2}\right)$上等于1, 在$\left(\frac{1}{2}, 1\right]$上等于$-1$, $\chi_0^{(1)}\left(\frac{1}{2}\right)=0$; 当$n>0$时, 对于$k=1, 2, \cdots, 2^n$, 定义

$$\chi_n^{(k)}(x)=\sqrt{2^n}\left(\frac{2k-2}{2^{n+1}}<x<\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right),$$

$$\chi_n^{(k)}(x)=-\sqrt{2^n}\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}<x<\frac{2k}{2^{n+1}}\right),$$

在$[0, 1]$中其余的点x, $\chi_n^{(k)}(x)=0$. 哈尔的直交函数系$\{\chi_m(x)\}$是在$[0, 1]$上作成的: $\chi_1(x)=\chi_0^{(0)}(x)$, $\chi_m(x)=\chi_n^{(k)}(x)\ (m=2^n+k>1)$.

任何自然数n总可写成$n=a_02^0+a_12^1+\cdots+a_m2^m$, 这里$a_k(a_k-1)=0$. 现在置

$$W_0(x)=\operatorname{sgn}\sin(2\pi x)=\chi_0^{(0)}(x),$$
$$W_1(x)=\operatorname{sgn}\sin(2^2\pi x)=\chi_0^{(1)}(x),$$
$$W_n(x)=\prod_{k=0}^{m}[\operatorname{sgn}\sin(2^{k+1}\pi x)]^{\alpha_k},\quad n=\sum_0^m \alpha_k 2^k \text{ 的话,}$$

这里 $\operatorname{sgn}\sin(2^{n+1}\pi x)$ $(n=0, 1, \cdots)$ 是拉特马吼 (Rademacher) 的函数系，$W_n(t)$ $(n=0, 1, \cdots)$是瓦尔许(Walsh)的函数系，它们都是$[0, 1]$上的直交系. 从上面的定义容易明白：当 $m=2^n+k(0\leqslant k<2^n)$ 时，$W_n(x)$是 $\chi_n^{(1)}(x)$, $\chi_n^{(2)}(x)$, $\cdots$, $\chi_n^{(2^n)}(x)$的一次形式. 由是，瓦尔许函数级数 $a_0W_0(x)+\cdots$，把它写成

$$a_0W_0(x)+a_1W_1(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}a_kW_k(x)$$

时，它是与 $a_0\chi_0^{(0)}(x)+a_1\chi_1^{(1)}(x)+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{2^n}c_k\chi_n^{(k)}(x)$ 相符合的，这里的 c_k 是常数.

下述定理 1 和定理 2 是打拉良 (A. A. Талалян) 和阿鲁秋仰(Арутюнян)于 1965 年的数学汇刊(M. сб. 66)上发表的.

定理 1 任一哈尔级数 $\sum a_n\chi_n(x)$不能在一正测度的点集上趋向于$+\infty$，就是说，$\sum\limits_1^n a_\nu\chi_\nu(x)\to+\infty(x\in E,\ |E|>0)$.

定理 2 任一瓦尔许级数 $\sum a_nW_n(x)$不能在一正测度的点集上趋向于$+\infty$.

定理 2 可从定理 1 导出：如 $\sum(a_{2^n}W_{2^n}(x)+\cdots+a_{2^{n+1}-1}W_{2^{n+1}-1}(x))$ 在正测度的点集 E 上趋向于$+\infty$，那末存在$\sum(c_1^{(n)}\chi_n^{(1)}(x)+\cdots+c_{2^n}^{(n)}\chi_n^{(2^n)}(x))$，它在 E 上趋向于 $+\infty$，这是与定理 1 相冲突的. 因此我们只要证明定理 1.

【定理 1 的证明】 置 $S_n(x)=a_1\chi_1(x)+\cdots+a_n\chi_n(x)$. 假如 $S_n(x)\to+\infty(x\in E,\ |E|>0)$，那末 E 中必有正测度的疏朗闭子集 F，在 F 上，$S_n(x)\geqslant M$，$M\geqslant0$. 从 $\{\chi_n(x)\}$ 除去在 F 上概等于零的 $\chi_n(x)$，余下的$\{\chi_{n_k}(x)\}$的任一 $\chi_{n_k}(x)$ 在 F 的某一正测度的点集上不等于零. 这样，我们得到子级数 $\sum a_{n_k}\chi_{n_k}(x)$ 在 F_0 上均匀地趋向于 $+\infty$，$F_0\subset F$，$|F_0|=|F|$，部分和

$$\overline{S}_k(x)=a_{n_1}\chi_{n_1}(x)+\cdots+a_{n_k}\chi_{n_k}(x)$$

在 F_0 上不取负值，当然我们可以假设 $a_{n_k}\neq 0$. 设 $\chi_n(x)$ 取负值的区间是 Δ_n^-. 记适合于 $|F_0\Delta_{n_k}^-|=0$ 的最小的 k 为 i_1. 除开 $\Delta_{n_{i_1}}^-$, 适合 $|F_0\Delta_{n_k}^-|=0$ 的最小的 k 为 i_2, 这样做去，得到一列自然数:

$$i_1<i_2<i_3<\cdots<i_j<\cdots.$$

这就是说，除开 $\Delta_{n_{i_1}}^-$, …, $\Delta_{n_{i_{j-1}}}^-$, 使 $|F_0\Delta_{n_k}^-|=0$ 的最小 k 为 i_j. 下述 1° 和 2° 是值得留意的:

1° 由于 $\Delta_{n_{i_1}}^-$, $\Delta_{n_{i_2}}^-$, …中任何两区间不相重迭，所以 $\sum|\Delta_{n_{i_j}}^-|<1$.

2° 假如 $k\overline{\in}\{i_j\}$, 那末 $|F_0\Delta_{n_j}^-|>0$.

由 1°, 存在 j_0 使得

$$\sum_{j=j_0+1}^{\infty}|\Delta_{n_{i_j}}^-|<\frac{|F_0|}{4}.$$

设 $\chi_n(x)$ 在 Δ_n^+ 上取正值，$\Delta_n=\Delta_n^++\Delta_n^-$, 则因 $|\Delta_n^+|=|\Delta_n^-|$, 成立着

$$\sum_{j=j_0+1}^{\infty}|\Delta_{n_{i_j}}|<\frac{1}{2}|F_0|.$$

$a_{n_k}\chi_{m_k}(x)\ (k\neq i_j)$ 在 $\{\Delta_{n_{i_j}}\}$ 外面，其值为零，将这些项从 $\sum a_{n_k}\chi_{n_k}(x)$ 除去，余下的项组成级数 $\sum a_{m_k}\chi_{m_k}(x)$, 被除去的函数在点集 F_0' 上等于零，$|F_0'|>\frac{1}{2}|F_0|$. 在点集 F_0' 上，$\overline{S}_k'(x)=\sum_{i=1}^{k}a_{m_i}\chi_{m_i}(x)$ 均匀地趋向于 $+\infty$. 如果我们能证: 存在常数 M_0 适合

$$\overline{S}_k'(x)\geqslant M_0\quad(x\in[0,1]),$$

那末，当 $n\to\infty$ 时，我们见到

$$\int_0^1\overline{S}_n'(x)\,dx=\left(\int_{[0,1]-F_0'}+\int_{F_0'}\right)\overline{S}_n'(x)dx\to+\infty.$$

这是与下面的事实不相容的:

$$\int_0^1\overline{S}_n'(x)\,dx=\int_0^1 a_{m_1}\chi_{m_1}(x)\,dx$$

$$=\int_0^1 a_1\chi_1(x)dx=a_1\quad(n=1,2,\cdots).$$

因此，定理 1 的证明归结于证明上述 M_0 的存在.

函数 $a_{m_j}\chi_{m_j}(x)$ 在 $\Delta_{m_j}^-$ 的内部取负的常数 M_j, 我们证明

$$M_0=\min(M_1,\ M_2,\ \cdots,\ M_{j_0})$$

适合上面的要求．首先我们见到

$$\bar{S}_1(x)=a_{m_1}\chi_{m_1}(x)=a_1\geqslant 0\quad(x\in[0,\ 1]).$$

当 $1<m_{k-1}<n_{i_1}$ 时，假如 $\bar{S}_{k-1}(x)\geqslant 0$ 在 $[0,\ 1]$ 上成立，那末 $m_k<n_{i_1}$ 的话，我们要证 $\bar{S}_k(x)\geqslant 0$ 在 $[0,\ 1]$ 上也成立．由于，当 $x\overline{\in}\Delta_{m_k}$ 时，$\bar{S}_k(x)=\bar{S}_{k-1}(x)$，又当 $x\in\Delta^+_{m_k}$ 时，$\bar{S}_k(x)>\bar{S}_{k-1}(x)$，所以我们只要证明 $\bar{S}_k(x)\geqslant 0$ 在 $\Delta^-_{m_k}$ 上成立，就得到 $\bar{S}_k(x)\geqslant 0$ 在 $[0,\ 1]$ 上成立的结果了．假如 $m_k<n_{i_1}$，那末由于 $|F_0\Delta^-_{m_k}|>0$，所以 $\bar{S}_k(x)\equiv\bar{S}_k(x)$，从而 $\bar{S}_k(x)\geqslant 0$ $(x\in\Delta^-_{m_k})$．假如 $m_k=n_{i_1}$，那末 $x\overline{\in}\Delta^-_{m_k}$ 的话，$\bar{S}_k(x)\geqslant 0$; $x\in\Delta^-_{m_k}$ 的话，

$$\bar{S}_k(x)\geqslant M_1\geqslant M_0.$$

由是可知：当 $m_k\leqslant n_{i_1}$ 时，$\bar{S}_k(x)\geqslant M_0$ 在 $[0,\ 1]$ 上成立．

现设对于 $(1,\ j_0)$ 中的某一 j，当 $m_k\leqslant n_{i_{j-1}}$ 时，$\bar{S}_k(x)\geqslant M_0$ $(x\in[0,\ 1])$；当 $x\overline{\in}\Delta^-_{n_{i_1}}+\cdots+\Delta^-_{n_{i_{j-1}}}$ 时，$\bar{S}_{n_{j-1}}(x)\geqslant 0$．我们考虑在 $n_{i_{j-1}}<m_l<n_{i_j}$ 情况下的 $\bar{S}_l(x)$：我们见到，$|F_0\Delta^-_{m_l}|>0$，$a_{m_l}\chi_{m_l}(x)=0$ $(x\in\Delta^-_{n_{i_1}}+\cdots+\Delta^-_{n_{i_{j-1}}})$．当 $x\overline{\in}\Delta^-_{m_l}$ 时，$a_{m_l}\chi_{m_l}(x)\geqslant 0$，从而当 $x\overline{\in}\Delta^-_{n_{i_1}}+\cdots+\Delta^-_{n_{i_{j-1}}}+\Delta^-_{m_l}$ 时，

$$\bar{S}_l(x)=\bar{S}_{l-1}(x)+a_{m_l}\chi_{m_l}(x)\geqslant 0.$$

但是在 $\Delta^-_{m_l}$ 上，$\bar{S}_l(x)\geqslant 0$，从而当 $x\overline{\in}\Delta^-_{n_{i_1}}+\cdots+\Delta^-_{n_{i_{j-1}}}$ 时，$\bar{S}_l(x)\geqslant 0$．由是

$$\bar{S}_l(x)\geqslant M_0\quad(x\in[0,\ 1]).$$

总而言之，$\bar{S}_k(x)\geqslant M_0$ $(m_k\leqslant n_{i_{j-1}},\ 0\leqslant x\leqslant 1)$ 和 $S_{n_{i_{j-1}}}(x)\geqslant 0$ $(x\overline{\in}\Delta^-_{n_{i_1}}+\cdots+\Delta^-_{n_{i_{j-1}}})$ 含有 $\bar{S}_l(x)\geqslant 0$ $(x\in\Delta^-_{m_l})$ 和 $\bar{S}_l(x)\geqslant M_0$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$，但 $n_{i_{j-1}}<m_l<n_{i_j}$．

其次，假设 $m_l=n_{i_j}$，那末当 $x\overline{\in}\Delta^-_{n_{i_1}}+\cdots+\Delta^-_{n_{i_j}}$ 时，$\bar{S}_l(x)\geqslant 0$; 在 $\Delta^-_{i_j}$ 上，$\bar{S}_l(x)\geqslant M_j\geqslant M_0$．另一方面，$x\overline{\in}\Delta^-_{i_1}+\cdots+\Delta^-_{i_{j-1}}$ 的话，$a_{n_{i_j}}\chi_{n_{i_j}}(x)=0$，由是可知

$$\bar{S}_{m_l}(x)\geqslant M_0\quad(0\leqslant x\leqslant 1,\ m_l=n_{i_j}).$$

我们证明了：$\bar{S}_k(x)\geqslant M_0$ $(0\leqslant x\leqslant 1,\ m_k\leqslant n_{i_j})$，特别当 $x\overline{\in}\Delta^-_{n_{i_1}}+\cdots+\Delta^-_{n_{i_j}}$ 时，$\bar{S}_k(x)\geqslant 0$．这里 $j<j_0$，$\sum\limits_{j=j_0+1}^{\infty}|\Delta^-_{n_{i_j}}|<\frac{1}{4}|F_0|$．

现在考虑当 $m_l \geqslant n_{i_{j_0}}$ 时的 $\bar{S}_l(x)$． 假如对于适合 $m_l \geqslant n_{i_{j_0}}$ 的某一 l，能使 $\bar{S}_l(x) \geqslant M_0$ 在[0, 1]上成立，当 $x \bar{\in} \Delta_{n_{i_1}}^- + \cdots + \Delta_{n_{i_{j_0}}}^-$ 时，$\bar{S}_l(x) \geqslant 0$，由于 m_{l+1} 适合

$$n_{i_j} < m_{l+1} < n_{i_{j+1}} \quad (j \geqslant j_0),$$
$$|F_0 \Delta_{m_{l+1}}^-| > 0,$$

所以 $a_{m_{l+1}} \chi_{m_{l+1}}(x) = 0$ 在 $\Delta_{n_{i_1}}^- + \cdots + \Delta_{n_{i_{j_0}}}^-$ 成立．当 $j > j_0$ 时，在 $\Delta_{n_{i_{j_0+1}}} + \cdots + \Delta_{n_{i_j}}$ 中，成立着 $a_{m_{l+1}} \chi_{m_{l+1}}(x) = 0$. 由是，当 $x \bar{\in} \Delta_{n_{i_1}}^- + \cdots + \Delta_{n_{i_{j_0}}}^- + \Delta_{m_{l+1}}^-$ 时，

$$\bar{S}_{l+1}(x) = \bar{S}_l(x) + a_{m_{l+1}} \chi_{m_{l+1}}(x) \geqslant 0.$$

从而级数 $\sum a_{m_k} \chi_{m_k}(x)$ 的部分和 $\bar{S}_{l+1}(x)$ 一致于级数 $\sum a_{n_k} \chi_{n_k}(x)$ 的部分和 $\bar{S}_k(x)$，这里 $n_k = m_{l+1}$． 由于

$$\bar{S}_k(x) \geqslant 0 \quad (x \in F_0), \quad |F_0 \Delta_{m_{l+1}}^-| > 0,$$

所以在 $\Delta_{m_{l+1}}^-$ 上 $\bar{S}_{l+1}(x) \geqslant 0$. 由是，当 $x \bar{\in} \Delta_{n_{i_1}}^- + \cdots + \Delta_{n_{i_{j_0}}}^-$ 时，$\bar{S}_{l+1}(x) \geqslant 0$. 总结起来，我们见到 $\bar{S}_{l+1}(x) \geqslant M_0 (0 \leqslant x \leqslant 1)$．定理 1 证毕.

这样一来，对于三角级数的部分和，似有不能在正测度的点集上趋向于 $+\infty$ 的形势，这个形势是与上述孟孝夫的定理背道而驰的．三角级数与某些直交函数的性质，对于某些问题可以很不相同，事实上，乌里雅诺夫证有下述定理（见 M. сб. 63, 1964）：

定理 3 区间[0, 1]上，存在有界变差的函数 $f(x)$，使它的哈尔富理埃级数

$$f(x) \sim \sum a_n \chi_n(x), \quad a_n = \int_0^1 f(x) \chi_n(t)\, dt,$$

的发散点集在[0, 1]到处稠密.

首先证明引理.

引理 1 设 α 是(0, 1)中的一个二进位无限小数；当 $t \in [0, \alpha)$ 时，$f_\alpha(t)$ 等于 1；当 $t \in (\alpha, 1]$ 时，$f_\alpha(t) = 0$，$f_\alpha(\alpha) = \frac{1}{2}$. 那末 $f(t)$ 的哈尔级数在点 $t = \alpha$ 发散.

【证明】 置 $K_m^{(k)}(t, x) = \chi_0^{(0)}(t) \chi_0^{(0)}(x) + \cdots + \chi_m^{(k)}(t) \chi_m^{(k)}(x)$,

$$S_m^{(k)}(x) = c_0^{(0)} \chi_0^{(0)}(x) + \cdots + c_m^{(k)} \chi_m^{(k)}(x),$$

$$c_m^{(k)}=c_m^{(k)}(f_\alpha)=\int_0^1 f_\alpha(t)\chi_m^{(k)}(t)dt,$$

则 f_α 的哈尔级数的部分和可以写成

$$S_m^{(k)}(x)=\int_0^1 f_\alpha(t)K_m^{(k)}(t,\ x)dt.$$

将正方形 $Q(0\leqslant t\leqslant 1,\ 0\leqslant x\leqslant 1)$ 等分为若干个正方形，我们可以顺次求得 $K_m^{(k)}(t,\ x)$ 的数值：

$$K_0^{(0)}(t,\ x)=1,$$

$$\begin{aligned}K_0^{(1)}(t,\ x)&=K_0^{(0)}(t,\ x)+\chi_0^{(1)}(t)\chi_0^{(1)}(x)\\&=2,\quad (t,\ x)\in\left(0,\ \frac{1}{2};\ 0,\ \frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2},\ 1;\ \frac{1}{2},\ 1\right),\\&=0,\quad (t,\ x)\in\left(\frac{1}{2},\ 1;\ 0,\ \frac{1}{2}\right)+\left(0,\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2},\ 1\right).\end{aligned}$$

对于 $K_n^{(2^n)}(t,\ x)$ 来说，在沿着对角线 $t=x$ 的 2^{n+1} 个正方形 $Q_1,\ Q_2,\ \cdots,\ Q_{2^{n+1}}$ 上，其值等于 2^{n+1}，在其余正方形上，其值是零．假如 $1\leqslant p<2^{n+1}$，那末

$$K_{n+1}^{(p)}(t,\ x)=K_n^{(2^n)}(t,\ x)+\sum_{k=1}^{p}\chi_{n+1}^{(k)}(t)\chi_{n+1}^{(k)}(x).$$

将 $Q_1,\ Q_2,\ \cdots,\ Q_p$ 中的任一 Q_k 四等分为 $Q_k^{(1,1)},\ Q_k^{(1,2)},\ Q_k^{(2,1)},\ Q_k^{(2,2)}$，在沿着 Q_k 的对角线的正方形 $Q_k^{(2,2)}$ 上，$K_{n+1}^{(p)}(t,\ x)$ 等于 2^{n+2}，在其他的正方形上，其值为零．由是，假使 x 是 $(0,\ 1)$ 中的一个二进位的无限小数，那末 $K_m^{(p)}(t,\ x)$ 只能在一个区间 $I_m^{(k)}$ (x 的区间)上不为零，其值等于 2^m 或 2^{m+1}，同时 $|I_m^{(k)}|$ 相应地等于 2^{-m} 或 2^{-m-1}．在这种情况，我们见到*)

$$S_m^{(k)}(\alpha)=\frac{1}{|I_m^{(k)}|}\int_{I_m^{(k)}}f_\alpha(t)dt.$$

或是 $S_{2^n}(\alpha)=\int_{I_n}f_\alpha(t)dt/|I_n|$，这里 $\alpha\in I_n=(q_n 2^{-n},\ q_n 2^{-n}+2^{-n})$，$0\leqslant q_n\leqslant 2^n-1$．由于 $|f_\alpha(t)|\leqslant 1$，所以 $|S_{2^n}(\alpha)|\leqslant 1$．由于 α 的性质，存在如下的 $\{n_k\}$：

$$\alpha=0.a_1a_2\cdots a_{n_1}01\cdots a_{n_2}01\cdots,\quad a_\nu(a_\nu-1)=0.$$

---

*) 参见 G. Alexits 的《直交级数的收敛问题》(此书有德文、英文、俄文版)。

置 $x_k=0.a_1a_2\cdots a_{n_k}01\cdots a_k$, 则 $\alpha\in(\chi_k, \chi_k+2^{-n_k})$. 从而

$$S_{2^{n_k}}(\alpha)=2^{n_k}\int_{x_k}^{x_k+2^{-n_k}} f_\alpha(t)dt=2^{n_k}(\alpha-x_k).$$

另一方面, $0.1a_1\cdots a_{n_k}<\alpha<0.a_1\cdots a_k0111\cdots$. 记左端为 y_k, 则得

$$y_k<\alpha<y_k+2^{-1-n_k}.$$

从而

$$S_{2^{n_k+1}}(\alpha)=2^{n_k+1}\int_{y_k}^{y_k+2^{-1-n_k}} f_\alpha(t)dt=2^{n_k+1}(y_k-\alpha)=2^{n_k+1}(\alpha-x_k).$$

由是 $S_{2^{n_k+1}}(\alpha)=2S_{2^{n_k}}(\alpha)$. 假如 $\limsup S_{2^n}(\alpha)=\liminf S_{2^n}(\alpha)$, 那末, 由于 $|S_{2^n}(\alpha)|\leqslant 1$, 所以上式两端是同一有限数 A, 从而 $A=2A$, $A=0$. 但是, 这是与

$$S_{2^{n_k}}(\alpha)>2^{n_k}\cdot\frac{1}{2^{n_k+2}}=\frac{1}{4}$$

不相容的. 引理证毕.

其次, 我们要把有界变差函数的哈尔级数的收敛点集和发散点集清楚地划分, 建立如下的

引理 2 设 $\sum a_n\chi_n(t)$ 是 $f(t)\in V[0, 1]$ (有界变差的函数)的哈尔级数(简记为 $\mathfrak{S}[f, x, t]$), 则在 $f(t)$ 的连续点级数收敛, 在 $[0, 1]$ 中的二进位有限小数点, 级数也收敛.

【证明】 当 x 是 $[0, 1]$ 中的一个二进位有限小数时, 或是 x 落入某一区间 $I_m^{(k)}$, $K_m^{(k)}(f, x)$ 取值为 2^{m+1}, 2^m, 2^{m-1}, 而 $|I_m^{(k)}|$ 顺次具有长 2^{-m-1}, 2^{-m}, $2^{-(m-1)}$, 此时, 由 $K_m^{(k)}(f, x)$ 所造成的部分和是

$$S_m^{(k)}(x)=\frac{1}{|I_m^{(k)}|}\int_{I_m^{(k)}} f(t)dt;$$

或是 $K_m^{(k)}(t, x)$ 在 $I_m^{(k)}=(x-2^{-1-m}, x)$ 上等于 2^m, 在 $J_m^{(k)}=(x, x+2^{-m})$ 上等于 2^{m-1}, 此时

$$S_m^{(k)}(x)=\frac{1}{2|I_m^{(k)}|}\int_{I_m^{(k)}} f(t)dt+\frac{1}{2|J_m^{(k)}|}\int_{J_m^{(k)}} f(t)dt.$$

区间 $I_m^{(k)}$ 和 $J_m^{(k)}$, 当 $m\to\infty$ 时都收缩于 x 点, 因此, 假如 x 是 $f(t)$ 一个连续点, 那末 $S_m^{(k)}(x)\to f(x)\ (m\to\infty)$.

次设 x 是 $(0, 1)$ 中一个二进位有限小数的点，$f(t)$ 在 $t=x$ 是不连续的．作如下的 $\varphi(t)$：

当 $0\leqslant t<x$ 时，$\varphi(t)=f(x-t)-f(x+t)$；当 $x<t\leqslant 1$ 时，$\varphi(t)=0$；

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\{f(x-0)-f(x+0)\}.$$

写着 $\psi(t)=f(t)-\varphi(t)$，我们见到 $f(t)=\psi(t)+\varphi(t)$，x 是 $\psi(t)$ 的一个连续点，因此 $S_n(\psi, \chi, x)\to\psi(x)$，$x$ 是一个二进位的有限小数，级数 $\sum a_m(\varphi)\chi_m(t)$ 只有有限个项不为零．因此 $\lim S_m(\varphi, \chi, x)$ 存在．这里 $S_n(\varphi, \chi, x)$ 和 $S_n(\psi, \chi, x)$ 分别表示 $\sum a_m(\varphi)\chi_m(x)$ 与 $\sum a_m(\psi)\chi_m(x)$ 的最初 n 项之和．由是 $S_n(f, \chi, x)=S_n(\varphi, \chi, x)+S_n(\psi, \chi, x)$ 的极限存在．引理证毕．

定理 4 设 $f(t)$ 在 $[0, 1]$ 上是一有界变差的函数，假如 $f(t)$ 在 $(0, 1)$ 中的一个二进位无限小数点 x 具有不连续性，那末 $f(t)$ 的哈尔级数在点 x 发散．

【证明】 利用引理 2 证明中的 φ，ψ，成立着

$$S_n(f, \chi, x)=S_n(\varphi, \chi, x)+S_n(\psi, \chi, x).$$

由于 x 是 $\psi(t)$ 的一个连续点，所以当 $n\to\infty$ 时，上式末项具有极限．利用引理 1，函数

$$\varphi(t)=\frac{f_x(t)}{f(x-0)-f(x+0)}$$

在 $t=x$ 是不连续的，所以当 $n\to\infty$ 时，$S_n(\varphi, \chi, x)$ 没有极限．定理证毕．

【定理 3 的证明】 区间 $[0, 1]$ 中存在到处稠密的二进位无限小数点列 $x_1, x_2, x_3, \cdots$．作函数 $f_1(t)=\sum\limits_{x_n\leqslant t} n^{-2}$，关于 $t\,(0\leqslant t\leqslant 1)$ 是单调增加的，$f_1(x)\leqslant\sum\limits_{1}^{\infty} n^{-2}$．由于任一 x_n 是 $f_1(t)$ 的不连续点，它可以写成二进位无限小数，所以 $\sum a_m(f_1)\chi_m(t)$ 在 $\{x_n\}$ 上发散，证明完毕．

12. 三角函数系的更序

设 $\nu_1, \nu_2, \cdots$ 都是自然数，$\nu_k\geqslant 1$，$\{\nu_k\}$ 不依大小的顺序排列．称三

角函数系

$$\{\cos\nu_k x,\ \sin\nu_k x\}:\ 1,\ \cos\nu_1 x,\ \sin\nu_1 x,\ \cos\nu_2 x,\ \sin\nu_2 x,\ \cdots$$

为$\{1,\ \cos nx,\ \sin nx\}$的一个更序的三角函数子列．在$[-\pi,\ \pi]$上，$\{\cos\nu_k x,\ \sin\nu_k x\}$是不完备的（一般地说）直交函数系，对应于$f\in L(-\pi,\ \pi)$，存在一个定序三角级数(对应于$\{\nu_k\}$)：

$$f(t)\sim\frac{\alpha_0}{2}+\sum_1^\infty(\alpha_k\cos\nu_k t+\beta_k\sin\nu_k t).$$

简记这个级数为$\mathfrak{S}[f,\ \{\nu_k\}]$，或$\mathfrak{S}[f,\ \{\nu_k\},\ t]$．这里建立如下的

定理 1 存在具有下述两性质1°和2°的$\{\nu_k\}$：

1° $L_2(-\pi,\ \pi)$中有$f(x)$，使$\mathfrak{S}[f,\ \{\nu_k\}]$概散．

2° 对于$L_2(-\pi,\ \pi)$中任一$f(x)$和任一正数ε，$L_2(-\pi,\ \pi)$中存在函数$\psi(t)$，$\mathfrak{S}[\psi,\ \{\nu_k\}]$概敛而$|(f(x)\neq\psi(x))|<\varepsilon\ (-\pi<x<\pi)$．

这是容易从下面的定理2导出的，两个定理都是A. A. 打拉良在数学汇刊(M. cб. 63(105)4, 1964, 620～638)上发表的．

定理 2 存在下述两种性质(a)和(b)的三角级数

$$a_0+\sum_{k=1}^\infty(a_k\cos\mu_k x+b_k\sin\mu_k x),$$

这里$\{\mu_k\}$不是依照大小顺序排列的：

(a) 对于某一自然数序列$\{k_n\}(k_1<k_2<\cdots<k_n<\cdots)$，子级数

$$\sum_{i=1}^\infty(a_{k_i}\cos\mu_{k_i}x+b_{k_i}\sin\mu_{k_i}x)$$

在$[-\pi,\ \pi]$上几乎处处无界发散，同时$(a_{k_i}^2+b_{k_i}^2)$收敛．

(b) 对于$L_2(-\pi,\ \pi)$中任一$f(x)$和一正数ε，存在自然数列$\{n_i\}$ $(n_i<n_{i+1})$和$\psi(x)$使三角级数

$$\sum_{i=1}^\infty(a_{n_i}\cos\mu_{n_i}x+b_{n_i}\sin\mu_{n_i}x)\quad(\sum a_{n_i}^2+b_{n_i}^2<\infty)$$

概敛于$\psi(x)$，而$|(\psi(x)\neq f(x))|<\varepsilon\ (-\pi<x<\pi)$．

定理1显然可从定理2导出，我们只要证明定理2就够了．

现在利用孟孝夫的连续函数$\psi(t)\ (c\leqslant t\leqslant d)$来证明定理2，$\psi(t)$的存在见数学汇刊(M. cб. 8,1940)．设线段$ax+b\ (c\leqslant x\leqslant d)$的两端

$(c,\ ac+b)$ 和 $(d,\ ad+b)$ 都落在 x 轴的同侧，则对于任一正数 η，大于8的自然数 ν，存在如下的 $\psi(t)\in C[c,\ d]$ 和 $E\subset[a,\ b]$：$|E|$ 大于 $(d-c)\left(1-\dfrac{8}{\nu}\right)$，在 E 上，$\psi(x)=ax+b$；在 $[c,\ d]$ 中某些区间上，$\psi(x)$ 是直线段，$\psi(c)=ac+b$，$\psi(d)=ad+b$；

$$|\psi(x)|\leqslant 2\nu\max_{a\leqslant x\leqslant d}|ax+b|,$$

$$\left|\int_{c'}^{d'}\psi(t)\,dt\right|<\eta\quad(c\leqslant c'<d'\leqslant d\text{ 的话}),$$

$$\left|\int_c^d\psi(t)\frac{\sin n(t-x)}{t-x}\,dt\right|$$
$$\leqslant A\nu\max_{x\in[c,\ d]}|ax+b|\quad(x\in E,\ n=1,\ 2,\cdots).$$

引理 对于任一实数 l，正数 ε，自然数 n_0 和 ν，$\nu>8$，$[c,\ d]\subset(-\pi,\ \pi)$，$d-c\leqslant\pi$，存在如下的 $\psi(x)\in C[c,\ d]$ 与可测点集 $E\subset[c,\ d]$：

$$|E|>(d-c)\left(1-\frac{8}{\nu}\right),\quad \psi(x)=l\quad(x\in E),$$

$$|S_n(x)|\leqslant\varepsilon\quad(n\leqslant n_0),\quad |S_n(x)|\leqslant A|l|\nu\quad(x\in E).$$

这里

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_c^d\psi(t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}\,dt,$$

$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$；$\psi(t)$ 在 $[c,\ d]$ 中某些区间(有限个)上是线性的。

首先利用孟孝夫的函数 $\psi(t)$ 来建立引理．将 $[-\pi,\ \pi]$ 分为有限个小区间，使在每一小区间中，$\cos nx$ 与 $\sin nx$ 当 $1\leqslant n\leqslant n_0$ 时都成单调函数，记这些小区间为 $[\alpha_{i-1,n_0},\ \alpha_{i,n_0}]$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ p_0)$，

$$\alpha_{0,n_0}=-\pi<\alpha_{1,n_0}<\cdots<\alpha_{i,n_0}<\cdots<\alpha_{p_0,n_0}=\pi.$$

置 $\eta=\varepsilon/2p_0(2n_0+1)$，对于这个 η，在所设的情况下，作孟孝夫的函数 $\psi(x)$．设 $\alpha_{1,n_0},\ \cdots,\ \alpha_{p_0,n_0}$ 中的点落在 $[c,\ d]$ 中的为 α'_j：

$$c=\alpha'_0<\alpha'_1<\cdots<\alpha'_j<\cdots<\alpha'_{p'}=d,$$

则 $p'\leqslant p_0$，在 $[\alpha'_{j-1},\ \alpha'_j]$ $(1\leqslant j\leqslant p')$ 中，$\sin nx$ 和 $\cos nx$ 都是单调的，这里 $1\leqslant n\leqslant n_0$．由第二中值定理，我们见到

$$\left|\int_{\alpha'_{j-1}}^{\alpha'_j}\psi(x)\sin nx\,dx\right|<2\eta,\quad \left|\int_{\alpha'_{j-1}}^{\alpha'_j}\psi(x)\cos nx\,dx\right|<2\eta.$$

从而当 $1\leqslant n\leqslant n_0$ 时,

$$\left|\int_c^d \psi(x)\sin nx\,dx\right|<2p_0\eta,$$

$$\left|\int_c^d \psi(x)\cos nx\,dx\right|<2p_0\eta.$$

另一方面,由 $\psi(x)$ 的(孟孝夫)性质, $\int_c^d \psi(x)dx$ 的绝对值小于 η. 置

$$\begin{matrix}a_n\\b_n\end{matrix}=\frac{1}{\pi}\int_c^d \psi(x)\begin{matrix}\cos nx\\ \sin nx\end{matrix}dx,$$

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

则当 $n\leqslant n_0$ 时, $|S_n(x)|\leqslant 2p_0\eta(2n+1)\varepsilon$. 当 $|\theta|\leqslant\pi$ 时, 易知

$$\left|\frac{\sin n\theta}{\frac{\theta}{2}}-\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right|<c_0\quad(c_0\text{: 绝对常数})$$

由于 $d-c\leqslant\pi$, $|\psi(t)|\leqslant 2\nu|l|$, 所以两个积分

$$\int_c^d \psi(t)\frac{\sin n(t-x)}{\frac{t-x}{2}}dt \quad\text{与}\quad \int_c^d \psi(t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{\sin\frac{t-x}{2}}dt$$

之差小于 $2\nu|l|\pi c_0$. 引理的证明因此完成.

【定理的证明】 证明包含如下几个步骤:

I. 从概散级数作成新的三角级数.

从 §6 我们知道 L^2 中有富理埃级数, 它的更序级数

$$\frac{1}{2}a'_0+\sum_1^{\infty}(a'_k\cos p_kx+b'_k\sin p_kx)$$

几乎到处无界发散. $[(c,d),l,\nu]$ 是含有三个元素 (c,d), l, ν 的集. 假设 c 和 d 都是有理数 $(d-c\leqslant\pi)$, l 也是有理数, ν 是自然数, 那末这些集的全体是可列的, 它们可以记成一个序列:

$$[(c_i,d_i),l_i,\nu_i]\quad(i=1,2,\cdots).$$

设 $\varepsilon_i > \varepsilon_{i+1} \to 0$, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots < \infty$. 作 $\{n'_i, m'_i\}$ 如下：设 $n'_0 = m'_0 = 1$, 取定

$$\sum_{k=n'_0}^{m'_0} (a'_k \cos p_k x + b'_k \sin p_k x)$$

和

$$\sum_{k=n_0}^{m_0} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

这里前式只有一项，后式中的 a_k 和 b_k 是任意选取的，$m_0 > n_0 > p_1$, 假如

$$\sum_{k=n'_{i-1}}^{m'_{i-1}} (a'_k \cos p_k x + b'_k \sin p_k x)$$

和

$$\sum_{k=n_{i-1}}^{m_{i-1}} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

业已取定，那末选取相当于 $k \in [m'_i, n'_i]$ 以及 $k \in [m_i, n_i]$ 的 a'_k, b'_k 和 a_k, b_k 如下．设 $A_i \subset [-\pi, \pi]$, $|A_i| > 2\pi - \varepsilon_i$, 当 $x \in A_i$ 时，

$$\text{(1)} \qquad \max_{n'_i \leqslant n \leqslant m'_i} \left| \sum_{k=n'_i}^{n} (a'_k \cos p_k x + b'_k \sin p_k x) \right| > i.$$

现在选取 n_i 使它大于 $\max(p_{n_i} \leqslant k \leqslant m'_i)$.

于引理置 $[c, d] = [c_i, d_i]$, $l = l_i$, $\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon_i$, $n_0 = n_i$, $\nu = \nu_i$, 则可得相应的 $\psi_i(x) = \psi(x)$ 以及 $E_i = E \subset [c_i, d_i]$, 具有引理中的种种性质．将 $\psi_i(x)$ $(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$ 在 $[c_i, d_i]$ 外部的数值看做零，那末取 m_i 足够大，可使 $\mathfrak{S}[\psi_i]$ 的部分和 $S_{m_i}^{(i)}(x)$ 满足

$$|S_{m_i}^{(i)}(x) - \psi_i(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon_i$$

$$(x \in [-\pi, \pi],\ x \overline{\in} (c_i - \varepsilon_i, c_i + \varepsilon_i) + (d_i - \varepsilon_i, d_i + \varepsilon_i)).$$

由数学归纳法我们得到下面的级数

$$\text{(2)} \qquad \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=n'_i}^{m'_i} (a'_k \cos p_k x + b'_k \sin p_k x) + \sum_{k=n_i}^{m_i} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right\},$$

这里

$$\sum_{k=n_i}^{m_i}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\equiv S_{m_i}^{(i)}(x)-S_{n_i}^{(i)}(x)\quad(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots).$$

我们将证，把(2)中括号解除，得一不并项的三角级数而成定理 2 中的级数.

II. 级数(2)具有性质(a).

设 $x\in[-\pi,\ \pi]$. 当 x 不在 $(c_i-\varepsilon_i,\ c_i+\varepsilon_i)+(d_i-\varepsilon_i,\ d_i+\varepsilon_i)$ 时，从

$$|S_{m_i}^{(i)}(x)-\psi_i(x)|<\frac{1}{2}\varepsilon_i\quad 和\quad |S_n^{(i)}(x)|\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon_i\quad(n\leqslant n_i)$$

得到

$$\left|\sum_{k=n_i}^{m_i}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)-\psi_i(x)\right|<\varepsilon_i.$$

利用 $|S_n^{(i)}(x)|\leqslant A|l_i|\nu_i(x\in E_i)$，我们见到：当 $n_i\leqslant n\leqslant m_i$，$x\in E_i$时，

$$\left|\sum_{k=n_i}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right|\leqslant\varepsilon_i+A|l_i|\nu_i.$$

利用贝塞尔(Bessel)不等式，得到

$$\sum_{k=n_i}^{m_i}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi_i^2(x)\,dx\leqslant 4\nu_i^2l_i^2(d_i-c_i).$$

又因

$$|S_n^{(i)}(x)|\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon_i(n\leqslant n_i),$$

$$\sum_{n_i}^{m_i}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\equiv S_{m_i}^{(i)}(x)-S_{n_i-1}^{(i)}(x),$$

故当 $n_i\leqslant n\leqslant m_i$ 时，成立着

$$(3)\qquad \left|\sum_{k=n_i}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right| \leqslant\frac{\varepsilon_i}{2}+\frac{1}{2\pi}\left|\int_{c_i}^{d_i}\psi_i(t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}\,dt\right|.$$

级数 $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=n_i'}^{m_i'}(a_k'\cos p_kx+b_k'\sin p_kx)$，去其内部的加法 $\sum_{n_i'}^{m_i'}$，得到无界概散级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k'\cos p_kx+b_k'\sin p_kx)$的一个子级数，后者对应于 L^2 中的一个函数，从不等式(1)我们见到，在点集

八甲

$$\mathscr{E}=\prod_{n=1}^{\infty}\sum_{i=n}^{\infty}A_i \quad (|A_i|>2\pi-\varepsilon_i)$$

上，所考虑的子级数到处发散，并且 $\mathscr{E}\subset[-\pi, \pi]$，$|\mathscr{E}|=2\pi$.

III. $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=n_i}^{m_i}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ 的一个子级数.

我们要证级数(2)具有性质(b). 假设 $\varepsilon<1$，(b)中的 $f(x)$ 是连续的，设整数数列 $\{\tau_i\}$ 适合 $\tau_i>8$ 和 $2\pi/\tau_i<\varepsilon 4^{-3-i}$. 从 $\{(c_i, d_i), \nu_i, l_i\}$ 选出有限个如下的元素：

$$[(c_{i_j}, d_{i_j}), \nu_{i_j}, l_{i_j}] \quad (j=1, 2, \cdots, j_1)$$

$$i_1<i_2<\cdots<i_{j_1},$$

$$\sum_{i=i_1}^{\infty}\varepsilon_i<\frac{1}{2\tau_2^2}, \quad \nu_{i_1}=\nu_{i_2}=\cdots=\nu_{i_{j_1}}=\tau_1.$$

其中 $[c_{i_j}, d_{i_j}]$ $(1\leqslant j\leqslant j_1)$ 两两不相交，而都是 $\left[-\pi+\frac{\varepsilon}{16}, \pi-\frac{\varepsilon}{16}\right]$ 的子区间，其全长 $(d_{i_1}-c_{i_1})+\cdots+(d_{i_{j_1}}-c_{i_{j_1}})$ 大于 $2\pi-\frac{\varepsilon}{4}$. 当 $x\in[c_{i_j}, d_{i_j}]$ 时，$f(x)$ 与 l_{i_j} 之差小于 $\frac{1}{2}\tau_2^{-2}$ $(j\leqslant j_1)$. 点集

$$B_1=\sum_{j=1}^{j_1}E_{i_j}-\sum_{j=1}^{j_1}\{[c_{i_j}-\varepsilon_{i_j}, c_{i_j}+\varepsilon_{i_j}]+[d_{i_j}-\varepsilon_{i_j}, d_{i_j}+\varepsilon_{i_j}]\}$$

的测度 $|B_1|>2\pi-\frac{\varepsilon}{2}$. 事实上，

$$\sum_{j=1}^{j_1}|E_{i_j}|>2\pi-\frac{\varepsilon}{4}-\frac{2\pi}{\tau_1}, \quad \sum_{j=1}^{j_1}(2\varepsilon_{i_j}+2\varepsilon_{i_j})<\frac{2}{\tau_2^2}.$$

现在证明，当 $x\in B_1$ 时，

$$\left|\sum_{j=1}^{j_1}\sum_{k=n_{i_j}}^{m_{i_j}}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)-f(x)\right|<\frac{1}{\tau_2^2}.$$

在 E_i 上，$\psi_i(x)=l_i$，当 $x\in B_1$ 时，必有 $E_{i_{j'}}$ 含有 x $(1\leqslant j'\leqslant j_1)$. 因此

$$\left|\sum_{k=n_{i_{j'}}}^{m_{i_{j'}}}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)-l_{i_{j'}}\right|<\varepsilon_{i_{j'}} \quad (1\leqslant j'\leqslant j_1).$$

另一方面，当 $x\in[c_{i_j}, d_{i_j}]$ $(j\neq j', 1\leqslant j\leqslant j_1)$ 时，由于 $\psi_{i_j}(x)=0$，所以

$$\left|\sum_{k=n_{i_j}}^{m_{i_j}}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right|<\varepsilon_{i_j}.$$

由是

八甲

$$\left|\sum_{j=1}^{j_1}\sum_{k=n_{i_j}}^{m_{i_j}}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)-f(x)\right|<\frac{1}{2\tau_2^2}+\sum_{j=1}^{j_1}\varepsilon_{i_j}<\frac{1}{\tau_2^2}.$$

在 B_1 上成立.

设 $0=j_0<j_1<\cdots<j_q<\cdots<j_{p-1}$, $B_1\supset B_2\supset\cdots\supset B_{p-1}$, 当 $k\leqslant p-1$ 时,

$$|B_k|>|B_{k-1}|-\frac{\varepsilon}{2^k};$$

在 B_{p-1} 上, 成立着

$$\left|\sum_{q=1}^{p-1}\sum_{i=j_{q-1}+1}^{j_q}\sum_{k=n_i}^{m_{i_j}}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)-f(x)\right|<\frac{1}{\tau_p^2},$$

则函数

$$\psi(x)=f(x)-\sum_{q=1}^{p-1}\sum_{i=j_{q-1}+1}^{j_q}\sum_{k=n_{i_j}}^{m_{i_j}}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

是连续的, 且从上式我们见到

$$|\psi(x)|<\frac{1}{\tau_p^2}\quad(x\in B_{p-1}).$$

设

$$i_{j_{p-1}+1}<i_{j_{p-1}}+2<\cdots<i_{j_p},\quad \nu_{i_{j_{p-1}+1}}=\cdots=\nu_{i_{j_p}}=\tau_p,$$

$$\varepsilon_{i_{j_{p-1}+1}}+\cdots+\varepsilon_{i_{j_p}}<\frac{1}{2}\tau_{p+1}^{-2},$$

$$[c_{i_j},\ d_{i_j}]\subset\left[-\pi+\frac{\varepsilon}{16},\ \pi+\frac{\varepsilon}{16}\right],$$

$$|B_{p-1}\{[c_{i_{j_{p-1}+1}},\ d_{i_{j_{p-1}+1}}]+\cdots+[c_{i_{j_p}},\ d_{i_{j_p}}]\}|>|B_{p-1}|-\varepsilon 2^{-1-p},$$

$$|t_{i_j}-\psi(x)|<\frac{1}{2}\tau_{p+1}^{-2}\quad(x\in B_{p-1}[c_{i_j},\ d_{i_j}]),\ j_{p-1}+1\leqslant j\leqslant j_p.$$

我们要证存在如下的 B_p: $B_p\subset B_{p-1}$, $|B_p|>|B_{p-1}|-\varepsilon 2^{-p}$, 在 B_p 上

$$\left|\sum_{q=1}^{p}\sum_{j=j_{q-1}+1}^{j_q}\sum_{k=n_{i_j}}^{m_{i_j}}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)-f(x)\right|<\tau_{p+1}^{-2}.\tag{4}$$

定义 B_p 为 B_{p-1} 与

$$\sum_{j=j_{p-1}+1}^{j_p}E_{i_j}-\sum_{j=j_{p-1}+1}^{j_p}\{[c_{i_j}-\varepsilon_{i_j},\ c_{i_j}+\varepsilon_{i_j}]+[d_{i_j}-\varepsilon_{i_j},\ d_{i_j}+\varepsilon_{i_j}]\}$$

的交集. 由于

$$E_{i_{j_{p-1}+1}}+\cdots+E_{i_{j_p}}\subset[c_{i_{j_{p-1}+1}},\ d_{i_{j_{p-1}+1}}]+\cdots+[c_{i_{j_p}},\ d_{i_{j_p}}],$$

所以左端的测度大于右端诸区间的全长减去 $2\pi\tau_p^{-1}$. 由是

$$|B_p|>|B_{p-1}|-\frac{\varepsilon}{2^{p+1}}-\frac{2\pi}{\tau_p}-\frac{2}{\tau_{p+1}^2}>|B_{p-1}|-\frac{\varepsilon}{2^p}.$$

现在证明(4)在 B_p 上成立. 设 $x_0\in B_p$, 则 $[j_{p-1}+1,\ j_p]$ 中有 j' 适合 $x_0\in B_{p-1}\cdot E_{i_{j'}}$, $x_0\overline{\in}[c_{i_j}-\varepsilon_{i_j},\ d_{i_j}+\varepsilon_{i_j}]$ $(j\neq j',\ j_{p-1}+1\leqslant j\leqslant j_p)$. 从而

$$x_0\in[c_{i_{j'}}+\varepsilon_{i_{j'}},\ d_{i_{j'}}-\varepsilon_{i_{j'}}].$$

由于 $\psi_i(x)=0(x\overline{\in}[c_i,\ d_i])$, 所以当 $[j_{p-1}+1,\ j_p]$ 中的 $j\neq j'$ 时,

$$\left|\sum_{k=n_{i_j}}^{m_{i_j}}(a_k\cos kx_0+b_k\sin kx_0)\right|$$

$$=\left|\sum_{k=n_{i_j}}^{m_{i_j}}(a_k\cos kx_0+b_k\sin kx_0)-\psi(x_0)\right|<\varepsilon_{i_j}.$$

另一方面, 我们见到

$$\left|\sum_{k=n_{i_{j'}}}^{m_{i_{j'}}}(a_k\cos kx_0+b_k\sin kx_0)-l_{i_{j'}}\right|<\varepsilon_{i_{j'}},$$

$$|l_{i_{j'}}-\psi(x_0)|<\frac{1}{2\tau_{p+1}^2}.$$

由是

$$\left|\sum_{i=j_{p-1}+1}^{j_p}\sum_{k=n_{i_j}}^{m_{i_j}}(a_k\cos kx_0+b_k\sin kx_0)-\psi(x_0)\right|<\frac{1}{2\tau_{p+1}^2}$$

$$(x\in B_p).$$

从而得到(4).

上面的做法, 可以一步一步的进行以至无穷, 我们获得一列点集 $\{B_p\}$ 和子级数(适合(4))

$$\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{j=j_{p-1}+1}^{j_p}\sum_{k=n_{i_j}}^{m_{i_j}}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),\tag{5}$$

$$0=j_0<j_1<\cdots<j_p<\cdots,$$

$$B_p\subset B_{p-1},\quad |B_p|>|B_{p-1}|-\frac{\varepsilon}{2^p}.$$

IV. 级数(5)的性质.

我们证明(5)具有下列三性质:

(α) 级数(5)是 L_2 中函数的富理埃级数，就是说，$\sum(a_k^2+b_k^2)<\infty$.

(β) 去(5)的两重内部"括号"，得一概敛的三角级数.

(γ) 设级数(5)的和为 $\psi(x)$，则 $|(f(x)\neq\psi(x))|<\varepsilon$.

首先证明 $\sum(a_k^2+b_k^2)<\infty$，由于当 $p\geqslant 2$，$j\in[j_{p-1}+1, j_p]$ 时，在 $B_{p-1}[c_{i_j}, d_{i_j}]$ 上成立着

$$|l_{i_j}-\psi(x)|<\frac{1}{2}\tau_{p+1}^{-2},$$

$$|\psi(x)|<\tau_p^{-2}\quad(x\in B_{p-1}),$$

所以

$$|l_{i_j}|<2\tau_p^{-2}\quad(p\geqslant 2,\ j_{p-1}+1\leqslant j\leqslant j_p).$$

又因 $\tau_p=\nu_{i_{j_{p-1}+1}}=\cdots=\nu_{i_{j_p}}$，故得

$$|\nu_{i_j}l_{i_j}|\leqslant 2\tau_p^{-1}\quad(p\geqslant 2,\ j_{p-1}+1\leqslant j\leqslant j_p).$$

从而

$$\sum_{k=n_{i_j}}^{m_{i_j}}(a_k^2+b_k^2)\leqslant 4\nu_{i_j}^2 l_{i_j}^2(d_{i_j}-c_{i_j})\leqslant\frac{16}{\tau_p^2}(d_{i_j}-c_{i_j})$$

$$(p\geqslant 2,\ j_{p-1}+1\leqslant j\leqslant j_p),$$

$$\sum_{j=j_{p-1}+1}^{j_p}\sum_{k=n_{i_j}}^{m_{i_j}}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{32\pi}{\tau_p^2}\quad(p\geqslant 2).$$

将上式结合到 $\frac{2\pi}{\tau_i}<\frac{\varepsilon}{4^{i+3}}$，就完成($\alpha$)的证明.

其次证明(β). 考虑下面三个点集叙列的优限点集[*)]

$$\mathscr{E}^{(s)}=\limsup_{p\to\infty}\mathscr{E}_p^{(s)}=\prod_{n=1}^{\infty}\sum_{p=n}^{\infty}\mathscr{E}_p^{(s)}\quad(s=1,\ 2,\ 3),$$

这里

$$\mathscr{E}_p^{(1)}=\sum_{j=j_{p-1}+1}^{j_p}\{[c_{i_j}-d_{i_j}]-E_{i_j}\},$$

$$\mathscr{E}_p^{(2)}=\sum_{j=j_{p-1}+1}^{j_p}\{[c_{i_j}-\varepsilon_{i_j},\ c_{i_j}+\varepsilon_{i_j}]+[d_{i_j}-\varepsilon_{i_j},\ d_{i_j}+\varepsilon_{i_j}]\},$$

$$\mathscr{E}_p^{(3)}=\sum_{j=j_{p-1}+1}^{j_p}\left\{\left[c_{i_j}-\frac{d_{i_j}-c_{i_j}}{\sqrt{\tau_p}},\ c_{i_j}\right]+\left[[d_{i_j},\ d_{i_j}+\frac{d_{i_j}-c_{i_j}}{\sqrt{\tau_p}}\right]\right\}.$$

---

*) 参见陈建功：《实函数论》，第七章 §3.

我们见到

$$|\mathscr{E}_p^{(1)}|<2\pi\tau_p^{-1},\quad |\mathscr{E}_p^{(2)}|<2\tau_{p+1}^{-2},$$

$$|\mathscr{E}_p^{(3)}|<2\pi\tau_p^{-\frac{1}{2}}.$$

由是可知 $\mathscr{E}^{(1)}$, $\mathscr{E}^{(2)}$, $\mathscr{E}^{(3)}$ 都是零集. 我们要证去括号的级数(5)在点集

$$M=[-\pi,\ \pi]-(\mathscr{E}_p^{(1)}+\mathscr{E}_p^{(2)}+\mathscr{E}_p^{(3)})$$

上概敛. 当 $t\in[c_{i_j},\ d_{i_j}]$, $x\overline{\in}\left[c_{i_j}-\frac{d_{i_j}-c_{i_j}}{\sqrt{\tau_p}},\ d_{i_j}+\frac{d_{i_j}-c_{i_j}}{\sqrt{\tau_p}}\right]$时,

$$\frac{d_{i_j}-c_{i_j}}{2\sqrt{\tau_p}}<\frac{|t-x|}{2}\leqslant\pi-\frac{\pi}{32},$$

从而

$$\left|\sin\frac{t-x}{2}\right|\geqslant\min\left\{\sin\frac{\varepsilon}{32},\ \frac{d_{i_j}-c_{i_j}}{\pi\sqrt{\tau_p}}\right\}\geqslant\frac{d_{i_j}-c_{i_j}}{\pi\sqrt{\tau_p}}.\quad (p\geqslant p_0);$$

由是,从(3)得到

$$\left|\sum_{k=n_{i_j}}^{n}(a_k\cos kx+b_k'\sin kx)\right|$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon_{i_j}}{2}+\frac{1}{2\pi}\ \frac{d_{i_j}-c_{i_j}}{\tau_p}\cdot 4\ \frac{\pi\sqrt{\tau_p}}{d_{i_j}-c_{i_j}}$$

$$=\frac{\varepsilon_{i_j}}{2}+\frac{2}{\sqrt{\tau_p}}$$

$$(n_{i_j}\leqslant n\leqslant m_{i_j},\ j_{p-1}+1\leqslant j\leqslant j_p,\ p\geqslant p_0).$$

设 $x\in M$, 则当 p 足够大——设是 $p>p_x$——时,

$$x\overline{\in}\mathscr{E}_p^{(1)}+\mathscr{E}_p^{(2)}+\mathscr{E}_p^{(3)}.$$

假如 $x\overline{\in}[c_{i_j}-\varepsilon_{i_j},\ d_{i_j}+\mathscr{E}_{i_j}]$也不属于

$$\left[c_{i_j}-\frac{d_{i_j}-c_{i_j}}{\sqrt{\tau_p}},\ d_{i_j}+\frac{d_{i_j}-c_{i_j}}{\sqrt{\tau_p}}\right]$$

$(j_{p-1}+1\leqslant j\leqslant j_p)$, 那末

$$\left|\sum_{k=n_{i_j}}^{m_{i_j}}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right|<\varepsilon_{i_j}\tag{6}$$

$$(j_{p-1}+1\leqslant j\leqslant j_p,\ p\geqslant p_0,\ p\geqslant p_x).$$

假如 $x\in E_{i_{j_0}}$, j_0 是$[j_{p-1}+1, j_p]$中一个数,

$$x\overline{\in}[c_{i_j}-\varepsilon_{i_j}, d_{i_j}+\varepsilon_{i_j}],$$

$$x\overline{\in}\left[c_{i_j}-\frac{d_{i_j}-c_{i_j}}{\sqrt{\tau_p}}, d_{i_j}+\frac{d_{i_j}-c_{i_j}}{\sqrt{\tau_p}}\right],$$

这里 $j\neq j_0$, $j_{p-1}+1\leqslant j\leqslant j_p$, 那末(6)当 $j\neq j_0$ 时成立; $j=j_0$ 的话, 我们见到

$$\left|\sum_{k=n_{i_{j_0}}}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right|$$

$$\leqslant\varepsilon_{i_{j_0}}+A\frac{2}{\tau_p},$$

这里 $n_{i_{j_0}}\leqslant n\leqslant m_{i_{j_0}}$, A 是一绝对常数. 总结起来, 我们得到

$$\sum_{j=j_{p-1}+1}^{j_p}\left|\sum_{k=n_{i_j}}^{m_{i_j}}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right|$$

$$\leqslant\sum_{j=j_{p-1}+1}^{j_p}\varepsilon_{i_j}+\frac{2A}{\tau_p},$$

这里 $p>p_x$, $p>p_0$. 我们还要考虑

$$(n_{i_j}, n)\equiv\left|\sum_{k=n_{i_j}}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right|$$

$$(n_{i_j}\leqslant n\leqslant m_{i_j}, j_{p-1}+1\leqslant j\leqslant j_p).$$

当 $p>p_0$, $p>p_x$ 时, 我们见到

$$(n_{i_j}, n)\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon_{i_j}+\frac{2}{\sqrt{\tau_p}}$$

或是

$$(n_{i_j}, n)\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon_{i_j}+\frac{2A}{\tau_p}.$$

由是可知(β)成立.

最后证明(γ). 设单调减少的点集叙列$\{B_p\}$的交集$\prod B_p$是B. 那末 $B\subset(-\pi, \pi)$,

$$|(-\pi,\ \pi)-B|=|(-\pi,\ \pi)-B_1|+\sum_{p=1}^{\infty}|B_p-B_{p-1}|<\varepsilon.$$

由(4)，我们见到在 B 上成立着

$$\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{j=j_{q-1}+1}^{j_q}\sum_{k=n_{i_j}}^{m_{i_j}}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=f(x),$$

并且是与 $\psi(x)$ 一致的. 证明完毕.

第 六 章

富 理 埃 系 数

1. 连续函数的富理埃系数

设 a_k, b_k 是 $\mathfrak{S}[f]$ 的勒贝格富理埃系数, 写着

$$a_{-k}=a_k,\ b_k=b_{-k},\ 2c_k=a_k-ib_k,$$

则 $\mathfrak{S}[f]$ 可以写成罗朗级数 $\sum_{-\infty}^{\infty}c_k e^{ikx}$. 由于

$$c_k=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{k}\right)\right\}e^{-ikx}\,dx,$$

所以

$$|c_k|\leqslant\frac{1}{2}\,\omega_1\left(f,\ \frac{\pi}{|k|}\right)\quad(k=\pm1,\ \pm2,\ \cdots),\tag{1}$$

这里 $\omega_p(f,\ t)=\sup\limits_{0<h\leq t}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+h)-f(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}$ $(p\geqslant1)$. 特别当 $f\in C_{2\pi}$ 时, $|c_k|\leqslant\frac{1}{2}\omega\left(f,\ \frac{\pi}{|k|}\right)$. 估计式(1)"定量"地叙述着黎曼-勒贝格定理. 当 $f\in L_2$ 时, $\omega_2(f,\ t)=O(t)\,(t\to0)$, $\sum|c_k|^2<\infty$. 另一方面, $C_{2\pi}$ 中有 $f(x)$ 适合

$$\sum(|a_n|^{2-\varepsilon}+|b_n|^{2-\varepsilon})=\infty\quad(0<\varepsilon<2).$$

这是卡勒曼(T. Carleman)于 1918 年指出的*). 我们将于下面 § 8 定理

*) 见"数学工作"(Acta Mathematica)第 41 卷.

4 采取哈戴-立脱尔伍德的函数来证卡勒曼的结果.

一般地说，当正值函数 $\varphi(u)$ 适合 $\varphi(+\infty)=+\infty$ 时，存在 $f\in C_{2\pi}$ 使 $\mathfrak{S}[f]$ 的系数 a_n, b_n 适合 $\sum(a_n^2+b_n^2)\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\right)=\infty$. 上述结果，是从 $\varphi(u)=\log u$ 的情况可以明白的(参见齐革蒙特(Zygmund)的"三角级数", 1935 年版 § 9·6,04.).

斯捷切金 (С. Б. Стечкин) 提出更一般的问题: 设正值函数列 $\{\Phi_n(u)\}(n\geqslant 0)$ 满足

$$\Phi_n(u)\uparrow \quad 和 \quad \frac{1}{u^2}\Phi_n(u)\downarrow,$$

在怎样情况下存在 $f(x)\in C_{2\pi}$ 适合 $\sum\Phi_n(\rho_n)=\infty$? 这里 $\rho_n^2=a_n^2+b_n^2$, a_n, b_n 是 $\mathfrak{S}[f]$ 的富理埃系数.

对于这个问题的回答，下述定理是基本的.

定理 1 对于上述斯捷切金的 $\{\Phi_n(u)\}$, 存在正数数列 $\{r_n\}$ 适合

$$\sum r_n^2<\infty \quad 和 \quad \sum\Phi_n(r_n)=\infty$$

的充要条件是: 对于任一正数 ξ, 满足 $\Phi_n(u_n(\xi))=\xi u_n^2(\xi)$ 的最大的 $u_n(\xi)$ 能使 $\sum u_n^2(\xi)=\infty$.

【证明】 必要性. 假如对于某一正数 ξ, $\sum u_n^2(\xi)<\infty$, 那末我们能证: $\sum r_n^2<\infty (r_n>0)$ 含有 $\sum\Phi_n(r)<\infty$, 这里 $\Phi_n(u_n(\xi))=\xi u_n^2(\xi)$.

固定 n, 当 $r_n\leqslant u_n(\xi)$ 时, $\Phi_n(r_n)\leqslant\Phi_n(u_n(\xi))=\xi u_n^2(\xi)$; 假如 $r_n>u_n(\xi)$, 那末

$$\Phi_n(r_n)=r_n^2\frac{\Phi_n(r_n)}{r_n^2}\leqslant r_n^2\frac{\Phi_n(u_n^2(\xi))}{u_n^2(\xi)}=\xi r_n^2.$$

总而言之, $\Phi_n(r_n)\leqslant\xi(r_n^2+u_n^2(\xi))$. 从而 $\sum\Phi_n(r_n)<\infty$.

充分性. 现在证明 $\sum u_n^2(\xi)=\infty (\Phi_n(u_n(\xi))=\xi u_n^2(\xi))$ 含有 $\sum\Phi_n(r_n)=\infty$. 这里 $r_n>0$, $\sum r_n^2<\infty$. 假如对于任一正数 ξ, 必有 n 使 $u_n(\xi)=\infty$, 那末 $u_{n_k}(k)=\infty (k=1, 2, \cdots)$. 从而

$$\lim_{u\to\infty}u^{-2}\Phi_{n_k}(u)\geqslant k,\ \Phi_{n_k}(u)\geqslant ku^2 \quad (u>0,\ k=1,\ 2,\ \cdots).$$

置 $r_{n_k}=\frac{1}{k}(k=1, 2, \cdots)$, $r_n=0 (n\neq n_k)$, 则 $\sum r_n^2=\sum k^{-2}<\infty$. 另一方面,

$$\sum \Phi(r_n) \geqslant \sum \Phi_{n_k}(r_{n_k}) \geqslant \sum k r_{n_k}^2 = \sum_1^\infty k^{-1} = \infty.$$

现在考虑如下的情况：当 ξ 足够大时，一切 $u_n(\xi)$ 都是有限，但是级数 $\sum u_n^2(\xi)$ 发散. 假设 $g_n = \Phi_n(+0)$ 所成的级数 $\sum g_n = \infty$, $\sum r_n^2 < \infty$, 则

$$\sum \Phi_n(r_n) \geqslant \sum \Phi_n(+0) = \sum g_n = \infty.$$

假如级数 $\sum g_n$ 收敛. 不妨假设 $\sum g_n < 1$. 设 $0 < u < v$, 则

$$\Phi(u) \leqslant \Phi(v) \leqslant \frac{v^2}{u^2}\Phi(u) = \Phi(u) + \frac{v^2 - u^2}{u^2}\Phi(u).$$

当 $v < u + \eta(\varepsilon)$ 时，末项小于 ε. 由是可知 $\Phi(u)$ $(u > 0)$ 是一连续函数. 连续函数

$$\xi = \xi_n(u) = u^{-2}\Phi_n(u) \quad (u > 0)$$

的逆函数 $u_n(\xi)$ 是单调减少的，当 $u_n(\xi_0 + 0) \leqslant u \leqslant u_n(\xi_0)$ 时，$u^{-2}\Phi_n(u) = \xi_0$. 现在作如下的 $\{r_n\}$. 置 $n_0 = 0$, 假如 $n_0, \cdots, n_{k-1}$ 已经定义，由于

$$\sum_{n=n_{k-1}+1}^\infty \Phi_n(u_n(k^2)) = k^2 \sum_{n=n_{k-1}+1}^\infty u_n^2(k^2) = \infty,$$

我们可取 n_k 适合于

$$\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} \Phi_n(u(k^2)) \geqslant 1.$$

另一方面，

$$\lim_{\eta\to\infty} \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} \Phi_n(u_n(\eta)) = \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} g_n \leqslant \sum_{n=1}^\infty g_n < 1.$$

由是可知有 η_k 大于 k^2 而适合于

$$\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} \Phi_n(u_n(\eta_k + 0)) \leqslant 1 \leqslant \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} \Phi_n(u_n(\eta_k)).$$

从 $\Phi_n(u)$ 的连续性，当 $n_{k-1} < n \leqslant n_k$ 时，$[u_n(\eta_k + 0),\ u_n(\eta_k)]$ 中有 $u_n^*(\eta_k)$ 满足

$$\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} \Phi_n(u_n^*(\eta_k)) = 1, \quad \Phi_n(u_n^*(\eta_k)) = \eta_k u_n^{*2}(\eta_k) \quad (n_{k-1} < n \leqslant n_k).$$

当 $n_{k-1} < n \leqslant n_k$ 时，置 $r_n = u_n^*(\eta_k)$. 我们见到

$$\sum r_n^2=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} r_n^2=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n_{k-1}+1}^{n_k} u_n^{*2}(\eta_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\eta_k}\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k}\Phi_n(u_n^*(\eta_k))$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\eta_k}\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<\infty.$$

另一方面,

$$\sum\Phi_n(r_n)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k}\Phi_n(u_n^*(\eta_k))=\sum 1=\infty.$$

定理证毕.

定理 2 设 $0<p<2$, $\{n_k\}$是严格增加的一列自然数, $d_k\geqslant 0$, $\sum d_k^2=\infty$. 则必有 $f(x)\in C_{2\pi}$, 它的系数 a_n, b_n 适合

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k^{2-p}|\rho_{n_k}|^p=\infty,\qquad \rho_n^2=a_n^2+b_n^2.$$

这个结果显然可以从下述幂级数定理导出.

定理 3 对于定理 2 中的 p, $\{n_k\}$ 以及 $\{d_k\}$, 存在闭的单位圆 $|z|\leqslant 1$ 上的连续函数 $F(z)=\sum c_n z^n$ 适合

$$\sum d_k^{2-p}|c_{n_k}|^p=\infty.$$

事实上,函数 $f(x)=\operatorname{Re}F(e^{ix})$ 满足定理 2 的要求,这里 $|c_n|=\rho_n$.

当 $p=1$, $n_k=k$ 时,定理 3 是配赖(Paley)所建立的(伦敦数学会期刊 7, 1932).

我们要建立更一般的定理.

定理 4 设 $0<p<2$, 假如单调增加的正值函数 $\Phi_k(u)$ $(u>0)$ 能使 $u^{-p}\Phi_k(u)$ 为单调减少, 那末对于 $\{n_k\}$ $(n_k<n_{k+1})$, 有连续函数 $F(z)=\sum c_n z^n(|z|\leqslant 1)$ 适合

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_k(|c_{n_k}|)=\infty$$

的充要条件是有 d_k 适合 $d_k^2=\Phi_k(d_k)$ 以及 $\sum d_k^2=\infty$.

【证明】 必要性从定理 1 就明白. 证明条件的充分性, 不妨假设 $\Phi_k(u)>0(u>0)$. 首先建立不等式

$$\sum_{k=1}^{N}\Phi_k(r_k)\geqslant\sum_{k=1}^{N}d_k^{2-p}r_k^p-\sum_{k=1}^{N}r_k^2\quad(r_k\geqslant 0).$$

当 $r_k\geqslant d_k$ 时，$d_k^{2-p}r_k^p\leqslant r_k^2$；假如 $r_k<d_k$，那末由于 $d_k^2=\Phi_k(d_k)$ 以及 $u^{-p}\Phi_k(u)\downarrow$，我们见到

$$d_k^{2-p}=\frac{d_k^2}{\Phi_k(d_k)}d_k^{-p}\Phi_k(d_k)\cdot r_k^p\leqslant r_k^{-p}\Phi_k(r_k)\cdot r_k^p=\Phi_k(r_k),$$

总之 $r_k^{2-p}r_k^p\leqslant\Phi_k(r_k)+r_k^2$. 这就证明了所要的不等式. 我们得到

$$\sum_{k=1}^{N}\Phi_k(|c_{n_k}|)\geqslant\sum_{k=1}^{N}d_k^{2-p}|c_{n_k}|^p-\sum_{k=1}^{N}|c_{n_k}|^2.$$

假如定理 3 是真的，那末从 $\sum_1^N d_k^{2-p}|c_{n_k}|^p\to\infty\,(N\to\infty)$ 以及

$$\sum_1^N|c_{n_k}|^2\leqslant\sum|c_n|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F(e^{i\theta})|^2d\theta<\infty,$$

我们见到 $\sum\Phi_k(|c_{n_k}|)=\infty$. 这就证明了定理 4. 因此，我们只要证明定理 3. 但是我们还要建立概括性更强的定理. 我们有

定理 5 设 $\Phi_k(u)\;(u>0,\;k=1,\,2,\,\cdots)$ 是一正值函数列，$0<p<2$；每一 $\Phi_k(u)$ 满足下列两条件之一：

(i) $\Phi_k(x)\uparrow$，$u^{-p}\Phi_k(u)\downarrow$；

(ii) $u^{-p}\Phi_k(u)\uparrow$，$u^{-2}\Phi_k(u)$ 从 $+\infty$ 单调减少.

对于自然数列 $n_1<n_2<\cdots$，存在连续函数 $F(z)=\sum c_kz^k\;(|z|\leqslant 1)$ 适合 $\sum\Phi_k(|c_{n_k}|)=\infty$ 的充要条件是：当 $\xi>0$ 时，方程

$$\Phi_n(u_n(\xi))=\xi u_n^2(\xi)$$

的最大根 $u_n(\xi)$ 满足 $\sum u_n^2(\xi)=\infty$.

我们只要证明条件的充分性就好了. 设满足(i)的 k 的全体为 K_1，满足(ii)的 k 的全体为 K_2. 那末对于任何正数 ξ，两个关系

$$\sum_{k\in K_1}u_k^2(\xi)=\infty\quad\text{或}\quad\sum_{k\in K_2}u_k^2(\xi)=\infty$$

必有一个成立. 假如前者成立，那末由定理 4，存在连续函数 $F(z)=\sum c_kz^k\;(|z|\leqslant 1)$ 适合 $\sum\Phi_k(|c_{n_k}|)=\infty$.

现在对于 $\sum\limits_{k\in K_2}u_k^2(\xi)=\infty$ 的情况，来导出 $\sum\Phi_k(|c_{n_k}|)=\infty$. 首先建立几个引理.

引理1 设 $0\leqslant M<N$, $B>0$, $D_M>0$, $D_k=D_M+\sum_{\kappa=M+1}^{k} d_\kappa^2$, 则在(ii)的情况,方程组

$$\frac{B^p d_k^2}{(\sqrt{D_k})^p}=\Phi_k\left(\frac{Bd_k}{\sqrt{D_k}}\right)\quad(k=M+1,\ \cdots,\ N)$$

关于 d_{M+1}, d_{M+2}, $\cdots$, d_N 有唯一的正数解. 当 $u_n(\xi)$ 是

$$\Phi_n(u_n(\xi))=\xi u_n^2(\xi)\quad(\xi>0)$$

的最大解时, $\sum u_n^2(\xi)=\infty$ 的话, $\sum_{k=M+1}^{N} d_k^2\to\infty(N\to\infty)$.

【证明】 函数 $\varphi_k(u)=u^{-p}\Phi_k(u)$ 和 $u^{p-2}\varphi_k(u)$ 分别是单调增加和单调减少的,当 $u>0$ 时,都是连续的. 所设方程组可以改写为

$$d_k^{2-p}=\varphi_k\left(\frac{Bd_k}{\sqrt{D_k}}\right)\quad(k=M+1,\ \cdots,\ N).$$

假设 d_{M+1}, $\cdots$, d_{k-1} 已经获得, 我们要证存在唯一的正数 d_k 适合于方程组. 假如 $D_{k-1}=0$, 那末"k"的方程变成

$$d_k^{2-p}=\varphi_k(B),$$

从而得到 $d_k=(\varphi_k(B))^{\frac{1}{2-p}}$. 假如 $D_{k-1}>0$, 那末我们利用函数

$$\psi_k(u)=\frac{u^{2-p}}{\varphi_k\left(\dfrac{Bu}{\sqrt{D_{k-1}+u^2}}\right)}$$

和变数

$$t=t(u)=\frac{Bu}{\sqrt{D_{k-1}+u^2}},\quad u=\frac{t\sqrt{D_{k-1}}}{\sqrt{B^2-t^2}}.$$

由于 $dt/du=BD_{k-1}(D_{k-1}+u^2)^{-3/2}>0$, 所以 $t(u)$ 从 $t(0)=0$ 上升到 $t(\infty)=\infty$. 我们见到 u 的函数

$$\psi_k(u)=\frac{D_{k-1}^{1-p/2}}{(B^2-t^2)^{1-p/2}}\cdot\frac{t^{2-p}}{\varphi_k(t)}\quad(t=t(u))$$

是单调增加的, 没有不连续点$(0<u<\infty)$. 易知 $\psi_k(0)=0$, $\psi_k(\infty)=\infty$, 从而必有唯一的正数 $u=d_k$ 适合于 $\psi_k(u)=1$. 因此

$$d_k^{2-p}=\varphi_k\left(\frac{Bd_k}{\sqrt{D_k}}\right).$$

我们还要证明 $d_{M+1}^2+\cdots+d_N^2=O(1)\ (N\to\infty)$ 不能成立. 假如 D_k

$\to D_\infty<\infty$，那末用 u_k 表示 $Bd_k/\sqrt{D_k}$ 的话，

$$\Phi_k(u_k)=D_k^{1-p/2}B^{p-2}u_k^2<D_\infty^{1-p/2}B^{p-2}u_k^2 \quad (k=M+1, \cdots).$$

但是适合于 $\Phi_k(u_k)=D^{1-p/2}B^{p-2}v_k^2$ 的 v_k 能使 $\sum v_k^2=\infty$. 从

$$u_k^{-2}\Phi_k(u_k)<v_k^{-2}\Phi_k(v_k)$$

得到 $\sum\limits_{M+1}^{\infty} u_k^2=\infty$. 后者等于

$$B^2\sum_{M+1}^{\infty} d_k^2/D_k\leqslant B^2\sum_{M+1}^{\infty} d_k/D_{M+1},$$

从而 $\sum\limits_{M+1}^{\infty} d_k^2=\infty$.

引理 2 设 $r_k\geqslant 0(k=M+1, \cdots, N)$，则在引理 1 的情况，

$$\sum_{M+1}^{N}\Phi_k(r_k)\geqslant\sum_{M+1}^{N} d_k^{2-p}r_k^p-\frac{B^p}{1-\dfrac{p}{2}}\left\{\sum_{M+1}^{N} d_k^2\right\}^{1-p/2}.$$

【证明】 当 $r_k\leqslant g_k=Bd_k/\sqrt{D_k}$ 时，$d_k^{2-p}r_k^p\leqslant d_k^{2-p}g_k^p$. 假如 $r_k>g_k$，那末，由于 $u^{-p}\Phi_k(u)\uparrow$，所以

$$d_k^{2-p}r_k^p=\frac{d_k^{2-p}}{g_k^{-p}\Phi_k(g_k)}g_k^{-p}\Phi_k(g_k)r_k^p\leqslant\Phi_k(r_k).$$

总而言之，

$$\sum_{M+1}^{N} d_k^{2-p}r_k^p\leqslant\sum_{M+1}^{N}\Phi_k(r_k)+\sum_{M+1}^{N} d_k^{2-p}g_k^p.$$

末项等于

$$B^p\sum_{M+1}^{N}\frac{D_k-D_{k-1}}{D_k^{p/2}}\leqslant B^p\int_{D_M}^{D_N}u^{-p/2}du=B^p\frac{D_N^{1-p/2}-D_M^{1-p/2}}{1-\dfrac{p}{2}}.$$

分子小于 $(D_N-D_M)^{1-p/2}=\left(\sum\limits_{M+1}^{N} d_k^2\right)^{1-p/2}$. 由是得到所要的不等式.

要完成定理 5 的证明，取正项级数 $\sum\limits_{1}^{\infty}\varepsilon_s<\infty$，置 $d_0=0$，$k=0$，

$$B_s=\left[\frac{A(2-p)}{4}\right]^{1/p}\varepsilon_s \quad (s=1, 2, 3, \cdots),$$

在 $k_0, k_1, \cdots, k_{s-1}$ 和 $d_0, d_1, \cdots, d_{s-1}$ 取定后，置(利用引理 1)

$$d_{k,s}^{2-p}=\left(\frac{B_s d_{k,s}}{\sqrt{D_{k,s}}}\right)^{-p}\left(\frac{B_s d_{k,s}}{\sqrt{D_{k,s}}}\right),$$

$$D_{k,s}=D_{k_{s-1}}+\sum_{\kappa=k_{s-1}+1}^{k_s} d_{\kappa,s}^2.$$

由引理 1，末项当 $k\to\infty$ 时，趋向于 $+\infty$，因此存在着如下的 k_s：

$$\left\{\sum_{k=k_{s-1}+1}^{k_s} d_{k,s}^2\right\}^{1-p/2} \geqslant \varepsilon_s^{-p} > \left\{\sum_{k=k_{s-1}+1}^{k_s-1} d_{k,s}^2\right\}^{1-p/2},$$

当 $k_{s-1}+1\leqslant k\leqslant k_s$ 时，我们定义 $d_k=d_{k,s}$，那末存在

$$P_s(z)=\sum_{n=k_{s-1}+1}^{k_s} c_n z^n$$

不全等于零而适合于

$$\sum_{k_{s-1}+1}^{k_s} d_k^{2-p}|c_{n_k}|^p \geqslant A\left\{\sum_{k_{s-1}+1}^{k_s} d_k^2\right\}^{1-p/2}\|P_s(z)\|^p,$$

$$\|P_s(z)\|=\varepsilon_s.$$

结合到引理 2 的不等式，我们见到

$$\sum_{k=k_{s-1}+1}^{k_s} \Phi_k(|c_{n_k}|) \geqslant \left\{A\|P_s(z)\|^p-\frac{B_s^p}{1-\dfrac{p}{2}}\right\}\left\{\sum_{k=k_{s-1}+1}^{k_s} d_k^2\right\}^{1-p/2}$$

$$=\frac{A}{2}\varepsilon^p\left\{\sum_{k_{s-1}+1}^{k_s} d_{k,s}^2\right\}^{1-p/2} \geqslant \frac{A}{2}\quad (s=1,\ 2,\ \cdots).$$

由于 $\sum\varepsilon_s<\infty$，所以 $F(z)=\sum P_s(z)=\sum c_n z^n$ 在 $|z|\leqslant 1$ 上是连续的，但是

$$\sum\Phi_k(|c_{n_k}|)\geqslant\frac{A}{2}\sum 1=\infty.$$

定理 5 证毕.

从定理 5 我们可述

定理 6 设 $\{n_k\}$ 和 $\{\Phi_k(u)\}$ 是定理 5 中所设的自然数列和函数列. 对于这些叙列，存在连续函数的富理埃级数 $\sum\rho_n\cos(nx-\alpha_n)\,(\rho_n\geqslant 0)$ 适合 $\sum\Phi_k(\rho_{n_k})=\infty$ 的充要条件是：当 $\xi>0$ 时，方程 $\Phi_n(u_n(\xi))=\xi u_n^2(\xi)$ 的最大根 $u_n(\xi)$ 能使级数 $\sum u_n^2(\xi)$ 趋向于 $+\infty$.

卡勒曼提出前述的问题后，葛朗瓦(T. H. Gronwall, 1921)就证得如下的定理：对于函数 $\varphi(u)\,(u>0)$，$\varphi(+0)=+\infty$，存在连续函数 $F(z)=\sum c_n z^n\,(|z|\leqslant 1)$ 适合 $\sum|c_n|^2\varphi(|c_n|)=\infty$. 配赖(Paley, 1932)与西童(Sidon, 1934)分别拓广了葛朗瓦的定理，他们证明

定理 7 对于任一自然数列 $n_k(n=1, 2, \cdots)$ 和正值函数 $\varphi(u)$ $(u>0)$，$\varphi(+0)=+\infty$，在 $|z|\leqslant 1$ 上存在连续函数 $\sum c_n z^n$ 满足 $\sum|c_{n_k}|^2\varphi(|c_{n_k}|)=\infty$.

【证明】 对于 $\varphi(u)$，我们证明有如下的单调减少函数 $\varphi_1(u)$：

$$0<\varphi_1(u)\leqslant\varphi(u)\quad(0<u\leqslant u_0),$$

$$u\varphi_1(u)\uparrow,\ \varphi_1(+0)=+\infty.$$

设 $0\leqslant\varphi_2(u)\leqslant\varphi(u)$，$\varphi_2(u)\downarrow$，$\varphi_2(+0)=+\infty$，则当 $\varphi_2(u)\geqslant 1\ (0<u\leqslant u_0)$ 时，函数

$$\varphi_1(u)=\frac{1}{u}\inf_{u\leqslant\eta\leqslant u_0}\eta\varphi_2(\eta)\quad(0<u\leqslant u_0),$$

$$\varphi_1(u)=\varphi_1(u_0)\quad(u>u_0).$$

当 $0<u\leqslant u_0$ 时，显然 $\varphi_1(u)\leqslant\varphi_2(u)$，$\varphi_1(u)\geqslant 1$，因此 $0<\varphi_1(u)\leqslant\varphi(u)$，函数 $u\varphi_1(u)$ 是单调增加的. 现在证明：当 $0<u<v\leqslant u_0$ 时，

$$\varphi_1(u)\geqslant\varphi_1(v).$$

假如 $\eta\varphi_2(\eta)$ 在 $[u, u_0]$ 上的下界等于它在 $[v, u_0]$ 上的下界，那末

$$\varphi_1(u)=\frac{1}{u}\inf_{u\leqslant\eta\leqslant u_0}\eta\varphi_2(\eta)>\frac{1}{v}\inf_{v\leqslant\eta\leqslant u_0}\eta\varphi_2(\eta)=\varphi_1(v).$$

假如不然，那末我们见到

$$\varphi_1(u)=\frac{1}{u}\inf_{u\leqslant\eta\leqslant v}\eta\varphi_2(\eta)\geqslant\varphi_2(v)\geqslant\varphi_1(v).$$

因此 $\varphi_1(u)$ 在 $[0, u_0]$ 上是单调减少的. 我们还要证明 $\varphi_1(+0)=+\infty$；设 $0<\varepsilon\leqslant u_0$，则

$$\varphi_1(u)=\min\left\{\frac{1}{u}\inf_{u\leqslant\eta\leqslant\varepsilon}\eta\varphi_2(\eta),\ \frac{1}{u}\inf_{\varepsilon\leqslant\eta\leqslant u_0}\eta\varphi_2(\eta)\right\}$$

$$\geqslant\min\left\{\varphi_2(\varepsilon),\ \frac{\varepsilon}{u}\right\}.$$

从而 $\qquad\varphi_1(u)\geqslant\min(\varphi_2(\sqrt{u}),\ 1/\sqrt{u})\to+\infty\quad(u\to 0).$

于定理 5，设 $\Phi_k(u)=u^2\varphi_1(u)\ (k=1, 2, \cdots)$，则因

$$u^{-1}\Phi(u)=u\varphi_1(u)\uparrow,\ u^{-2}\Phi_k(u)=\varphi_1(u)\downarrow,$$

$$u^{-2}\Phi_k(u)=\varphi_1(u)\to\infty\quad(u\to 0);$$

并且 $\varphi_1(u_k(\xi))=\xi$, $u_k(u)\equiv u(\xi)>0(\xi>0)$. 故由定理 5, 存在 $F(z)=\sum c_k z^k(|z|\leqslant 1)$ 属于 C 而满足 $\sum\Phi_k(|c_{n_k}|)=\sum|c_{n_k}|^2\varphi_1(|c_{n_k}|)=\infty$. 从而 $\sum|c_{n_k}|^2\varphi(|c_{n_k}|)=\infty$. 定理证毕.

巴拿赫 (Banach) 于 1930 年证得下述定理: 存在收敛于零的正数数列 $\{\varepsilon_n\}$ 使得有连续函数的富理埃级数 $\sum\rho_n\cos(nx-\alpha_n)$ $(\rho_n\geqslant 0)$ 适合 $\sum\rho_n^{2-\varepsilon_n}=\infty$(匈牙利的数学杂志). 斯捷切金把它拓广如下:

定理 8 对于 $\{\varepsilon_k\}$ $(0<\varepsilon_k<2)$, 存在连续函数 $F(z)=\sum c_n z^n(|z|\leqslant 1)$ 使得 $\sum|c_{n_k}|^{2-\varepsilon_k}=\infty$ 的充要条件是: 对于 $\eta>0$,

$$\sum\eta^{\frac{1}{\varepsilon_k}}=\infty.$$

这是可以从定理 5 导出的.

现在讨论下述问题: 连续函数的富理埃系数除开 $o(1)$ 而外, 还有更多的性质可说吗? 特别是它们可以大到何种程度? 下面的命题具体回答这一问题.

定理 9 对于任一趋向于零的正数数列, $C_{2\pi}$ 中有 $f(x)$, 它的正弦系数适合

$$b_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\neq O(\varepsilon_n).$$

【证明】 设 $n_1=2$, n_{k+1} 是 n_k 的整数倍而大于 $(2n_k)^5$, 且设

$$\int_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{2\pi}{n_k}}\sin^4 n_{k+1}x\,dx>\frac{1}{5n_k},$$

$$\sqrt{\varepsilon_{n_{k+1}}}+\left|\int_{\frac{\pi}{n_{k-1}}}^{\pi}f(x)\sin n_{k+1}x\,dx\right|\leqslant\frac{1}{n_k^5}.$$

在区间$\left(\frac{\pi}{n_k},\ \frac{2\pi}{n_k}\right)$上, 定义 $f(x)=n_k^{-3}\sin^3 n_{k+1}x$. 在这些区间的外面, $f(x)=0(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$; $f(x+2\pi)\equiv f(x)$. 因此, 当 n_k 已定时, $f(x)$ 在$\left(\frac{\pi}{n_{k-1}},\ \pi\right)$上已经定好, 取 n_{k+1} 足够大, 可使上记不等式成立. 由是

$$\pi b_{n_{k+1}}(f)=\int_0^{\frac{2\pi}{n_{k+1}}}+\int_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{2\pi}{n_k}}+\int_{\frac{\pi}{n_{k-1}}}^{\pi} f(x)\sin n_{k+1}x\,dx$$

$$>-\frac{2\pi}{n_{k+1}}+\frac{1}{5n_k^4}-\frac{1}{n_k^5}+\sqrt{\varepsilon_{n_{k+1}}}>\sqrt{\varepsilon_{n_{k+1}}}.$$

证明完毕.

2. 收敛于零的数列如何成为富理埃系数

当 $a_n\to 0$ 时，$\sum a_n\cos nx$ 与 $\sum a_n\sin nx$ 可能都不是富理埃级数，甚至在

$$a_n\downarrow 0,\ \sum|a_n-a_{n+1}|<\infty$$

的情况，$\{a_n\}$ 也有可能不成为富理埃系数．例如 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sin nx/\log n$ 的系数满足上面两个条件，并且级数到处收敛，但是它并不是一个勒贝格-富理埃级数；事实上，级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-\cos nx)/n\log n$ 在 $x=0$ 不收敛.

另一方面，假如$\{a_n\}$是拟凸的，就是说，$\sum|(n+1)\Delta^2a_n|<\infty$，那末当 $a_n=o(1)$ 时，$\frac{1}{2}a_0+\sum\limits_1^{\infty}a_n\cos nx$ 概敛于一个勒贝格可积函数 $f(x)$，而成为 $\mathfrak{S}[f]$．事实上，用 $D_n(x)$，$K_n(x)$分别表示狄里克莱核与费耶核，那末 $S_n(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum\limits_1^{n}a_\nu\cos\nu x$ 等于

$$\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)\Delta^2a_\nu K_\nu(x)+K_n(x)(n+1)\Delta a_{n+1}+D_n(x)a_{n+1}.$$

由是

$$S_n(x)\to\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu+1)\Delta^2a_\nu K_\nu(x),$$

$$|f(x)|\leqslant\sum(\nu+1)|\Delta^2a_\nu|K_\nu(x)\in L(0,\ 2\pi).$$

对于 $a_n\downarrow 0$ 的正弦级数 $\sum a_n\sin nx$，下述定理是值得留意的.

定理 1*) 当 $a_n\downarrow 0$ 时，级数 $\sum a_n\sin nx$ 匀敛的充要条件是

$$na_n=o(1).$$

【证明】 由于 $a_n\downarrow 0$，所以 $\sum a_n\sin nx$ 到处收敛于一个奇函数，在

*) 仓地(Chaundy)和乔立夫(Jollife)于 1916 年在伦敦数学会的杂志上发表的.

$[\varepsilon, \pi]$ $(\varepsilon>0)$上，收敛是均匀的．假如它在$[0, \pi]$上匀敛，那末

$$r_n=\sum_{n+1}^{2n} a_\nu \sin\nu\frac{\pi}{4n}\to 0 \quad (n\to\infty),$$

$$r_n\geqslant \sin\frac{\pi}{4}a_n\sum_{n+1}^{2n}1=na_n\sin\frac{\pi}{4}\to 0 \quad (n\to\infty).$$

这证明了条件的必要性．现在证明：当$na_n=o(1)$时，$\sum a_n\sin nx$在$\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$上匀敛．记

$$R_n(x)=a_n\sin nx+a_{n+1}\sin(n+1)x+\cdots.$$

当$0<x\leqslant\frac{\pi}{4}$时，写着$\left[\frac{1}{x}\right]+1=N(x)=N$，$R_n(x)=R_{n1}(x)+R_{n2}(x)$，这里

$$R_{n1}(x)=a_n\sin nx+\cdots+a_{N-1}\sin(N-1)x,$$

$$R_{n2}(x)=a_N\sin Nx+a_{N+1}\sin(N+1)x+\cdots.$$

假如$N\leqslant n$，那末$R_{n1}(x)=0$，$R_{n2}(x)=R_n(x)$，因此$R_{n1}(x)\neq 0$的话，

$$|R_{n1}(x)|\leqslant x\sum_{\nu=n}^{N-1}\nu a_\nu\leqslant\frac{1}{N-1}(N-n)\max_{\nu\geqslant n}\nu a_\nu=o(1),$$

另一方面，由于

$$|\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin\nu x|\leqslant\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\leqslant\frac{4}{x} \quad \left(0<x\leqslant\frac{\pi}{4}\right),$$

所以

$$|R_{n2}(x)|\leqslant\sum_{\nu=N}^{\infty}(a_\nu-a_{\nu+1})\frac{4}{x}+a_N\frac{4}{x}$$

$$=\frac{8a_N}{x}\leqslant 8Na_N=o(1).$$

证明完毕．

拟凸的$\{a_n\}$，$a_n=o(1)$的话，能确保$\sum a_n\cos nx$成一富理埃级数．但是对于正弦级数，成立着如下的

定理 2 假如$\{a_n\}$是一拟凸的数列，$a_n\to 0$，那末当$\sum|a_n|/n<\infty$时，$\sum a_n\sin nx$收敛于一个$L(0, \pi)$中的函数．这里级数$\sum a_n/n$绝对收敛的条件不能减轻为级数$\sum a_n/n$的收敛．

这是捷里亚戈夫斯基(Теляковский, М. сб. 63 (105) 3, 1964)的定理.

【证明】 定理的前半部分是从下面的不等式可以明白的:

$$\left|\int_{\frac{1}{s+1}}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx\right| dx - \sum_{k=1}^{s} \frac{|a_k|}{k}\right| \leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} k\,|\Delta^2 a_{k-1}|,$$

这里的 C 是一个绝对常数.

经过两次和差变换, $\sum_{k=0}^{n} a_k \sin kx$ 变为

$$\sum_{k=0}^{n-2} \Delta^2 a_k \overline{F}_k(x) + \Delta a_{n-1} \overline{F}_{n-1}(x) + a_n \overline{D}_n(x),$$

这里

$$\overline{D}_0(x) = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2},$$

$$\overline{D}_k(x) = \overline{D}_0(x) + \sin x + \cdots + \sin kx = -\cos \frac{2k+1}{2} x \Big/ 2 \sin \frac{x}{2},$$

$$\overline{F}_k(x) = \overline{D}_0(x) + \overline{D}_1(x) + \cdots + \overline{D}_k(x) = -\sin (k+1)x \Big/ 4 \sin^2 \frac{x}{2}.$$

假设 $a_0=0$, 那末由于 $a_n=o(1)$, $\Delta a_{n-1}=o(1)$, 所以当 $0<x\leqslant\pi$ 时, 我们得到

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin kx = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^2 a_k \overline{F}_k(x).$$

写着 $\gamma(u)=\min(1, u)$, 我们见到

$$\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin kx}{x^2} - \frac{\gamma(kx)}{x^2}\right| dx = k\int_0^{k\pi} \frac{|\sin x - \gamma(x)|}{x^2}\, dx$$
$$< k\int_0^{\infty} \frac{|\sin x - \gamma(x)|}{x^2}\, dx.$$

由于

$$\int_0^{\pi}\left|\frac{\gamma(kx)}{x^2} + \overline{F}_{k-1}(x)\right| dx$$
$$\leqslant \int_0^{\pi}\left|\frac{\gamma(kx)}{x^2} - \frac{\sin kx}{x^2}\right| dx + \int_0^{\pi}\left|\frac{\sin kx}{x^2} - \frac{\sin kx}{4 \sin^2 \frac{x}{2}}\right| dx$$

的末项是均匀有界, 所以左端等于 $O(k)$. 因此有绝对常数 B 适合于

$$\left|\int_{\frac{1}{s+1}}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin kx\right|dx-\int_{\frac{1}{s+1}}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\Delta^2a_{k-1}\frac{\gamma(kx)}{x^2}\right|dx\right|$$

$$\leqslant B\sum_{k=1}^{\infty}k|\Delta^2a_{k-1}|.$$

当 $\frac{1}{p+1}\leqslant x\leqslant\frac{1}{p}$ 时，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Delta^2a_{k-1}\gamma(kx)x^{-2}=\sum_{k=1}^{p}\Delta^2a_{k-1}\frac{kx}{x^2}+\sum_{k=p+1}^{\infty}\Delta^2a_{k-1}\frac{1}{x^2}.$$

由于

$$\sum_{k=1}^{p}k\Delta^2a_{k-1}=-a_p-p\Delta a_p,$$

$$\sum_{k=p+1}^{\infty}\Delta^2a_{k-1}=\Delta a_p,$$

$$\left|\frac{1}{p}-\int_{\frac{1}{p+1}}^{\frac{1}{p}}\frac{dx}{x}\right|\leqslant\frac{1}{p^2},$$

所以

$$\left|\int_{\frac{1}{p+1}}^{\frac{1}{p}}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\Delta^2a_{k-1}\frac{\gamma(kx)}{x^2}\right|dx-\frac{|a_p|}{p}\right|\leqslant\frac{|a_p|}{p^2}+|\Delta a_p|.$$

又因

$$\max|a_k|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}|\Delta a_k|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}k|\Delta^2a_{k-1}|,$$

$$\sum_{p=1}^{s}\left(\frac{|a_p|}{p^2}+|\Delta a_p|\right)=O\left(\sum_{k=1}^{\infty}k|\Delta^2a_{k-1}|\right),$$

所以存在绝对常数 C 如前述.

现在作出下面的 $\{a_k\}$ 来证定理的后半部分. 设 m 是一正整数，当 $k\in[2^{m+1}, 2^{2m-1}]$ 时，定 $a_k=1$；当 $k\leqslant 2^m$ 以及 $k\geqslant 2^{2m}$ 时，定 $a_k=0$. 假如 $k\in[2^m, 2^{m+1}]$，那末 $a_k=(k-2^m)2^{-m}$. 假如 $k\in[2^{2m-1}, 2^{2m}]$，那末 $a_k=(2^{2m}-k)2^{-(2m-1)}$. 从这些 a_k 所得的三角多项式 $\sum a_k\sin kx$，记它做 $T_1(m, x)$. 现在计算 $T_1(m, x)$的 $\sum k|\Delta^2a_{k-1}|$：

$$\sum_{k=1}^{\infty}k|\Delta^2a_{k-1}|=2^m\frac{1}{2^m}+2^{m+1}\frac{1}{2^m}+2^{2m-1}\frac{1}{2^{2m-1}}+2^{2m}\frac{1}{2^{2m-1}}=6,$$

其次证明 $\sum a_k/k = m\log 2+O(1)$. 事实上,

$$\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} \frac{k-2^m}{2^m}\cdot\frac{1}{k} < \sum \frac{1}{2^m} = 1,$$

$$\sum_{k=2^{m+1}}^{2^{2m}-1} \frac{1}{k} = \log 2^{2m-1-(m+1)} + O(1) = m\log 2+O(1).$$

我们要证正弦级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}k}\left\{T_1(2^{2k-1}, x) - \frac{1}{2}T_1(2^{2k}, x)\right\}$$

的系数数列 $\{a_k\}$ 还是满足拟凸条件以及 $\left|\sum a_k/k\right| < \infty$. 事实上,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\left|\Delta^2 a_{k-1}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6+3}{2^{2k}k} < \infty,$$

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k}\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k-1}\log 2+O(1) - \frac{1}{2}2^{2k}\log 2+O(1)}{2^{2k}k}\right|$$

$$= O\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}k}\right) < \infty.$$

但是

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left|2^{2k-1}\log 2+O(1)\right| + \left|\frac{1}{2}2^{2k}\log 2+O(1)\right|}{2^{2k}k} = \infty.$$

从所证得的不等式,知这个正弦级数并不是富理埃级数. 证毕.

假如 $\sum a_n\cos nx$ 和 $\sum a_n\sin nx$ 都是富理埃级数, 那末 $\{a_n\}$ 具有怎样的性质? 早在 1926 年,哈戴-立脱尔伍德在(德国)数学年刊 97 卷上讨论了这个问题,他们的定理可述如下:

定理 3 假如 $\sum a_n\cos nx$ 和 $\sum a_n\sin nx$ 都是富理埃级数, 那末级数 $\sum |a_n|/n$ 收敛.

【证明】 定理 3 等价于下述命题: 设 $z=re^{i\theta}$ $(0<r<1)$, 当 $r\to 1$ 时,假如

$$\int_0^{2\pi}\left|\sum_0^{\infty} c_n z^n\right| d\theta = O(1),$$

那末 $\sum |c_n|/n$ 收敛. 现在我们证明这个幂级数的定理.

假如 $f(z)=\sum c_n z^n$ 在 $|z|<1$ 中无零点,那末存在如下的 $g(z)$:

$$f(z)=(g(z))^2,\ \ g(z)=\sum_0^\infty a_n z^n,\ \ \sum|a_n|^2<\infty.$$

因此，我们只要从 $\sum|a_n|^2<\infty$ 导出 $\sum\limits_{m=1}^\infty\sum\limits_{n=1}^\infty\frac{|a_m a_n|}{m+n}<\infty$。事实上，后者可以写成

$$\sum_{k=2}^\infty\frac{1}{k}\sum_{m+n=k}|a_m a_n|<\infty.$$

由于 $c_k=\sum\limits_{m+n=k}a_m a_n$，所以上式包含 $\sum|c_n|/n<\infty$. 由是我们只要证明：当 $u_n>0$, $v_n>0$ 时，$\sum u_n^2<\infty$ 和 $\sum v_n^2<\infty$ 含有

$$\sum\frac{u_m v_n}{m+n}<\infty.$$

写着 $u_1+\cdots+u_n=S_n$, $S_0=0$, $\sigma_n=\frac{S_n}{n}(n>0)$. 由于

$$\begin{aligned}\sigma_n^2-2u_n\sigma_n&=\sigma_n^2-2n\sigma_n^2-2(n-1)\sigma_n\sigma_{n-1}\\&\leqslant\sigma_n^2(1-2n)+(n-1)(\sigma_n^2+\sigma_{n-1}^2)\\&\leqslant-n\sigma_n^2+(n-1)\sigma_{n-1}^2,\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{\nu=1}^n\sigma_\nu^2-2\sum_{\nu=1}^n u_\nu\sigma_\nu\leqslant-n\sigma_\nu^2\leqslant0,$$

从而得到

$$\sum_1^n\sigma_\nu^2\leqslant2\sqrt{\sum_1^n u_\nu^2\cdot\sum_1^n\sigma_\nu^2},$$

$$\sum_1^n\sigma_\nu^2\leqslant4\sum_1^n u_\nu^2.$$

由是可知 $\sum u_\nu^2<\infty$ 含有 $\sum\sigma_\nu^2<\infty$. 现在

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^\infty\sum_{m<n}\frac{u_m v_n}{m+n}&\leqslant\sum_{n=1}^\infty\sum_{m=1}^n\frac{u_m v_n}{n}\\&=\sum_{n=1}^\infty v_n\sigma_n\leqslant\sqrt{\sum v_n^2\cdot\sum\sigma_n^2}<\infty.\end{aligned}$$

同样可证

$$\sum_{n=1}^\infty\sum_{m>n}\frac{u_m v_n}{m+n}<\infty.$$

从而证得 $\sum\sum u_m v_n/(m+n)<\infty$.

假如 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 具有零点 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$; $|\alpha_1|\leqslant|\alpha_2|\leqslant\cdots$; $\alpha_1\neq 0$. 那末置

$$b_n(z)=\prod_{k=1}^{n}|\alpha_k|\frac{1-\dfrac{z}{\alpha_k}}{1-\bar{\alpha}_k z},$$

$$F_n(z)=\frac{f(z)}{b_n(z)}$$

的话, $F_n(z)$ 在 $|z|\leqslant|\alpha_n|$ 上无零点. 由于 $b_n(z)$ 在 $|z|=1$ 的模等于 1, 所以对于 $\varepsilon(0<\varepsilon<1)$ 取 r 甚近于 1, 可使 $|b(re^{i\theta})|\geqslant 1-\varepsilon$. 从而

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|F_n(re^{i\theta})|\,d\theta\leqslant\frac{1}{1-\varepsilon}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|\,d\theta=O\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right).$$

但是左端与 ε 无关系, 它是 $O(1)\,(r\to 1)$. 由是容易证明: 当 $n\to\infty$ 时, $b_n(z)\to b(z)$, $F_n(z)\to F(z)$,

$$|b_n(z)|\leqslant 1,\quad F(z)\neq 0\quad(|z|<1).$$

写着 $f(z)=F(z)-F(z)(1-b(z))$, 两项在 $|z|<1$ 中都无零点; 当 $F(z)=\sum c'_n z^n$, $F(z)(1-b(z))=\sum c''_n z^n$ 时, $c_n=c'_n-c''_n$. 从 $\sum|c'_n|/n<\infty$ 与 $\sum|c''_n|/n<\infty$ 得到 $\sum|c_n|/n<\infty$. 定理证毕.

假如 $\{a_k\}$ 是有界变差而趋向于零的数列, 再加上怎样的条件, 能断言 $\sum a_n\cos nx$ 或 $\sum a_n\sin nx$ 成为富理埃级数? 下面定理 4 和定理 5 都是捷里亚戈夫斯基于 1964 年的苏联科学院杂志(数学之辑)发表的(第 28 卷第 6 期).

定理 4 设 $\{a_k\}$ 是有界变差而趋向于零的数列, 它还满足条件

$$A_1=\sum_{n=2}^{\infty}\left|\sum_{1\leqslant k\leqslant\frac{n}{2}}\frac{\Delta a_{n-k}-\Delta a_{n+k}}{k}\right|<\infty,$$

那末 $\sum a_n\sin nx$ 成一富理埃级数的充要条件是:

$$A_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}<\infty.$$

当 $A_2<\infty$ 时, 存在绝对常数 C 适合于

$$I=\int_0^{\pi}\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx\right|dx\leqslant C\left(A_1+A_2+\sum_{1}^{\infty}|\Delta a_n|\right).$$

【证明】 我们从下面的定理5明白，三个条件 $a_n=o(1)$，$\sum|\Delta a_n|<\infty$ 以及 $A_1<\infty$ 已足保证 $\sum a_n\cos nx$ 是一个富理埃级数．假如 $\sum a_n\sin nx$ 也是富理埃级数，那末从定理3知道级数 A_2 必须收敛．这就建立了条件的必要性．

由是，我们只要证明存在绝对常数 C 适合于定理中的不等式．积分 I 等于

$$\int_0^\pi\left|\sum_{k=0}^\infty \Delta a_k\frac{\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right|dx\leqslant\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\left|\sum_{k=0}^\infty\Delta a_k\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right|\frac{dx}{x}$$

$$\leqslant\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\left|\sum_{k=0}^\infty\Delta a_k\cos(2k+1)x\right|\frac{dx}{x}.$$

由于，当 x 为偶数时，

$$\int_0^\pi\frac{\sin}{\cos}(2k+1)x\frac{\cos}{\sin}nx\,dx=\frac{1}{2k+1+n}\pm\frac{1}{2k+1-n},$$

假如 n 是奇数，那末积分等于零，所以

$$f(x)=\sum b_k\frac{\sin}{\cos}(2k+1)x$$

是一富理埃级数的话，$f(x)\operatorname{sgn}x$ 的富理埃级数是

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^\infty\left\{\sum_{k=0}^\infty b_k\left(\frac{1}{2k+1+2n}\pm\frac{1}{2k+1-2n}\right)\right\}\frac{\cos}{\sin}2nx.$$

波斯于“理论力学与分析的期刊5 (1956)”上证明：假如 $f(x)$ 和 $f(x)\operatorname{sgn}x$ 的富理埃级数都绝对收敛，那末

$$\frac{|f(x)|}{x}\in L(0,\pi)$$

并且成立着

$$\int_0^\pi\frac{|f(x)|}{x}dx$$

$$\leqslant A\left(\sum_k|b_k|+\sum_n\left|\sum_k\left(\frac{1}{2k+1+2n}\pm\frac{1}{2k+1-2n}\right)b_k\right|\right),$$

这里的 $\pm$ 依 $f(x)$ 是奇(+)或偶(−)而定，A 是绝对常数．

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{\infty}\Delta a_k\left(\frac{1}{2k\pm 2n}-\frac{1}{2k+1\pm 2n}\right)\right|$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{n\neq k\\n=1}}^{\infty}\frac{|\Delta a_k|}{2(k\pm n)(2k+1\pm 2n)}$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}|\Delta a_k|\left(\sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{2n(2n+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2n}\right)$$

$$\leqslant A\sum_{k=0}^{\infty}|\Delta a_k|,$$

所以结合到波斯的不等式，我们得到

$$I=\int_0^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta a_k\frac{\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right|dx$$

$$\leqslant\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\left|\sum_0^{\infty}\Delta a_k\cos(2k+1)x\right|\frac{dx}{x}$$

$$\leqslant A\left(\sum_k|\Delta a_k|+\sum_n\left|\sum_{k\neq n}\Delta a_k\left(\frac{1}{k+n}-\frac{1}{k-n}\right)\right|\right)$$

$$=A\left(\sum_k|\Delta a_k|+\sum_{n=1}^{\infty}|S_n'+S_n''+S_n'''+S_n^{\mathrm{IV}}|\right),$$

这里

$$S_n'=\sum_{0<k<\frac{n}{2}}\Delta a_k\left(\frac{1}{k+n}-\frac{1}{k-n}\right),$$

$$S_n''=\sum_{k>\frac{n}{2},\,k\neq n}\Delta a_k\frac{1}{k+n},$$

$$S_n'''=-\sum_{\frac{n}{2}<k<\frac{3n}{2}}\Delta a_k\frac{1}{k-n},$$

$$S_n^{\mathrm{IV}}=-\sum_{k>\frac{3}{2}n}\Delta a_k\frac{1}{k-n}.$$

由于

$$\frac{1}{k-n}-\frac{1}{k+n}=\frac{2}{n}+\frac{2k^2}{n(n^2-k^2)},$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}|S_n'|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{n}\left|\sum_{0<k<\frac{n}{2}}\Delta a_k\right|+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{0<k<\frac{n}{2}}|\Delta a_k|\frac{2k^2}{n(n^2-k^2)}$$

$$<A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\Delta a_n|}{n}+A\sum_{n=1}^{\infty}|\Delta a_k|.$$

其次，我们见到

$$\sum_{n=1}^{\infty}|S_n''|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k>\frac{n}{2}}\frac{|\Delta a_k|}{k+n}=\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta a_k|\sum_{n=1}^{2k}\frac{1}{k+n}$$

$$\leqslant A\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta a_k|,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|S_n^{\mathrm{IV}}|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{k>\frac{3}{2}n}\Delta a_k\frac{1}{k-n}\right|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta a_k|\sum_{1<n<\frac{2}{3}k}\frac{1}{k-n}$$

$$\leqslant A\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta a_k|.$$

余下的是 $\sum|S_n'''|$，它等于

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\sum_{\frac{n}{2}<k<\frac{3n}{2}}\Delta a_k\frac{1}{k-n}\right|=\sum_{n=2}^{\infty}\left|\sum_{k=n-\left[\frac{n}{2}\right]}^{n-1}\frac{\Delta a_k}{k-n}+\sum_{k=n+1}^{n+\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{\Delta a_k}{k-n}\right|.$$

从而得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}|S_n'''|=\sum_{n=2}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{\Delta a_{n-k}-\Delta a_{n+k}}{k}\right|=A_1.$$

这样我们已经证得定理 4 中的不等式．定理证明完毕．

定理 5 设有界变差的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=o(1)$ 和 $A_1<\infty$，那末 $\sum a_n\cos nx$ 成一富理埃级数，并且

$$J=\int_0^{\pi}\left|\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx\right|dx\leqslant C(A_1+\sum|\Delta a_n|).$$

【证明】 我们见到

$$J=\int_0^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta a_k\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right|dx\leqslant\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta a_k\sin(2k+1)x\right|\frac{dx}{x}.$$

函数 $f(x)=\sum\Delta a_k\sin(2k+1)x$ 的系数满足 $\sum|\Delta a_k|<\infty$．而

$$f(x)\operatorname{sgn} x=\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\Delta a_k\left(\frac{1}{2k+1+2n}+\frac{1}{2k+1-2n}\right)\right\}\cos 2nx.$$

从定理 4 的证明，我们可以看到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta a_k\left(\frac{1}{2k+1+2n}+\frac{1}{2k+1-2n}\right)\right|$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{\infty}\Delta a_k\left(\frac{1}{2k+1+2n}+\frac{1}{2k-2n}\right)\right|+A\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|,$$

$$\sum_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{\infty}\Delta a_k\left(\frac{1}{k+n}+\frac{1}{k-n}\right)=S_n^{+}+S_n''-S_n'''-S_n^{\mathrm{IV}},$$

这里

$$S_n^{+}=\sum_{0<k<\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{k+n}+\frac{1}{k-n}\right).$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}|S_n^{+}|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{1\leqslant k<\frac{n}{2}}\frac{2k\Delta a_k}{n^2-k^2}$$

$$\leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty}k|\Delta a_k|\sum_{n=2k}^{\infty}\frac{1}{n^2-\left(\frac{n}{2}\right)^2}$$

$$\leqslant A\sum_{0}^{\infty}|\Delta a_k|.$$

利用定理 4 的关于 S_n'', S_n''', S_n^{IV} 的估计结果，得到

$$J\leqslant B\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\Delta a_k|+\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta a_k\left(\frac{1}{2k+1+2n}+\frac{1}{2k+1-2n}\right)\right|\right)$$

$$\leqslant C(A_1+\sum|\Delta a_n|),$$

这里 A, B, C 都是绝对常数. 定理证毕.

系 设 $a_n=o(1)$, $\sum|\Delta a_n|\log n<\infty$,

则 $\sum a_n\sin nx$ 和 $\sum a_n\cos nx$

都成富理埃级数.

【证明】 设 N 是一正整数，则

$$\sum_{n=2}^{N}\sum_{k=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\frac{1}{k}|\Delta a_{n-k}-\Delta a_{n+k}|\leqslant\sum_{n=2}^{N}\sum_{k=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\frac{1}{k}\{|\Delta a_{n-k}|+|\Delta a_{n+k}|\}$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\sum_{n=2k}^{N}\frac{1}{k}\{|\Delta a_{n-k}|+|\Delta a_{n+k}|\}$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\sum_{n=k}^{\infty}|\Delta a_n|+\sum_{n=3k}^{\infty}|\Delta a_n|\right)$$

$$\leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty}|\Delta a_n|\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\leqslant 3\sum_{n=1}^{\infty}|\Delta a_n|\log(n+1).$$

由是可知定理 5 中的不等式成立.

其次,

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{|a_n|}{n}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\left|\sum_{k=n}^{\infty}\Delta a_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}|\Delta a_k|$$

$$\leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta a_k|\log(k+1).$$

所以 $\sum a_n\sin nx$ 也是富理埃级数. 证明完毕.

现在讨论 $a_n\downarrow 0$ 的情况. 杨格(W. H. Young)早在 1913 年证明: 假如 $a_n\downarrow 0$, $\sum\frac{a_n}{n}<\infty$, 那末 $g(x)=\sum a_n\sin nx$ 成一富理埃级数. 波斯于 1952 年在牛津(Oxford)数学季刊 3 上证得下述结果: 假如

$$a_n\downarrow 0,\ \sum_{1}^{\infty}n^{\gamma-1}a_n<\infty,$$

那末当 $0<\gamma<1$ 时, 不但 $f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ 成一富理埃级数, 并且 $x^{-\gamma}f(x)\in L(0,\pi)$; 后者也会有 $\sum n^{\gamma-1}a_n<\infty$, $a_n\downarrow 0$ 的话. 在这样的情况下, $x^{-\gamma}g(x)\in L(0,\pi)$. 反过来说, 当 $a_n\downarrow 0$, $x^{-\gamma}g(x)\in L(0,\pi)$ $(0<\gamma\leqslant 1)$ 时, $\sum n^{\gamma-1}a_n<\infty$. 对于正弦级数的波斯定理, 希伍德(Heywood) 在 1954 年的牛津数学季刊 5 上把 γ 的范围拓广: 假如 $a_n\downarrow 0$, 那末当 $0\leqslant\gamma<2$ 时, $x^{-\gamma}g(x)\in L(0,\pi)$ 的充要条件是 $\sum n^{\gamma-1}a_n<\infty$.

上述杨格的定理, 还可拓广为波斯的形式. 假如 $a_n\to 0$, $\{a_k\}$ 可以分解为 k 个 k 间隔的单调数列 $\{a_{nk+j}\}$ $(j=1,2,\cdots,k)$, 那末当

$\sum n^{\gamma-1}|a_n|$ $(0<\gamma<1)$ 收敛时，$\sum a_n\cos nx$ 和 $\sum a_n\sin nx$ 都成富理埃级数.

在这个方向，我们引入劳褒生 (M. M. Robertson) 的定理[(德国)数学时刊 83, 1964]：

定理 6 置

$$\varphi(x,k,\gamma)=\prod_{\nu=0}^{[\frac{1}{2}k]}\left(x-\frac{2\nu\pi}{k}\right)^{-\gamma}.$$

假如 k 个数列

$$a_j,\ a_{j+k},\ a_{j+2k},\ a_{j+3k},\ \cdots\quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$$

都是严格单调，$0<\gamma<1$，那末当且仅当级数 $\sum n^{\gamma-1}|a_n|$ 收敛时，$f(x)\varphi(x,k,\gamma)\in L(0,\pi)$，$g(x)\varphi(x,k,\gamma)\in L(0,\pi)$，这里

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_1^\infty a_n\cos nx,\quad g(x)=\sum_1^\infty a_n\sin nx.$$

【证明】 置

$$\mu=\mu(j)=\left[\frac{p-j}{k}\right],\quad \nu=\nu(j)=\left[\frac{q-j}{k}\right].$$

当 $q>p\geqslant k$ 时，

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=p+1}^{q}a_n\cos nx\right|&\leqslant\sum_{j=1}^{k}\left|\sum_{r=\mu+1}^{\nu}a_{rk+j}\cos(rk+j)x\right|\\&\leqslant\sum_{j=1}^{k}\left|a_{\mu k+j}\left(2\sin\frac{kx}{2}\right)^{-1}\left(\sin\left\{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)k+j\right\}x\right.\right.\\&\qquad\left.\left.-\sin\left\{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)k+j\right\}x\right)\right|\\&\leqslant\left|\sin\frac{kx}{2}\right|^{-1}\sum_{j=1}^{k}|a_{\mu k+j}|.\end{aligned}$$

由于 $|a_{rk+j}|\downarrow 0\ (r\to\infty)$，所以$[0,\pi]$中除开 $x=\frac{2l\pi}{k}\left(0\leqslant l\leqslant\left[\frac{k}{2}\right]\right)$等几个点，函数 $f(x)$ 是连续的；$g(x)$ 也是这样.

由所设的条件，级数 $\sum_r(rk+j)^{\gamma-1}|a_{rk+j}|$ 收敛，其项$\downarrow 0$. 由是可知

$$\sum_r(rk+j)^\gamma|a_{rk+j}-a_{(r-1)k+j}|<\infty.$$

简写 $c_j(r,x)=\cos jx-\cos(rk+j)x$，我们见到 $2g(x)\sin kx$ 等于

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\{\cos(n-k)x-\cos(n+k)x\}$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\sum_{r=0}^{\infty}a_{rk+j}\{c_j(r+1,\ x)-c_j(r-1,\ x)\}$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\left\{-a_jc_j(-1,\ x)+\sum_{r=1}^{\infty}(a_{(r-1)k+j}-a_{(r+1)k+j})c_j(r,\ x)\right\}.$$

要证 $g(x)\varphi(x,\ k,\ \gamma)\in L(0,\ \pi)$，我们只要考虑在 $\left[\frac{2l\pi}{k}-\delta,\frac{2l\pi}{k}+\delta\right]$ 上的可积性. 当 $x\to\frac{2l\pi}{k}$ 时，$c_j(-1,\ x)$ 等于

$$\cos jx(1-\cos kx)-\sin jx\sin kx=O\left(x-\frac{2l\pi}{k}\right).$$

因此，我们只要证明，当 $0\leqslant l\leqslant\left[\frac{k}{2}\right]$，$j\leqslant k$ 时，一切积分

$$I=\int_{\frac{2l\pi}{k}-\delta}^{\frac{2l\pi}{k}+\delta}\left|x-\frac{2l\pi}{k}\right|^{-1-\gamma}\sum_{r=1}^{\infty}|(a_{(r-1)k+j}-a_{(r+1)k+j})c_j(r,\ x)|dx$$

都收敛. 由于

$$\int_{\frac{2l\pi}{k}-\delta}^{\frac{2l\pi}{k}+\delta}\left|x-\frac{2l\pi}{k}\right|^{-1-\gamma}|\cos jx-\cos(rk+j)x|dx$$

$$=\int_{-\delta}^{\delta}u^{-1-\gamma}\left|2\sin\left(\frac{rk}{2}+j\right)\left(u+\frac{2l\pi}{k}\right)\sin\frac{rk}{2}\left(u+\frac{2l\pi}{k}\right)\right|du$$

$$\leqslant 2(rk+j)^{\gamma}\int_{-\infty}^{\infty}|v|^{-1-\gamma}\left|\sin\frac{\frac{1}{2}rkv}{rk+j}\right|dv,$$

所以

$$I\leqslant O\sum_{n=k+1}^{\infty}n^{\gamma}|a_{n-k}-a_{n+k}|.$$

我们已经证明 $\sum n^{\gamma-1}|a_n|<\infty$ 含有 $g(x)\varphi(x,\ k,\ \gamma)\in L(0,\ \pi)$. 同样可证所设条件含有 $f(x)\varphi(x,\ k,\ \gamma)\in L(0,\ \pi)$.

现在从 $g(x)\varphi(x,\ k,\ \gamma)\in L(0,\ \pi)$ 导出 $\sum n^{\gamma-1}|a_n|<\infty$. 由于

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}g(x)\sin nx\,dx,$$

所以

$$\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{q} n^{\gamma-1}|a_n| = \sum_{j=1}^{k}\sum_{r=0}^{\nu}(rk+j)^{\gamma-1}\left|\int_0^\pi g(x)\sin(rk+j)x\,dx\right|$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\left|\int_0^\pi g(x)\left\{\sum_{r=0}^{\nu}(rk+j)^{\gamma-1}\sin(rk+j)x\right\}dx\right|.$$

积分中的三角多项式的绝对值不大于 $\left|\sum_{r=0}^{m}\right|+\left|\sum_{r=m+1}^{\nu}\right|$，而是小于

$$\sum_{r=0}^{m}(rk+j)^{\gamma-1}+(mk+j)^{\gamma-1}\max_{m<s<\nu}\left|\sum_{r=m+1}^{s}\sin(rk+j)\right|$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{mk+j} n^{\gamma-1}+(mk+j)^{\gamma-1}\left|\sin\frac{kx}{2}\right|^{-1}.$$

当 $x\to\frac{2l\pi}{k}$ 时，此式不大于 $C\left|x-\frac{2l\pi}{k}\right|^{-1}$，取

$$m=\left[\frac{1}{k}\left(\left|x-\frac{2l\pi}{k}\right|^{-1}-j\right)\right]$$

的话，q 可以很大，$\nu=\left[\frac{q-j}{k}\right]$，因此

$$\sum_{n=1}^{q} n^{\gamma-1}|a_n|\leqslant C\int_0^\pi|g(x)|\varphi(x,k,\gamma)dx$$

对于任何 q 成立，从而 $\sum n^{\gamma-1}|a_n|<\infty$.

从 $f(x)\varphi(x,k,\gamma)\in L(0,\pi)$ 也可以导出 $\sum n^{\gamma-1}|a_n|<\infty$. 定理证毕.

3. 级数 $\sum n^{\gamma-2}\Phi(na_n)$ ($\Phi(t)\uparrow$) 的收敛与函数 $x^{-\gamma}\Phi\left(\left|\sum a_n \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} nx\right|\right)$ 的可积

当 $\Phi(t)=t^p$ 时，陈永铭(Chen Yung-Ming)于 1956 年在(德国)数学时刊 66 上证明：当 $0<\gamma<1$, $p>1$ 时，$\sum n^{\gamma+p-2}a_n^p$ $(a_n\downarrow 0)$ 的收敛包含 $x^{-\gamma}\left(\left|\sum a_n \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} nx\right|\right)^p\in L(0,\pi)$，后者也含有 $\sum n^{\gamma+p-2}a_n^p<\infty$ $(a_n\downarrow 0$ 的话). 后来，陈永铭在数学时刊 68 (1957) 上把上述定理中的 γ 的范围拓广到 $1-p<\gamma<1$.

劳褒生(数学时刊 85, 1964) 将陈永铭定理中的 $\{a_n\}$ 在由 k 个单调

数列所组成的情况来考虑问题，证得下述

定理 1 设 k 个数列 $\{a_{j+\nu k}\}_{\nu=0,1,2,\cdots}$ $(j=1, 2, \cdots, k)$ 都是严格单调，$a_n=o(1)$，$p>1$，则当 $1-p<\gamma<1$ 时，

$$\Phi\left(\left|\sum a_n \frac{\cos}{\sin} nx\right|\right)\varphi(x, k, \gamma)\in L(0, \pi)$$

的充要条件是 $\sum n^{\gamma-2}\Phi(n|a_n|)<\infty$。这里 $\Phi(t)=t^p$，

$$\varphi(x, k, \gamma)=\prod_{\nu=0}^{\left[\frac{1}{2}k\right]}\left(x-\frac{2\nu\pi}{k}\right)^{-\gamma}.$$

$\sum a_n \frac{\cos}{\sin} nx$ 代表 $\sum a_n\cos nx$ 与 $\sum a_n\sin nx$ 中的一个(任一个)级数.

【证明】 设 $H(x)=\int_0^x h(t)dt$，$h(t)\geqslant 0$，我们证明：当 $x^{-\gamma}(h(x))^p \in L(0, a)$ 时，

$$\int_0^a x^{-\gamma}\left(\frac{H(x)}{x}\right)^p dx\leqslant C\int_0^a x^{-\gamma}(h(x))^p dx \quad (a>0).$$

事实上，由于 $H(x)$ 等于

$$\int_0^x h(t)t^{-\frac{\gamma}{p}}t^{\frac{\gamma}{p}}dt\leqslant\left(\int_0^x (h(t))^p t^{-\gamma}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^x t^{\frac{\gamma}{p-1}}dt\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$=o\left(x^{\frac{\gamma+p-1}{p}}\right),$$

所以

$$\int_0^a x^{-\gamma-p}H^p(x)\,dx$$

$$=\frac{a^{-p-\gamma+1}H^p(a)}{1-p-\gamma}+\frac{p}{p+\gamma-1}\int_0^a x^{-\gamma-p+1}H^{p-1}(x)h(x)dx.$$

最后的积分等于

$$\int_0^a h(x)x^{-\frac{\gamma}{p}}\left[H(x)x^{-\frac{\gamma+p}{p}}\right]^{p-1}dx$$

$$\leqslant\left(\int_0^a h^p(x)x^{-\gamma}dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^a H^p(x)x^{-\gamma-p}dx\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

从而得到

$$\left(\int_0^a H^p(x)x^{-p-\gamma}dx\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\int_0^a h^p(x)x^{-\gamma}dx\right)^{\frac{1}{p}}\frac{p}{p+\gamma-1}.$$

因此得到所要的不等式，$C=\left(\frac{p}{p+\gamma-1}\right)^p$.

利用$\{a_n\}$的性质，置 $\nu(l)=[(j-l)/k]$，我们见到

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{n=1}^{j}|a_n|\cos nx\right|\\ &\leqslant\sum_{l=1}^{k}\left|\sum_{r=0}^{\nu}a_{rk+l}\cos(rk+l)x\right|\\ &\leqslant\sum_{l=1}^{k}|a_l|\cdot\left|\frac{\sin\left(\nu k+\frac{1}{2}k+l\right)x-\sin\left(-\frac{k}{2}+l\right)x}{2\sin\frac{1}{2}kx}\right|\\ &\leqslant\left|\csc\frac{kx}{2}\right|\cdot\sum_{1}^{k}|a_l|.\end{aligned}$$

当 $x\to\frac{2l\pi}{k}$ $(l=0,\ 1,\ \cdots,\ k-1)$ 时，

$$f^*(x)=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\cos nx=O\left(\frac{1}{x-2l\pi/k}\right).$$

假如 $|f^*(x)|^p\varphi(x,\ k,\ \gamma)\in L(0,\ \pi)$，那末，从上式我们见到

$$|f^*(x)|=|f^*(x)|^{1-p}\varphi(x,\ k,\ -\gamma)\cdot|f^*(x)|^p\varphi(x,\ k,\ \gamma)\in L(0,\ \pi).$$

置

$$F(x)=\int_0^x f^*(t)\,dt,$$

$$\bar{F}(x)=\int_0^x|f^*(t)|\,dt,$$

则

$$F(x)=\sum n^{-1}|a_n|\sin nx.$$

当 $r>1$ 时，

$$\begin{aligned}\left|F\left(\frac{\pi}{rk}\right)\right|&=\sum_{l=1}^{k}\left|\sum_{m=0}^{r-1}\sum_{q=0}^{\infty}(-1)^q\frac{|a_{mk+qrk+l}|}{mk+qrk+l}\sin\frac{(mk+l)\pi}{rk}\right|\\ &\geqslant C\sum_{l=1}^{k}\sum_{m=\left[\frac{r}{3}\right]+1}^{\left[\frac{2r}{3}\right]}\frac{|a_{mk+l}|}{mk+l}\\ &\geqslant C\sum_{l=1}^{k}|a_{rk+l}|.\end{aligned}$$

从而利用 H^p 与 h^p 之间的不等式以及 $1-p<\gamma<1$,

$$\sum_{n=2k+1}^{\infty} n^{p+\gamma-2}|a_n|^p \leqslant C\sum_{r=2}^{\infty} r^{p+\gamma-2}\left|F\left(\frac{\pi}{rk}\right)\right|^p$$

$$\leqslant C\sum_{r=2}^{\infty} r^{p+\gamma-2}\left|\overline{F}\left(\frac{\pi}{rk}\right)\right|^p$$

$$\leqslant C\sum_{r=2}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{rk}}^{\frac{\pi}{rk-k}} x^{-\gamma}\left(\frac{\overline{F}(x)}{x}\right)^p dx$$

$$= C\int_0^{\frac{\pi}{k}} x^{-\gamma}\left(\frac{\overline{F}(x)}{x}\right)^p dx$$

$$\leqslant C\int_0^{\pi} x^{-\gamma}|f^*(x)|^p dx.$$

由是，级数 $\sum n^{p+\gamma-2}|a_n|^p$ 是收敛的，这是从 $\Phi(|\sum a_n\cos nx|)\varphi(x, k, \gamma) \in L(0, \pi)$ 得到的. 同样，级数 $\sum n^{p+\gamma-2}|a_n|^p$ 的收敛，也可以从 $\Phi(|\sum a_n\sin nx|)\varphi(x, k, \gamma)\in L(0, \pi)$ 导出.

反过来说，假如 $\sum n^{p+\gamma-2}|a_n|^p<\infty$，那末首先我们能证级数 $\sum r^{\gamma-2}S_r^p$ 收敛，这里 $S_r=|a_1|+\cdots+|a_{rk}|$. 写着

$$\mu_r=\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k}|a_{rk+l}|,$$

那末 $\sum r^{p+\gamma-2}\mu_r^p$ 收敛. 当 $rk\leqslant x<rk+k$ 时，定义 $\mu(x)=\mu_r$. 写着 $S(x)=\int_0^x \mu(t)dt$. 由于 $x^{p+\gamma-2}(\mu(x))^p\in L(0, \infty)$，所以从证明开始的不等式，

$$\int_0^{\infty} x^{p+\gamma-2}\left(\frac{S(x)}{x}\right)^p dx<\infty,$$

利用这个结果，我们就能证明 $|f^*(x)|^p\varphi(x, k, \gamma)\in L(0, \pi)$. 事实上，当 $x\in\left[\frac{2l-1}{k}\pi, \frac{2l+1}{k}\pi\right]$, $0\leqslant l\leqslant\left[\frac{k}{2}\right]$时，

$$|f^*(r)|\leqslant S_r+\pi|kx-2l\pi|^{-1}\sum_{l=1}^{k}|a_{rk+l}|$$

$$\leqslant S_r+r\sum_{l=1}^{k}|a_{rk+l}|\leqslant CS_r.$$

从而

$$\int_{\frac{2l\pi}{k}}^{\frac{2l+1}{k}\pi} |f^*(x)|^p\varphi(x,k,\gamma)dx$$

$$=\sum_{r=2}^{\infty}\int_{\frac{2l\pi}{k}+\frac{\pi}{rk}}^{\frac{2l\pi}{k}+\frac{\pi}{(r-1)k}} |f^*(x)|^p\varphi(x,k,\gamma)dx$$

$$\leqslant C\sum_{r=2}^{\infty}S_r^p r^\gamma[(r-1)^{-1}-r^{-1}]\leqslant C\sum_{r=2}^{\infty}r^{\gamma-2}S_r^p.$$

同样，将积分的上限和下限改成$\frac{2l\pi}{k}$以及$\frac{(2l+1)\pi}{k}$，积分之值也小于$C\sum r^{\gamma-2}S_r^p$，因此

$$\int_0^\pi |f^*(x)|^p\varphi(x,k,\gamma)dx\leqslant C\sum_{r=2}^{\infty}r^{\gamma-2}S_r^p.$$

从级数$\sum n^{\gamma-2}\Phi(n|a_n|)$的收敛，同样可以证明$\Phi(|g(x)|)\varphi(x,k,\gamma)$在$(0,\pi)$上的$L$可积性．定理1证毕．

定理1的证明开始的不等式可以写成

$$(*)\qquad \int_0^a x^{-c}\Phi(H(x))dx\leqslant C\int_0^a x^{-c}\Phi(xh(x))dx,$$

这里$C>1$（原来$C=p+1$），$\Phi(x)/x$是单调增加的正值函数（原来$\Phi(x)/x=x^{p-1}(p>1)$）；$H(x)=\int_0^x h(t)dt$，$h(t)>0$，$a>0$．现在对于$\Phi(x)$再加条件：存在k使$\Phi(x)/x^k\downarrow(0<x<\infty)$，来建立不等式$(*)$．

引理1 设$0<\Phi(x)x^{-1}\uparrow$，$\Phi(x)x^{-k}\downarrow$，$H(x)=\int_0^x h(t)dt$，$h(t)>0$，$a>0$，则当$\lim\limits_{x\to+0}x^{1-c}\Phi(H(x))=0$时，不等式$(*)$成立．

【证明】 从$\Phi(t)=\Phi(t)t^{-1}\cdot t=\Phi(t)t^{-k}\cdot t^k$我们见到

$$\Phi(t)t^{-1}<\Phi'(t)<k\Phi(t)t^{-1}.$$

由于$x^{1-c}\Phi(H(x))=o(1)$，$(x\to0)$，所以

$$\int_0^a x^{-c}\Phi(H(x))dx$$

$$=\frac{a^{1-c}}{1-c}\Phi(H(a))+\frac{1}{c-1}\int_0^a x^{1-c}h(x)\Phi'(H(x))dx$$

$$\leqslant\frac{k}{c-1}\int_0^a x^{1-c}h(x)\Phi(H(x))/H(x)dx.$$

设 $K>1$，则当 $t_1>0$，$t_2>0$ 时，$t_1\Phi(t_2)t_2^{-1}\leqslant\max(\Phi(t_1),\Phi(t_2))$，从而

$$xh(x)\Phi(H(x))/H(x)\leqslant\frac{1}{K}\max\{\Phi(Kxh(x)),\ \Phi(H(x))\}$$
$$\leqslant\frac{1}{K}[\Phi(Kxh(x))+\Phi(H(x))]$$
$$\leqslant K^{k-1}\Phi(xh(x))+K^{-1}\Phi(H(x)).$$

由是

$$\int_0^a x^{-c}\Phi(H(x))dx$$
$$\leqslant\frac{kK^{k-1}}{c-1}\int_0^a x^{-c}\Phi(xh(x))\,dx+\frac{k}{K(c-1)}\int_0^a x^{-c}\Phi(H(x))dx.$$

取 K 适当的大，从上式就得到(*)。

同样可证

引理 2 设 $0<\Phi(x)x^{-1}\uparrow$，$\Phi(x)x^{-k}\downarrow$，$h(x)>0$，

$$\int_x^a h(t)\,dt=J(x)\quad(0<x<a),$$

则当 $c<1$ 时，成立着不等式

$$\int_0^a x^{-c}\Phi(J(x))dx\leqslant C\int_0^a x^{-c}\Phi(xh(x))\,dx.$$

定理 2 设 $0<\Phi(x)x^{-1}\uparrow$，$\Phi(x)x^{-k}\downarrow$；$a_n\downarrow 0$，$0<\gamma<1$。函数

$$x^{-\gamma}\Phi(|\sum a_n\sin nx|)$$

在 $[0,\pi]$ 上可以积分的充要条件是 $\sum n^{\gamma-2}\Phi(na_n)<\infty$。

这是陈永铭(数学时刊 68, 1957)的定理。

【证明】 写着 $S_n=a_1+\cdots+a_n$，从 $a_n\downarrow 0$ 易证 $g(x)=\sum a_n\sin nx=O(S_n)$ 当 $x\in\left[\frac{\pi}{n+1},\ \frac{\pi}{n}\right]$时成立。从引理 1，我们见到：当 $c>1$ 时，

$$\sum_1^{\infty}n^{-c}\Phi(S_n)\leqslant K\sum_1^{\infty}n^{-c}\Phi(na_n).$$

由是

$$\int_0^{\pi}x^{-\gamma}\Phi(|g(x)|)dx=K'\sum_{n=2}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n-1}}n^{\gamma}\Phi(S_n)dx$$
$$\leqslant K''\sum_1^{\infty}n^{\gamma-2}\Phi(S_n)\leqslant K'''\sum_1^{\infty}n^{\gamma-2}\Phi(na_n).$$

这建立了条件的充分性.

条件的必要性是利用不等式

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{|g(t)|}{t}dt\geqslant Kna_n \quad (n=1, 2, \cdots)$$

证明的. 事实上,用左端的积分来代 Kna_n 的话,我们见到

$$\sum n^{\gamma-2}\Phi(na_n)\leqslant K\sum n^{\gamma-2}\Phi\left(\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}|g(t)|\frac{dt}{t}\right)$$

$$\leqslant K\sum_{1}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}x^{-\gamma}\Phi\left(\int_{x}^{\pi}|g(t)|\frac{dt}{t}\right)dx$$

$$\leqslant K\int_{0}^{\pi}x^{-\gamma}\Phi\left(\int_{x}^{\pi}\frac{|g(t)|}{t}dt\right)dx.$$

利用引理 2 我们得到

$$\sum n^{\gamma-2}\Phi(na_n)\leqslant K\int_{0}^{\pi}x^{-\gamma}\Phi(|g(x)|)dx.$$

我们还要证上述的不等式. 由于

$$g(t)=\sum_{1}^{\infty}\Delta a_n\frac{\sin^2\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}-\frac{a_1}{2}\operatorname{tg}\frac{t}{4},$$

所以

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}|g(t)t^{-1}|dt\geqslant C_1\sum_{\nu=1}^{\infty}\Delta a_\nu\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\sin^2\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{t}{2}\frac{dt}{t^2}-C_2,$$

$$C_2=\frac{a_1}{2}\int_{0}^{\pi}\operatorname{tg}\frac{t}{4}\frac{dt}{t}.$$

当 ν 足够大时, 级数中的积分大于 $C_3\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}t^{-2}dt$. 由是可知级数之和大于

$$C_3\sum_{\nu=n}^{\infty}\Delta a_\nu\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}t^{-2}dt>C_4na_n \quad (C_4>0).$$

在这个基础上,我们就容易得到所要的不等式. 定理证毕.

注意 对于定理 2 中的 $\Phi(x)$, $\{a_n\}$ 以及 γ, 当级数 $\sum n^{\gamma-2}\Phi(na_n)$ 收敛时,同正弦级数相仿,我们能证 $x^{-\gamma}\Phi(|\sum a_n\cos nx|)\in L(0, \pi)$. 但

是我们不清楚后者是否含有 $\sum n^{\gamma-2}\Phi(na_n)$ 的收敛. 对于特殊的 $\Phi(x)$, 函数 $\Phi(|\sum a_n\cos nx|)$ 在 $(0, \pi)$ 上的可积, 并不包含 $\sum n^{-2}\Phi(na_n)$ 的收敛, 这里 $a_n\downarrow 0$. 例如

$$\Phi(t)=t(1+\log^+ t)^{\frac{1}{2}}\quad (t>0),$$

$$a_n=\frac{1}{\log n}\quad (n>1)$$

的话, 我们知道

$$f(x)=\sum_2^\infty a_n\cos nx\sim\frac{1}{x|\log x|^2}\quad (x\to 0).$$

从而

$$\Phi(|f(x)|)\in L(0, \pi),$$

但是

$$\sum n^{-2}\Phi(na_n)=\sum_2^\infty n^{-2}n(\log n)^{-1}\left[1+\log^+\frac{n}{\log n}\right]^{\frac{1}{2}}=\infty.$$

上文所说, 关于 γ 的限制是 $0<\gamma<1$. 现在对于单调系数 $(a_n\downarrow 0)$ 的幂级数 $F(z)=\sum a_nz^n$, 建立如下的命题.

定理 3 设 $\Phi(x)(x>0)$ 是正值函数, $\dfrac{1}{x}\Phi(x)$ 和 $\dfrac{1}{x^k}\Phi(x)$ $(k>1)$ 分别是单调增加以及单调减小. 假如 $a_n\downarrow 0$, $\gamma<1$, 那末

$$(1-x)^{-\gamma}\Phi\left(\sum_0^\infty a_nx^n\right)\in L(0, 1)$$

的充要条件是 $\sum n^{\gamma-2}\Phi(na_n)<\infty$.

【证明】 置 $F(x)=\sum_0^\infty a_nx^n$, 则当 $\dfrac{1}{1+n}\leqslant y\leqslant\dfrac{1}{n}$ 时,

$$\begin{aligned}F(1-y)&\geqslant\sum_1^n a_\nu(1-y)^\nu\\&\geqslant\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\sum_1^n a_\nu\\&\geqslant\frac{1}{4}na_n\quad (n>1).\end{aligned}$$

现在从函数的可积导出级数的收敛:

$$\int_0^1(1-x)^{-\gamma}\Phi(F(x))\,dx=\int_0^1 y^{-\gamma}\Phi(F(1-y))\,dy$$

$$\geqslant C_1\sum_1^{\infty}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}t^{-\gamma}\Phi(na_n)\,dt\geqslant C_2\int_0^1 t^{-\gamma}\Phi(t^{-1}a_{[1/t]})\,dt$$

$$=C_2\int_1^{\infty}u^{\gamma-2}\Phi(ua_{[u]})\,du\geqslant C_3\sum n^{\gamma-2}\Phi(na_n).$$

其次从级数的收敛导出函数的可积. 置 $S_n=a_1+\cdots+a_n,\ a_0=0$, 由于 $\gamma<1$, 所以, 利用引理 1, 我们见到

$$\sum_1^{\infty}n^{\gamma-2}\Phi(na_n)\geqslant C_1\sum_1^{\infty}n^{\gamma-2}\Phi(S_n).$$

当 $\frac{1}{n+1}\leqslant y\leqslant\frac{1}{n}$ 时, $S_n\geqslant\frac{1}{2y}a_n$; 从而

$$S_n\geqslant\frac{1}{3}\left(S_n+\frac{a_n}{y}\right)\geqslant\frac{1}{3}S_n+\frac{1}{3}\sum_{n+1}^{\infty}a_\nu(1-y)^\nu,$$

$$S_n\geqslant\frac{1}{3}F(1-y).$$

由是

$$\sum n^{\gamma-2}\Phi(na_n)\geqslant C_2\sum_1^{\infty}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}y^{-\gamma}\Phi(1-y)\,dy$$

$$=C_2\int_0^1(1+x)^{-\gamma}\Phi(F(x))\,dx.$$

证明完毕.

4. 能使 $\int|S_n(x)|dx=O(1)$ 的三角级数

定理 1　设

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x).$$

假如有 $\{n_k\}$ 使

$$\int_{-\pi}^{\pi}|S_{n_k}(x)|\,dx=O(1),$$

那末存在连续函数 $F(x)$ 适合

$$\begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} nx\,dF(x) \quad (n=1, 2, \cdots).$$

[三角级数是 F 的富理埃-斯蒂耳吉司级数，记它做 $\mathfrak{S}[dF]$.]

【证明】 有界变差的函数列

$$F_{n_k}(x)=\int_0^x S_{n_k}(t)dt \quad (n=1, 2, \cdots)$$

的全变差是均匀有界，事实上，

$$\int_0^{2\pi} |dF_n(x)|=O(1);$$

由赫利(Helly)的定理，$\{F_{n_k}(x)\}$具有子函数列匀敛于有界变差的函数 $F(x)$.

固定 n，取 $n_k>n$，我们见到

$$\begin{aligned} \begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} S_{n_k}(x) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} nx\,dx \\ &= \frac{F_{n_k}(2\pi)}{\pi}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \pm \frac{n}{\pi}\int_0^{2\pi} F_{n_k}(x) \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} nx\,dx. \end{aligned}$$

令 $k\to\infty$，则得定理 1 中 a_n, b_n 的积分表达式.

其次证明 $F(x)$没有不连续点. 假如不然，

$$F(x_0+0)-F(x_0-0)=d\neq 0,$$

则不妨假设 $x_0=0$, $2F(0)=F(+0)+F(-0)$. 置

$$\phi(x)=\sum \nu^{-1}\sin \nu x,$$

$$F_1(x)=F(x)-\frac{d}{\pi}\phi(x),$$

$$\frac{d}{\pi}\phi(x)=F_2(x),$$

则 $F_1(x)$在 $x=0$ 是连续的. 由于

$$\mathfrak{S}[dF]=\mathfrak{S}[dF_1]+\mathfrak{S}[dF_2],$$

末项的部分和 $S_n^{(2)}(x)=\dfrac{d}{\pi}\left(D_n(x)-\dfrac{1}{2}\right)$，所以当 $0<\varepsilon<1$ 时，

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |S_n^{(2)}(x)|dx \simeq C\log n \quad (C>0, n\to\infty).$$

设 $x\in[-\varepsilon, \varepsilon]$，则 $\mathfrak{S}[dF_1]$的部分和 $S_n^{(1)}(x)$满足

$$|S_n^{(1)}(x)|=\frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}D_n(x-t)dF_1(t)\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon}|D_n(x-t)|\cdot|dF_1(t)|+O(1).$$

从而

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}|S_n^{(1)}(x)|dx\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon}|dF_1(t)|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}|D_n(x-t)|dt+O(\varepsilon)$$
$$\leqslant O(\log n)\int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon}|dF_1(t)|.$$

结合起来,我们见到

$$\int_{-\pi}^{\pi}|S_n(x)|dx>\frac{1}{2}C\log n.$$

这是与左端在 $n=n_k$ 的性质不相容的. 从而 $d=0$. 证明完毕.

定理 2 $\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{1}^{n}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right|dx=O(1)$

含有 $a_n=o(1)$, $b_n=o(1)$.

这是海尔松(H. Helson)于1954年在美国科学院杂志上发表的一个定理.

【证明】 由定理1, 存在连续函数 $F(x)$适合

$$c_n=a_n+ib_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-inx}dF(x).$$

假如 $c_n\neq o(1)$, 那末有 $\{c_{n_k}\}$ 使 $|c_{n_k}|\geqslant\varepsilon>0(k=1, 2, \cdots, n_k\uparrow\infty)$. 应用赫利定理于函数列 $g_n(x)=\int_0^x e^{-int}dF(t)$, 我们见到$\{g_n(x)\}$有子列匀敛于一个有界变差函数 $\gamma(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$. 假如 $\varphi(x)\in C(0, 2\pi)$, 那末

$$\int_0^{2\pi}\varphi(x)d\gamma(x)=\lim_{j\to\infty}\int_0^{2\pi}\varphi(x)e^{-in_jx}dF(x).$$

有界变差的函数 $F(x)$ 是一绝对连续函数 $F_1(x)$ 与一奇异函数 $F_2(x)$ 的和. 上式右方关于 $F_1(x)$ 的积分是 $o(1)$ $(j\to\infty)$. 所以我们不妨假设 $F(x)$ 是一奇异的连续函数 ($F(x)\neq$常数, $F'(x)\doteq 0$). 现在假设 $\varphi(x)\in C(0, 2\pi)$, $\varphi(x)=0(x\bar{\in}(a, b), x\in[0, 2\pi])$, 那末当 $|\varphi(x)|\leqslant 1$ 时,积分 $\int_a^b\varphi(x)d\gamma(x)$ 的上界等于 $\gamma(x)$ 在$[a, b]$上的全变

差$V(\gamma; a, b)$. 另一方面,

$$\left|\int_a^b \varphi(x)d\gamma(x)\right| \leqslant \int_a^b dF(x) = V(F; a, b),$$

因此, $V(\gamma; a, b) \leqslant V(F; a, b)$. 由于$a, b$的任意性,所以

$$\left|\frac{\gamma(x+h)-\gamma(x)}{h}\right| \leqslant \frac{1}{h}V(\gamma; x, x+h) \leqslant \frac{1}{h}V(F; x, x+h).$$

当$h\to 0$时,右端对于几乎一切x是$o(1)$. 由是$\gamma'(x) \doteq 0$. 由于

$$\int_0^{2\pi} d\gamma(x) = \lim_{j\to\infty}\int_0^{2\pi} e^{-in_jx}dF(x) = \lim_{j\to\infty} 2\pi C_{n_j} \neq 0,$$

所以$\gamma(x) \neq$常数, $\gamma(x)$是一奇异函数.

函数列

$$\int_0^x e^{-int}\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}dt \quad (n=1, 2, \cdots)$$

在$[0, 2\pi]$上也满足赫利定理的条件; 故必有$\gamma^*(x)$以及$\{m_j\}$, 使

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x)d\gamma^*(x) = \lim_{j\to\infty}\int_0^{2\pi} e^{-im_jx}\sum_{-m_j}^{m_j} c_k e^{inx}\varphi(x)dx$$

对于$C[0, 2\pi]$中任一$\varphi(x)$成立. 因此,当$k>0$时,

$$2\pi\alpha_k^* = \int_0^{2\pi} e^{-ikx}d\gamma^*(x) = \lim_{j\to\infty}\int_0^{2\pi}\sum_{n=-m_j}^{m_j} c_n e^{i(n-m_j-k)x}dx = 0.$$

假如$k\leqslant 0$, 那末

$$\alpha_k^* = \frac{1}{2\pi}\lim_{j\to\infty}\int_0^{2\pi}\sum_{n=-m_j}^{m_j} c_n e^{i(n-m_j-k)x}dx = \lim_{j\to\infty} c_{m_j+k};$$

积分

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikx}d\gamma(x) = \frac{1}{2\pi}\lim_{j\to\infty}\int_0^{2\pi} e^{-i(n_j+k)x}dx = \lim_{j\to\infty} C_{n_j+k}.$$

由于$\{m_j\}\subset\{n_j\}$, 所以$\alpha_k = \alpha_k^*(k\leqslant 0)$. 因此$\gamma(x)-\gamma^*(x)$的斯蒂耳吉司-富理埃系数, $k\leqslant 0$的话, $\alpha_k - \alpha_k^* = 0$.

由黎斯定理, 当$f(x)$与$\bar{f}(x)$都是有界变差时,它们都是绝对连续(参阅齐革蒙特«三角级数论»(1935) §7.5). 因此$\gamma(x)-\gamma^*(x)$是一绝对连续函数. 由于

$$a_k^* = 0 \quad (k>0),$$

所以$\gamma^*(x)$具有绝对连续性. 这样一来, $\gamma(x)$也成一绝对连续函数, 这是矛盾. 由是$c_n=o(1)$ ($|n|\to\infty$). 定理证毕.

立脱尔伍德在美国芝加哥大学(1956)讲学时,提出如下的问题: 三角级数部分和$S_n(x)$满足$\int|S_n(x)|dx=O(1)$时, 能否断定它是一个富理埃级数? 实际上,在特殊情况$S_n(x)\geqslant 0$下的相应问题是斯太因豪斯(H. Steinhaus)提出的. 现在证明下述吐浪(P. Turán, 1953)的定理.

定理 3 存在如下的余弦级数$\sum_0^\infty a_n\cos nx$:

$$S_n(x)=\sum_{\nu=0}^n a_\nu\cos\nu x\geqslant 0\quad(n=1,2,\cdots),\quad \sum a_n^2=\infty.$$

【证明】 置$a_0=1$, $a_n=(2n-1)!!/(2n)!!$, 则因

$$\frac{\pi}{2}=\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+\theta_n}\quad(0<\theta_n<1),$$

$$a_n^2=\frac{2}{\pi}(2n+\theta_n)^{-1},\quad \sum a_n^2=\infty.$$

设$0<x<\frac{\pi}{n}$, 则当$\left[\frac{n}{2}\right]<\nu\leqslant n$时, $|\cos\nu x|<\cos(n-\nu)x$, 从而

$$\begin{aligned}S_n(x)&\geqslant\sum_{[\frac{n}{2}]+1}^n[a_\nu\cos\nu x+a_{n-\nu}\cos(n-\nu)x]\\&>\sum_{[\frac{n}{2}]+1}^n a_{n-\nu}(\cos(n-\nu)x-|\cos\nu x|)>0.\end{aligned}$$

由于$S_0(x)=1$, $S_1(x)=1+\frac{1}{2}\cos x$, $S_2=1+\frac{1}{2}\cos x+\frac{3}{8}\cos 2x$都是正的,所以只须证明: $S_n(x)\geqslant 0$当$n\geqslant 3$以及$\frac{\pi}{n}<x\leqslant\pi$时成立. 由于$(1-z)^{-\frac{1}{2}}\doteq\sum_0^\infty a_nz^n$, 所以当$0<t<2\pi$时,

$$\sum_0^\infty a_\nu\cos\nu t=\mathrm{Re}\left[e^{-\frac{it}{4}}\left(e^{-\frac{it}{2}}-e^{\frac{it}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$$=\frac{\cos\frac{\pi-t}{4}}{\sqrt{2\sin\frac{t}{2}}},$$

$$S_n(x)=\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{\pi-t}{4}-\sum_{\nu=n+1}^{\infty}a_\nu\cos\nu x$$

$$>\frac{1}{2}\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}-\sum_{\nu=n+1}^{\infty}a_\nu\cos\nu x,$$

末项的绝对值小于 $a_{n+1}\Big/\sin\frac{x}{2}$ $(0<x<\pi)$. 由于 $a_{n+1}<(\pi n+\pi)^{-\frac{1}{2}}$, 所以

$$S_n(x)>\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}-\left(\pi n\sin\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right].$$

当 $x\in\left(\frac{4}{n},\ \pi\right]$时, $\sqrt{\pi n\sin\frac{x}{2}}>2$, 从而 $S_n(x)>0$. 假如 $x\in\left(\frac{\pi}{n},\ \frac{4}{n}\right]$,

$$\sin\frac{x}{2}\geqslant\frac{x}{2}-\frac{1}{3!}\left(\frac{x}{2}\right)^3\geqslant\frac{\pi}{2n}\left(1-\frac{2}{3n^2}\right),$$

$$\pi n\sin\frac{x}{2}\geqslant\frac{\pi^2}{2}\left(1-\frac{2}{3n^2}\right)\geqslant\frac{\pi^2}{2}\left(1-\frac{1}{6}\right)>4;$$

从而 $S_n(x)>0$. 证明完毕.

伐伊斯 (M. Weiss) 解决了立脱尔伍德的问题 (伦敦数学会期刊 34, 1959).

定理 4 三角级数的部分和 $S_n(x)$ 满足

$$\int_0^{2\pi}|S_n(x)|\,dx=O(1)$$

时,

$$\sigma_n^\alpha(x)=\frac{1}{(\alpha)_n}\sum_{\nu=0}^{n}(\alpha-1)_{n-\nu}S_\nu(x)\quad(\alpha>0)$$

的极限 $(\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n^\alpha(x))$ 几乎处处存在而等于 $F'(x)$ ($F(x)$ 的意义见定理 1). 但是三角级数 $\mathfrak{S}[dF]$ 未必是富理埃级数 $\mathfrak{S}[F']$.

【证明】 设

$$K_n^\alpha(t)=\frac{1}{(\alpha)_n}\sum_{\nu=0}^{n}(\alpha-1)_{n-\nu}D_\nu(t),$$

则当 $F'(x)$ 存在时,

$$\sigma_n^\alpha(x)-F'(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi K_n^\alpha(t)\,dF_x^*(t),$$

$$F^*_x(t)=F(x+t)-F(x-t)-2tF'(x).$$

写着 $\Phi^*_x(h)=\int_0^h|dF^*_x(t)|\ (h>0)$，则 $\Phi^*_x(h)=o(h)\ (h\to0)$. 不妨假设 $0<\alpha<1$，由是

$$\int_0^{\frac{1}{n}}|K^\alpha_n(t)dF^*_x(t)|\leqslant 2n\Phi^*_x\left(\frac{1}{n}\right)=o(1),$$

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}|K^\alpha_n(t)dF^*_x(t)|\leqslant Cn^{-\alpha}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}t^{-1-\alpha}|dF^*_x(t)|$$

$$\leqslant Cn^{-\alpha}\left[\Phi^*_x(t)\,t^{-1-\alpha}\right]_{\frac{1}{n}}^{\pi}+Cn^{-\alpha}(1+\alpha)\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\Phi^*_x(t)t^{-\alpha-2}dt$$

$$=o(1).$$

这就证明了 $\sigma^\alpha_n(x)\to F'(x)$，这样的 x 是到处存在的.

函数 $F'(x)$ 有可能概等于零. 这就是说，存在连续奇异函数 $F(x)$ 使 $\mathfrak{S}[dF]$ 的部分和 $S_n(x)$ 满足 $\int_0^{2\pi}|S_n(x)|dx=O(1)$. 这个事实包含在下述伐伊斯的定理中.

定理 5　设 $-1\leqslant a_k\leqslant1$，$\sum a_k^2=\infty$，$(|a_1|+\cdots+|a_k|)a_k=O(1)$ (例如 $a_k=k^{-\frac{1}{2}}$)，则乘积

$$P(x)=\prod_{j=1}^{\infty}(1+a_j\cos n_jx)\quad(n_{j+1}\geqslant3n_j)$$

表示一个奇异的连续函数. 写着 $P(x)=1+\sum_1^\infty\gamma_k\cos kx$，那末

$$\int_0^{2\pi}|1+\gamma_1\cos x+\cdots+\gamma_k\cos kx|dx=O(1).$$

【证明】　乘积 $p_k(x)=\prod_{j=1}^{k}(1+a_j\cos n_jx)$ 是一不取负值的三角多项式，它的阶数是 $\mu_k=n_1+n_2+\cdots+n_k$. 三角多项式

$$p_{k+1}(x)-p_k(x)=a_{k+1}p_k(x)\cos n_{k+1}x$$

的阶数大于 μ_k. 由是，写着 $P(x)=1+\sum_1^\infty\gamma_\nu\cos\nu x$，它的部分和 $S_n(x)$ 满足关系式 $S_{\mu_k}(x)=p_k(x)$. 由于

$$\int_0^{2\pi}|S_{\mu_k}(x)|\,dx=\int_0^{2\pi}S_{\mu_k}(x)\,dx=\int_0^{2\pi}p_k(x)dx=2\pi,$$

所以从定理 1 知道：$1+\sum_{1}^{\infty}\gamma_\nu\cos\nu x$ 是一个 $\mathfrak{S}[dF]$，$F(x)$ 是单调增加的连续函数；事实上，$S_{\mu_k}(x)\geqslant 0$。

现在证明

$$\int_0^{2\pi}|S_n(x)|dx=O(1)\quad(n>1).$$

设 $\mu_k'=n_k-(n_{k-1}+n_{k-2}+\cdots+1)$，则因 $\gamma_\nu=o\,(\mu_k'\leqslant\mu_k)$，$S_{\mu_k'}=S_{\mu_{k-1}}$。因此

$$\begin{aligned}S_{\mu_k}(x)&=1+\sum_{\nu=1}^{\mu_k}\gamma_\nu\cos\nu x=\prod_{\nu=1}^{k}(1+a_\nu\cos n_\nu x)\\&=(1+a_k\cos n_kx)\left(1+\sum_{\nu=1}^{\mu_{k-1}}\gamma_\nu\cos\nu x\right)\\&=S_{\mu_k'}(x)+\frac{a_k}{2}\sum_{\nu=1}^{\mu_{k-1}}\gamma_\nu\{\cos(n_k+\nu)x+\cos(n_k-\nu)x\}+a_k\cos n_kx.\end{aligned}$$

由是可知：

当 $\mu_k'<n<n_k$ 时，

$$S_n=S_{\mu_k}+\frac{a_k}{2}\sum_{\nu=1}^{\mu_{k-1}}\gamma_\nu\cos(n_k-\nu)x;$$

当 $n=n_k$ 时，

$$S_{n_k}=S_{\mu_k}+\frac{a_k}{2}\sum_{\nu=1}^{\mu_{k-1}}\gamma_\nu\cos(n_k-\nu)x+a_k\cos n_kx;$$

当 $n_k<n<\mu_k$ 时，

$$S_n=S_{\mu_k}-\frac{a_k}{2}\sum_{\nu=n-n_k+1}^{\mu_{k-1}}\gamma_\nu\cos(n_k+\nu)x.$$

类似的等式，对于相应的正弦多项式成立. 用 $t_n=t_n(x)$ 表示级数 $2+\sum_{1}^{\infty}\gamma_\nu e^{i\nu x}$ 的部分和 $(t_{-1}=0)$，则当 $\mu_k'<n\leqslant n_k$ 时，$t_{n_{k-1}}$ 必有一尾段 $R_{\mu_{k-1}}=\cdots+\gamma_{\mu_{k-1}}e^{i\mu_{k-1}x}$ 适合于

$$t_n=t_{\mu_k'}+\frac{1}{2}a_ke^{in_kx}\overline{R}_{\mu_{k-1}}.$$

而当 $n_k<n<\mu_k$ 时，

$$t_n=t_{\mu_k}-\frac{1}{2}a_ke^{in_kx}R_{\mu_{k-1}}.$$

由是

$$(1)\qquad \frac{1}{2}|a_k|\cdot|R_{\mu_{k-1}}|=\begin{cases}|t_n-t_{\mu_k'}| & (\mu_k'<n\leqslant n_k),\\ |t_n-t_{\mu_k}| & (n_k<n<\mu_n),\end{cases}$$

R_λ 是 t_λ 的一个尾段. $R_{\mu_{k-1}}$ 的形式是

$$R_{\mu_{k-1}}=t_{\mu_{k-1}}-t_{\lambda_1}\quad(-1\leqslant\lambda_1<\mu_{k-1}).$$

只有 λ 落在 $(\mu_j', \mu_j]$ $(j=1, 2, \cdots)$ 中(之一)时, γ_λ 才不为零. 我们假设 $\lambda_1\neq-1$, 而是满足

$$\mu_{k_1}'<\lambda_1\leqslant\mu_{k_1}\quad(k_1\leqslant k-1).$$

如果 $\lambda_1=\mu_{k_1}$, 那末(1)的左端等于 $\frac{1}{2}|a_k|\cdot|t_{\mu_{k-1}}-t_{\mu_{k_1}}|$ $(k>k_1)$. 假如 $\mu_{k_1}'<\lambda_1<\mu_{k_1}$, 那末(1)的左端是

$$(2)\qquad \frac{1}{2}|a_k|\cdot|t_{\mu_{k-1}}-t_{\lambda_1}|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}|a_k|\cdot|t_{\mu_{k-1}}-t_{\mu_{k_1}}|+\frac{1}{4}|a_k|\cdot|a_{k_1}||R_{\mu_{k_1-1}}|\quad(k>k_1),$$

这里

$$R_{\mu_{k_1}}=t_{\mu_{k_1-1}}-t_{\lambda_2},\quad \mu_{k_2}'<\lambda_2\leqslant\mu_{k_2}\quad(k_2\leqslant k_1-1).$$

当 $\lambda_2=\mu_{k_2}$ 时, (2)的右端末项可以写成

$$\frac{1}{4}|a_k|\cdot|a_{k_1}|\cdot|t_{\mu_{k_1-1}}-t_{\mu_{k_2}}|\quad(k>k_1>k_2).$$

假如 $\mu_{k_2}'<\lambda_2<\mu_{k_2}$, 那末

$$\frac{1}{2}|a_{k_1}|\cdot|R_{\mu_{k_1-1}}|=\begin{cases}|t_{\lambda_2}-t_{\mu_{k_2}'}| & (\mu_{k_2}'<\lambda_2\leqslant n_{k_2})\\ |t_{\lambda_2}-t_{\mu_{k_2}}| & (n_k<\lambda_2<\mu_{k_2}).\end{cases}$$

结合起来, 我们见到

$$\left.\begin{array}{l}|t_n-t_{\mu_k'}|\ (\mu_k'<n\leqslant n_k)\\ |t_n-t_{\mu_k}|\ (n_k<n<\mu_k)\end{array}\right\}$$

$$\leqslant\frac{1}{2}|a_k|\cdot|t_{\mu_{k-1}}-t_{\mu_{k_1}}|+\frac{1}{4}|a_k|\cdot|a_{k_1}||t_{\mu_{k-1}}-t_{\mu_{k_2}}|$$

$$+\frac{1}{8}|a_k|\cdot|a_{k_1}|\cdot|a_{k_2}|\cdot|R_{\mu_{k_2-1}}|\quad(k>k_1>k_2).$$

右端的一般项是

$$2^{-(1+s)}|a_k|\cdot|a_{k_1}\cdot a_{k_2}\cdots a_{k_s}'|\cdot|t_{\mu_{k_s-1}}-t_{\mu_{k_{s+1}}}|\quad(k>k_1>\cdots>k_{s+1}).$$

从 S_n 的表示式，我们见到

$$t_{\mu_k}=t_{\mu_{k-1}}+a_k e^{i n_k x} S_{\mu_{k-1}},$$

从而

$$t_{\mu_k}=\sum_{j=2}^{k} a_j e^{i n_j x} S_{\mu_{j-1}}+t_{\mu_1}.$$

由于 $S_{\mu_k}(x)=p_k(x)\geqslant 0$，所以从上式得到

$$\int_0^{2\pi}|t_{\mu_k}(x)|dx\leqslant\int_0^{2\pi}|t_{\mu_1}(x)|dx+2\pi(|a_1|+\cdots+|a_k|)$$
$$\leqslant C(|a_1|+\cdots+|a_k|).$$

当 $\mu_k'<n<\mu_k$ 时，

$$\int_0^{2\pi}|S_n-S_{\mu_k}|dx<\int_0^{2\pi}|t_n-t_{\mu_k}|dx$$
$$\leqslant 2C(|a_1|+\cdots+|a_k|)(2^{-1}|a_k|+2^{-2}|a_k|+\cdots),$$

这是 $O(1)$．因此

$$\int_0^{2\pi}|S_n|dx\leqslant\int_0^{2\pi}|S_{\mu_k}|\,dx+\int_0^{2\pi}|S_n-S_{\mu_k}|dx=O(1).$$

证明完毕．

5．积分平均的李普希兹函数族

设 $f(x+2\pi)=f(x)\in L_p(0,\ 2\pi)$，$p\geqslant 1$．写着

$$\|f(x)\|_p=\left\{\int_0^{2\pi}|f(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

当 $h\to+0$ 时，假如 $\|f(x+h)-f(x)\|_p=O(h^\alpha)$ 或是 $\|f(x+h)-f(x)\|_p=o(h^\alpha)$，那末分别记 $f(x)\in\mathrm{Lip}\,(\alpha,\ p)$ 或是 $f(x)\in\mathrm{lip}\,(\alpha,\ p)$，这里 $0<\alpha\leqslant 1$．由于 $\|f(x)\|_p$ 关于 p 是增加的，所以 $\|f(x)\|_\infty$ 表示 $|f(x)|$ 的"上界"，因此 $\mathrm{Lip}\,\alpha$ 和 $\mathrm{lip}\,\alpha$ 可以看成 $\mathrm{Lip}(\alpha,\ \infty)$，$\mathrm{lip}\,(\alpha,\ \infty)$ 的简写．关于 $\mathrm{Lip}\,\alpha$ 中函数的系数，有下述罗伦兹(G. G. Lorentz)的定理(见数学时刊(德国) 51, 1948)．

定理 1 设 $f\in\mathrm{Lip}\,\alpha$，则当 $0<p\leqslant 2$，$\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{2}<\alpha$ 时，

$$\left\{\sum_{k=n}^{\infty}(|a_k|^p+|b_k|^p)\right\}^{\frac{1}{p}}=O\left(n^{-\left(\alpha-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\right)}\right);$$

a_k, b_k 是 f 的富理埃系数.

【证明】 由于

$$f(x+h)-f(x-h)=2\sum(b_n\cos nx-a_n\sin nx)\sin nh,$$

所以

$$4\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_n^2)\sin^2 kh=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+h)-f(x-h)]^2dt=O(h^{2\alpha}).$$

由是可知 $\sum_{k=n}^{2n}(a_k^2+b_k^2)=O(n^{-2\alpha})$. 从而

$$\sum_{k=n}^{2n}(|a_k|^p+|b_k|^p)\leqslant\left(\sum_{n}^{2n}(a_k^2+b_k^2)\right)^{\frac{p}{2}}(2n)^{1-\frac{p}{2}}$$

$$=O\left(n^{1-p\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\right),$$

$$\left\{\sum_{k=n}^{\infty}(|a_k|^p+|b_k|^p)\right\}^{\frac{1}{p}}=\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{k=2^\nu n}^{2^{\nu+1}n-1}(|a_k|^p+|b_k|^p)\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$=O(n^{\frac{1}{p}-\alpha-\frac{1}{2}}).$$

证明完毕.

系 当 $f\in\mathrm{Lip}\,\alpha$, $\alpha>\frac{1}{2}$ 时, $\sum(|a_k|+|b_n|)<\infty$.

这是第四章 §4 的定理 5(上册).

对于阿达马(Hadamard)式缺项的三角级数, 我们曾在第三章 §7, 从系数的性质导出函数属于 $\mathrm{Lip}\,\alpha$. 对于一般的三角级数, 罗伦兹建立下述的

定理 2 设 f 的系数满足

$$\sum_{k=n}^{\infty}(|a_k|+|b_k|)=O(n^{-\alpha})\quad(0\leqslant\alpha<1),$$

则必 $f\in\mathrm{Lip}\,\alpha$.

【证明】 存在常数 C 适合

$$(|a_n|+|b_n|)+\cdots+(|a_{2n}|+|b_{2n}|)\leqslant Cn^{-\alpha}.$$

因此, 设 $h\in(2^{-s}, 2^{-s+1})$, 我们见到

$$|f(x+h)-f(x-h)|$$
$$\leqslant 2\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=2^{\nu-1}}^{2^\nu-1}(|a_k|+|b_k|)kh+2\sum_{k=2^n}^{\infty}(|a_k|+|b_k|)$$
$$\leqslant 2Ch\sum_{\nu=1}^{n}2^{(1-\alpha)(\nu-1)}+2C2^{-\alpha n}=O(h^\alpha).$$

证明完毕.

系 a_n 和 b_n 都是 $O(n^{-1-\alpha})$ $(0<\alpha<1)$ 的话，$f\in\operatorname{Lip}\alpha$.

当 a_n 和 b_n 都是 $O(n^{-\beta})$ 而 $0<\beta<1$ 时，从这个系无话可说，但是假使 $a_n\downarrow 0$, $b_n\downarrow 0$, 那末我们有下述冈钮希各夫 (А. А. Конюшков) 的定理 (1957 苏联科学院报，数学之辑，第 21 卷).

定理 3 设 $a_n\downarrow 0$, $a_n=O(n^{-\beta})$ $(0<\beta\leqslant 2)$, 则当 $p\geqslant 1$ 和不大于 1 的正数 α 适合 $\beta=1+\alpha-\dfrac{1}{p}$ 时，函数

$$f(x)=\sum a_n\cos nx,\quad g(x)=\sum a_n\sin nx$$

都属于 $\operatorname{Lip}(\alpha,p)$. 倒转来说，假如 $f(x)\in\operatorname{Lip}(\alpha,p)$ 或是 $g(x)\in\operatorname{Lip}(\alpha,p)$, 那末 $a_n=O(n^{\frac{1}{p}-1-\alpha})$; 但 $a_n\downarrow 0$.

引理 1 当 $\alpha p>1$ 时，$\operatorname{Lip}(\alpha,p)\subseteq\operatorname{Lip}\left(\alpha-\dfrac{1}{p}\right)$.

引理 2 假如 $f\in\operatorname{Lip}\alpha$ 或 $g\in\operatorname{Lip}\alpha$, 那末当 $a_n\downarrow 0$ 时，

$$a_n=O(n^{-1-\alpha}).$$

引理 3 $f\in\operatorname{Lip}(\alpha,p)$ $(0<\alpha<1)$ 的充要条件是 $\mathfrak{S}[f]$ 的算术平均 $\sigma_n(f)$ 适合

$$\|f-\sigma_n(f)\|_p=O(n^{-\alpha}),$$

而 $f\in\operatorname{lip}(\alpha,p)$ 的条件是 $\|f-\sigma_n(f)\|_p=o(n^{-\alpha})$.

【定理 3 的证明】 设 $p\geqslant 2$, 则由豪施多甫-杨格的不等式，

$$S_n(x)=\sum_1^n a_\nu\cos\nu x$$

适合

$$\|f(x)-S_n(x)\|_p\leqslant C\Big(\sum_{k=n}^{\infty}|a_k|^{\frac{p}{p-1}}\Big)^{\frac{p-1}{p}}$$
$$=O\Big(\sum_{k=n}^{\infty}k^{-\beta\frac{p}{p-1}}\Big)^{\frac{p-1}{p}}=O(n^{-\alpha}).$$

由引理3, $f(x)\in \mathrm{Lip}(\alpha,\ p)$. 假如 $1<p<2$, 那末当 $0<x\leqslant\pi$ 时,

$$|f(x)-S_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k\cos kx\right|\leqslant\frac{\pi a_{n+1}}{x}.$$

因此, 在区间 $\frac{\pi}{m+1}\leqslant x\leqslant\pi$ 上,

$$|f(x)-S_n(x)|\leqslant 2ma_{n+1}\quad(m>0).$$

从而

$$\sum_{m=1}^{n}\int_{\frac{\pi}{m+1}}^{\frac{\pi}{m}}|f-S_n|^p dx\leqslant C\sum_{m=1}^{n}(ma_{n+1})^p m^{-2}$$

$$=O(a_n^p n^{p-1})=O(n^{-\alpha p}),$$

$$\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}|f-S_n|^p dx=O(n^{-\alpha p}).$$

当 $\frac{\pi}{m+1}\leqslant x\leqslant\pi$, $m>n$ 时,

$$|f(x)-S_n(x)|\leqslant(a_{n+1}+\cdots+a_m)+2ma_m,$$

从而

$$\int_{\frac{\pi}{m+1}}^{\frac{\pi}{m}}|f-S_n|^p\,dx\leqslant\int_{\frac{\pi}{m+1}}^{\frac{\pi}{m}}2^p\left\{\left(\sum_{k=n-1}^{m}a_k\right)^p+(2ma_m)^p\right\}dx$$

$$<C\left(\sum_{k=n+1}^{m}k^{\frac{1}{p}-1-\alpha}\right)^p m^{-2}+Cm^{-1-\alpha p}.$$

将上式施行加法, 我们见到, 当 $\alpha p<1$ 时,

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{n+1}}|f-S_n|^p\,dx\leqslant C'\sum_{m=n+1}^{\infty}\left(m^{\left(\frac{1}{p}-\alpha\right)p}m^{-2}+m^{-1-\alpha p}\right)$$

$$=O(n^{-\alpha p}).$$

当 $\alpha p>1$ 时,

$$\left(\sum_{n+1}^{\infty}k^{\frac{1}{p}-1-\alpha}\right)^p=O(n^{\left(\frac{1}{p}-\alpha\right)p}).$$

因此上式左端的积分仍为 $O(n^{-\alpha p})$. 与前面所得结果合并, 得到

$$\int_0^{\pi}|f-S_n|^p\,dx=O(n^{-\alpha p}).$$

由引理3可知 $f\in \mathrm{Lip}(\alpha,\ p)$. 假如 $\alpha p=\beta=1$, 那末从 $a_n=O(n^{-\beta})$ 得

到 $f\in\mathrm{Lip}(\alpha-\varepsilon, p)(\varepsilon>0)$. 由是可知 $f\in\mathrm{Lip}(\alpha, p)$. 这样，我们从 $a_n=O(n^{-\beta})$ 导出了 $f\in\mathrm{Lip}(\alpha, p)$. 同样可得 $g(x)\in\mathrm{Lip}(\alpha, p)$.

其次，假设 $f\in\mathrm{Lip}(\alpha, p)$. 当 $\alpha p>1$ 时，由引理1，$f\in\mathrm{Lip}\left(\alpha-\frac{1}{p}\right)$. 由引理2，$a_n=O(n^{\frac{1}{p}-1-\alpha})$.

记三角级数 $\sum A_n(x)$ 的部分和为 $S_n(x)=A_0(x)+\cdots+A_n(x)$，费耶的算术平均为 $\sigma_n(x)=(S_0+\cdots+S_n)/(n+1)$. 又记

$$S_n^*=S_n^*(x)=\lambda_0A_0(x)+\cdots+\lambda_nA_n(x),$$

$$\sigma_n^*(x)=(S_0^*+\cdots+S_n^*)/(n+1),$$

$$\theta_\nu=\frac{n+1-\nu}{n+1}\lambda_\nu\quad(\nu\leqslant n),\quad\theta_{n+m}=0\quad(m>0),$$

则

$$\begin{aligned}\sigma_n^*-\lambda_0f&=\theta_0(A_0-f)+\theta_1A_1+\cdots+\theta_nA_n=\sum_{\nu=0}^{n}(S_\nu-f)\Delta\theta_\nu\\&=\sum_{\nu=0}^{n-1}(\nu+1)(\sigma_\nu-f)\Delta^2\theta_\nu+(n+1)(\sigma_n-f)\Delta\theta_n\\&=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{n+1-\nu}{n+1}(\nu+1)(\sigma_\nu-f)\Delta^2\lambda_\nu\\&\quad+\frac{2}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n-1}(\nu+1)(\sigma_\nu-f)\Delta\lambda_{\nu+1}+(\sigma_n-f)\lambda_n\\&\quad-(\sigma_n-f)\Delta^2\lambda_n.\end{aligned}$$

当 $n>m$ 时，我们见到

$$\begin{aligned}\sigma_n^*-\sigma_m^*&=\sum_{\nu=0}^{m}\left[\frac{n+1-\nu}{n+1}-\frac{m+1-\nu}{m+1}\right](\nu+1)(\sigma_\nu-f)\Delta^2\lambda_\nu\\&\quad+\sum_{\nu=m+1}^{n}\frac{n+1-\nu}{n+1}(\nu+1)(\sigma_\nu-f)\Delta^2\lambda_\nu+(\sigma_n-f)\lambda_n\\&\quad-(\sigma_n-f)\Delta^2\lambda_n-\frac{2}{m+1}\sum_{\nu=0}^{m-1}(\nu+1)(\sigma_\nu-f)\Delta\lambda_{\nu+1}\\&\quad+\frac{2}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n-1}(\nu+1)(\sigma_\nu-f)\Delta\lambda_{\nu+1}-(\sigma_m-f)\lambda_m\\&\quad+(\sigma_m-f)\Delta^2\lambda_m.\end{aligned}$$

现在 $A_n(x)=a_n\cos nx$，$\lambda_n=n^{\alpha-\frac{1}{p}-\varepsilon}$. 当 $\alpha p\leqslant1$ 时，我们见到

$$\|\sigma_n^*-\sigma_m^*\|\leqslant K_1+K_2+K_3+K_4+K_5+K_6+K_7+K_8,$$

这里

$$K_5=\|\sigma_n-f\|_p\lambda_n=O(n^{-\alpha})n^{-\frac{1}{p}+\alpha-\varepsilon}=O(n^{-\frac{1}{p}-\varepsilon}),$$

$$K_6=\|\sigma_m-f\|_p\lambda_m=O(m^{-\frac{1}{p}-\varepsilon}),$$

$$K_7=\|\sigma_n-f\|_p\Delta^2\lambda_n=O(n^{-\alpha})n^{\alpha-\frac{1}{p}-\varepsilon-2}=O(n^{-\frac{1}{p}-\varepsilon-2}),$$

$$K_8=\|\sigma_m-f\|_p\Delta^2\lambda_m=O(m^{-\frac{1}{p}-\varepsilon-2}).$$

简写 $K_4=K(m)$，那末

$$K_3=K(n)=\frac{2}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n-1}(\nu+1)\|\sigma_\nu-f\|_p\Delta\lambda_{\nu+1}$$

$$=O\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{1-\alpha+\alpha-\frac{1}{p}-\varepsilon-1}=O(n^{-\frac{1}{p}-\varepsilon}),$$

$$K_4=O(m^{-\frac{1}{p}-\varepsilon}).$$

现在估计

$$K_2=\sum_{\nu=m+1}^{n}(\nu+1)\|\sigma_\nu-f\|_p\Delta^2\lambda_\nu$$

$$=\sum_{\nu=m+1}^{n}\nu^{1-\alpha-\frac{1}{p}+\alpha-\varepsilon-2}=O(m^{-\frac{1}{p}-\varepsilon}).$$

最后，

$$K_1=\sum_{\nu=1}^{m}\nu\left(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{n+1}\right)(\nu+1)\|\sigma_\nu-f\|_p\Delta^2\lambda_\nu$$

$$=O\left(\frac{1}{m}\sum_{1}^{m}\nu^{-\frac{1}{p}-\varepsilon}\right)=O(m^{-\frac{1}{p}-\varepsilon}).$$

设 $2^{k-1}\leqslant n<2^k$，则

$$(\sigma_{2^k}^*-\sigma_n^*)+\sum_{\nu=k+1}^{\infty}(\sigma_{2^\nu}^*-\sigma_{2^{\nu-1}}^*)=f^*(x)-\sigma_n^*(x).$$

由是

$$\|f^*(x)-\sigma_n^*(x)\|_p=O(n^{-\frac{1}{p}-\varepsilon})+O\left[\sum_{\nu=k+1}^{\infty}2^{-\nu\left(\frac{1}{p}+\varepsilon\right)}\right]$$

$$=O(n^{-\frac{1}{p}-\varepsilon}).$$

由引理 3,

$$f^*(x)\in \mathrm{Lip}\left(\frac{1}{p}+\varepsilon,\ p\right).$$

因f^*的富理埃系数是单调的，故由引理2,

$$n^{-\frac{1}{p}+\alpha-\varepsilon}a_n=O(n^{\frac{1}{p}-1+\frac{1}{p}-\varepsilon})=O(n^{-1-\varepsilon}).$$

从而$a_n=O(n^{\frac{1}{p}-1-\alpha})$. 定理3证毕.

将证明中的$\{\lambda_n\}$取成$\lambda_n\downarrow 0$的凸性数列，我们得到如下的

系 1 设$\lambda_n\downarrow 0$, $\Delta^2\lambda_n\geqslant 0$, 则当$\sum A_n(x)\in \mathrm{Lip}(\alpha,\ p)$时，$\sum \lambda_n A_n(x)\in \mathrm{lip}(\alpha,\ p)$.

假如$\sum A_n(x)\in \mathrm{lip}(\alpha,\ p)$，那末$\|f-\sigma_n(f)\|_p=\varepsilon_n n^{-\alpha}$, $\varepsilon_n=o(1)$. 取凹性数列$\{\Lambda_n\}$使得

$$\varepsilon_n\Lambda_n=o(1),\ \Lambda_n\uparrow\infty,\ \sum(\nu+1)|\Delta^2\Lambda_\nu|<\infty,\ (\nu+1)\Delta_{\nu+1}\varepsilon_\nu=o(1),$$

则得

系 2 $\sum A_n(x)\in \mathrm{lip}(\alpha, p)$的话，存在如下的$\{\Lambda_n\}$, $\Lambda_n\uparrow\infty$, $\Lambda_n>0$, $\Delta^2\Lambda_n\leqslant 0$使得

$$\sum \Lambda_n A_n(x)\in \mathrm{Lip}(\alpha,\ p).$$

【引理1的证明】 置$\Delta f_h=f(x+h)-f(x-h)$, 当$f\in \mathrm{Lip}(\alpha,\ p)$, $p>1$时，由黎斯不等式，

$$\int|\Delta\bar{f}_h|^p dx\leqslant C_p\int|\Delta f_h|^p dx.$$

因此，$\bar{f}\in \mathrm{Lip}(\alpha,\ p)$. 置$f+i\bar{f}=F(e^{ix})$, 则得$|z|\leqslant 1$上的解析函数$F(z)\,(z=re^{i\theta})$. 记

$$M_p(r,\ F')=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|F'(re^{i\theta})|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}},$$

我们证明

$$M_p(r,\ F')=O((1-r)^{\alpha-1})\quad (0<r<1).$$

不妨假设$0<\alpha<1$. 由于

$$F'(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{F(e^{i\varphi})e^{i\varphi}d\varphi}{(e^{i\varphi}-re^{i\theta})^2}=\frac{e^{-i\theta}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{F(e^{i\theta+i\varphi})e^{i\varphi}d\varphi}{(e^{i\varphi}-r)^2}$$

$$=\frac{e^{-i\theta}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\varphi}}{(e^{i\varphi}-r)^2}\{F(e^{i\theta+i\varphi})-F(e^{i\theta})\}d\varphi.$$

所以 $M_p(r, F')$ 不大于

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\varphi}{|e^{i\varphi}-r|^2}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|F(e^{i\theta+i\varphi})-F(e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=O\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|\varphi|^{\alpha}d\varphi}{|e^{i\varphi}-r|^2}\right)=O\left(\int_{0}^{\infty}\frac{\varphi^{\alpha}d\varphi}{(1-r)^2+\varphi^2}\right)$$

$$=O((1-r)^{\alpha-1}).$$

当 $q>p$ 时，从这个结果我们导出 $M_\infty(r, F')=\max_\theta|F'(re^{i\theta})|$ 等于 $O\left((1-r)^{\alpha-1-\frac{1}{p}}\right)$. 事实上，设 $r<\rho<1$，我们见到

$$|F'(re^{i\theta})|=\frac{\rho}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\frac{F'(\rho e^{i\varphi})e^{i\varphi}d\varphi}{\rho e^{i\varphi}-re^{i\theta}}\right|$$

$$\leqslant M_p(\rho, F')\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\rho e^{i\varphi}-re^{i\theta}|^{-\frac{p}{2p-2}}d\varphi\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$=O((1-\rho)^{\alpha-1})(\rho-r)^{-\frac{1}{p}}=O\left((1-r)^{\alpha-1-\frac{1}{p}}\right).$$

现在从这个结果导出 $F\in\mathrm{Lip}\left(\alpha-\dfrac{1}{p}\right)$. 我们只对任意大的 q，从 $F'(re^{i\theta})=O((1-r)^{\gamma-1})\left(\gamma=\alpha-\dfrac{1}{p}\right)$ 导出 $F(re^{i\theta})\in\mathrm{Lip}(\gamma, q)$ 好了. 我们希望得到

$$r\int_{-\pi}^{\pi}|F(re^{i\theta+ih})-F(re^{i\theta})|^q d\theta=r\int_{-\pi}^{\pi}|\Delta|^q d\theta$$

$$=O(h^{q\gamma}),$$

这里 $0<h\leqslant\dfrac{1}{2}$, $1>r\geqslant\dfrac{1}{2}$. 设 C_1 表示 $|z|=r-h$ 的一段圆弧 $\mathrm{arc}(\theta, \theta+h)$，$C_2$ 和 C_3 都是半径的一段，两段落在 C_1 与 $|z|=r$ 上. 那末

$$|\Delta|\leqslant\int_{C_1}+\int_{C_2}+\int_{C_3}|F'(z)||dz|=\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3.$$

我们见到

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi}\Delta_1^q d\theta\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\left(\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\left(\int_0^h|F'(\rho e^{i\theta+i\varphi})|d\varphi\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant\int_0^h d\varphi\left(\int_{-\pi}^{\pi}|F'|^q d\theta\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant O(h(1-\rho)^{\gamma-1})$$

$$=O(h^\gamma),$$

关于 r 是均匀的. 其次,

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi}\Delta_2^q d\theta\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\left(\int_{\rho}^{\rho+h}|F'(te^{i\theta})|\,dt\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant\int_{\rho}^{\rho+h}dt\left(\int_{-\pi}^{\pi}|F'(te^{i\theta})|^q d\theta\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=O\left(\int_{\rho}^{\rho+h}(1-t)^{\gamma-1}dt\right)$$

关于 h 与 r 是均匀的; 当 $1-r>h$, 或 $1-\rho>2h$ 时, 上式是

$$O(h)(1-\rho-h)^{\gamma-1}=O(h^\gamma),$$

假如 $1-r\leqslant h$ 或 $1-\rho\leqslant 2h$, 那末上式等于

$$O\left(\int_{\rho}^{1}(1-t)^{\gamma-1}\,dt\right)=O((1-\rho)^\gamma)=O(h^\gamma).$$

同样可证

$$\int_{-\pi}^{\pi}\Delta_3^q\,d\theta=O(h^{q\gamma}).$$

这就完成了引理 1 的证明.

【引理 2 的证明】 设 $f(x)\in\operatorname{Lip}\alpha$, 则 $\mathfrak{S}[f,0]=\sum_1^\infty a_n$ 收敛. 我们见到

$$f(0)-f(x)=\sum_1^\infty a_n(1-\cos nx)$$

$$=2\sum_{n=1}^\infty a_n\sin^2\frac{nx}{2}.$$

置 $x=\frac{1}{n}$, 则上式左端小于 $Cn^{-\alpha}$, 从而

$$Cn^{-\alpha}\geqslant 2\sum_{\nu=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n}a_\nu\frac{\nu^2}{4n^2}\geqslant 2a_n\cdot\frac{1}{4n^2}n\left[\frac{n}{2}\right]^2.$$

因此 $a_n=O(n^{-1-\alpha})$. 当 $g(x)\in\operatorname{Lip}\alpha$ 时, 由黎斯不等式, $f(x)\in\operatorname{Lip}\alpha$. 从而仍得 $a_n=O(n^{-1-\alpha})$.

【引理 3 的证明】 首先从 $f\in\operatorname{Lip}(\alpha,p)$ 导出 $\|f-\sigma_n\|_p=O(n^{-\alpha})$. 由于

$$\sigma_n(x)-f(x)$$
$$=\frac{1}{2\pi(n+1)}\int_0^\pi\{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)\}\left(\frac{\sin\,(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2dt,$$

所以

$$\|\sigma_n-f\|_p\leqslant\frac{1}{2\pi(n+1)}\int_0^\pi\|f(x+t)+f(x-t)$$
$$-2f(x)\|_p\left(\frac{\sin\,(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2dt$$
$$=O\left(\int_0^{\frac{1}{n}}t^{\alpha-1}dt\right)+O\left(\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^1 t^{\alpha-2}dt\right)=O(n^{-\alpha}).$$

其次，$\|\sigma_n-f\|_p=O(n^{-\alpha})$导出$f\in\mathrm{Lip}(\alpha,\ p)$．写着

$$\omega(f,\ t)=\max_{0<h<t}\|f(x+h)-f(x)\|_p,$$

那末

$$\omega\left(f;\ \frac{1}{n}\right)\leqslant\omega\left(f-\sigma_{2^{k+1}};\ \frac{1}{n}\right)+\omega\left(\sigma_{2^{m+1}};\ \frac{1}{n}\right)$$
$$=O\left(2^{-m-1}\right)+\omega\left(\sigma_{2^{m+1}};\ \frac{1}{n}\right).$$

末项不大于

$$\frac{1}{n}\|\sigma'_{2^{m+1}}(x)\|_p\leqslant\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^m\|\sigma'_{2^{\nu+1}}(x)-\sigma'_{2^\nu}(x)\|_p,$$

这里$\sigma'_0(x)=0$．当$t_n(x)$是阶不大于n的三角多项式时，成立着尼可里斯基的不等式

$$\|t'(x)\|_p\leqslant 2n\|t(x)\|_p$$

(证明见第七章§1贝恩斯坦定理的后面)．因此

$$\omega\left(f;\ \frac{1}{n}\right)=O(2^{-1-m})+\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^m 2^{\nu+1}|\sigma_{2^{\nu+1}}-\sigma_{2^\nu}\|_p$$
$$=O(2^{-1-m})+\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^n 2^{\nu(1-\alpha)}=O(2^{-1-m})+\frac{1}{n}O(2^{m(1-\alpha)}),$$

取 m 使 $2^m\leqslant n<2^{m+1}$, 则得

$$\omega\left(f;\ \frac{1}{n}\right)=O(n^{-\alpha}),$$

当 $n=\left[\frac{1}{h}\right]$时, 我们见到

$$\omega(f,\ h)=O(h^{\alpha}).$$

引理 3 证明完毕.

在一般的情况, 当 $f(x)\in\mathrm{Lip}(\alpha,\ p)$, $f(x)\sim\sum a_n\cos nx$ 时, $\{|a_n|\}$ 不一定是单调的. 现在将$\{|a_n|\}$排成单调数列$\{a_n^*\}$ $(a_1^*\geqslant a_2^*\geqslant\cdots)$, 每一 $|a_n|$ 是一个 a_m^*, 每一 a_m^* 可能对应于不止一个 $|a_n|$. 我们证明

定理 4 设 $0<\alpha<1$, $p>1$, 则当 $f(x)\sim\sum a_n\cos nx\in\mathrm{Lip}(\alpha,\ p)$ 时, $\sum a_n^*\cos nx$ 是 $\mathrm{Lip}\left(\alpha,\ \min\left(p,\ \frac{p}{p-1}\right)\right)$中某一函数 $f^*(x)$ 的富理埃级数. 对于 $g(x)\sim\sum a_n\sin nx$ 与 $g^*(x)\sim\sum a_n^*\sin nx$, 成立着同样的事实.

【证明】 我们利用

$$f(x+h)-f(x-h)\sim\sum(-2a_n\sin nh)\sin nx$$

来证明. 假如 $p\geqslant 2$, 那末

$$\left(4\sum_1^{\infty}a_\nu^2\sin^2\nu h\right)^{\frac{1}{2}}=\|f(x+h)-f(x-h)\|_2$$
$$\leqslant\|f(x+h)-f(x-h)\|_p.$$

因此, 当 $h=\pi/4n$ 时,

$$4\sum_{\nu=n}^{2n-1}a_\nu^2\sin\frac{\nu\pi}{4n}=O(h^{-2\alpha})=O(n^{-2\alpha}),$$

$$\sum_{\nu=n}^{2n-1}a_\nu^2=O(n^{-2\alpha}),\quad a_n=O(n^{-\alpha});$$

$$\sum_{\nu=n}^{\infty}a_\nu^2=\sum_{k=0}^{\infty}(a_{2^kn}^2+\cdots+a_{2^{k+1}n-1}^2)=O(n^{-2\alpha}).$$

另一方面, 从

$$|a_n|^p+|a_{n+1}|^p+\cdots\leqslant\max_{\nu\geqslant n}|a_\nu|^{p-2}(a_n^2+a_{n+1}^2+\cdots)$$

得到

$$\left(\sum_{\nu=n}^{\infty}|a_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}}=O(n^{-\alpha}).$$

又从

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{*p}-(a_1^{*p}+\cdots+a_{n-1}^{*p})\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^p-(|a_1|^p+\cdots+|a_{n-1}|^p)$$
$$=O(n^{-\alpha p})$$

得到

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty}a_k^{*p}\right)^{\frac{1}{p}}=O(n^{-\alpha}).$$

由于$\{a_k^*\}$的单调性，此结果等价于 $a_n^{*p}=O(\Delta n^{-\alpha p})=O(n^{-\alpha p-1})$. 因此

$$a_n^*=O\left(n^{-\alpha-1+\frac{p-1}{p}}\right).$$

由定理 3, $f^*\in\mathrm{Lip}\left(\alpha,\ \dfrac{p}{p-1}\right)$.

当 $p<2$ 时，由豪斯多甫和杨格的不等式，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$ 的话，

$$\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}|-2a_\nu\sin\nu h|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\leqslant\|f(x+h)-f(x-h)\|_p=O(h^\alpha),$$

由是得到

$$\sum_{n}^{2n-1}|a_\nu|^{p'}=O(n^{-\alpha p'}),\quad\left(\sum_{\nu=n}^{\infty}|a_\nu|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}=O(n^{-\alpha}),$$

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty}a_k^{*p'}\right)^{\frac{1}{p'}}=O(n^{-\alpha}),\quad a_n^*=O\left(n^{-\alpha-1+\frac{1}{p}}\right).$$

由定理 3, $f^*\in\mathrm{Lip}(\alpha,\ p)$.

对于正弦级数，可以同样证明. 定理证毕.

从定理 3 的证明，我们还可以叙述如下的

定理 5 设 $f\in\mathrm{Lip}(\alpha,\ p)\ (0<\alpha<1,\ 1\leqslant p\leqslant\infty)$, $\{\lambda_n\}$是一凸性单调数列，$\delta>0$,

$$\lambda_n=O(n^{-\delta}),\quad\Delta\lambda_n=O(n^{-1-\delta}),\quad\Delta^2\lambda_n=O(n^{-2-\delta}).$$

假如 $f(x)\sim\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, 那末

$$\frac{1}{2}a_0\lambda_0+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

是$\mathrm{Lip}(\min(\varphi+\delta,1),p)$中某一函数的富理埃级数.

级数$\sum_1^{\infty}a_n\frac{\cos}{\sin}nx$与$\sum_1^{\infty}A_n\frac{\cos}{\sin}nx\left(A_n=\sum_n^{\infty}a_k/k\right)$在适当情况是同一函数族中函数的富理埃级数. 哈戴、培耳曼(R. Bellman)和卢庆骏(美国数学期刊, 1949)都研究过这种函数族. 下面是冈钮希各夫的定理, 拓广了培耳曼(1944年)的结果:

定理 6 设$A_n=\sum_n^{\infty}(a_k/k)$, 则当

$$f(x)\sim\sum a_n\cos nx\in\mathrm{Lip}(\alpha,p)$$

时,

$$F(x)\sim\sum A_n\cos nx\in\mathrm{Lip}(\alpha,p).$$

又$g(x)\sim\sum a_n\sin nx\in\mathrm{Lip}(\alpha,p)$含有

$$G(x)\sim\sum A_n\sin nx\in\mathrm{Lip}(\alpha,p),$$

这里$0<\alpha<1$; $1<p<\infty$.

【证明】 设$p\geqslant2$, 则$F(x)\in\mathrm{Lip}(\alpha,p)$是$A_n=O(n^{\frac{1}{p}-1-\alpha})$的一个结果. 这是从定理3的证明知道的. 由定理3,

$$\varphi(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}\in\mathrm{Lip}\left(\frac{1}{q},q\right)\quad(q>1).$$

由是, 部分和$S_n(\varphi,x)$满足

$$\|\varphi(x)-S_n(\varphi,x)\|_q=O(n^{-\frac{1}{q}}).$$

设$\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$, 则从$\|f-\sigma_n(f)\|_p=O(n^{-\alpha})$(引理3)以及

$$A_{n+1}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f(x)-S_n(f,x)][\varphi(x)-S_n(\varphi,x)]dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f-\sigma_n(f))(\varphi-S_n(\varphi))dx$$

得到

$$\pi|A_{n+1}|\leqslant\|f(x)-\sigma_n(f,x)\|_p\cdot\|\varphi(x)-S_n(\varphi,x)\|_q$$

$$=O(n^{-\alpha-\frac{1}{q}}).$$

从而 $A_n=O(n^{\frac{1}{p}-1-\alpha})$.

其次，假设 $1<p<2$. 我们证明，若 $\chi(t)=\sum c_\nu \cos \nu t\in L_q$，则

$$\sum_{\nu=n}^{2n-1} c_\nu=O(n^{\frac{1}{q}}).$$

事实上

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[\varphi-\sigma_n(\varphi)]\chi\,dx=\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{-1}c_\nu+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{c_\nu}{n+1}.$$

左端的绝对值不大于 $\|\varphi-\sigma_n(\varphi)\|_p\cdot\|\chi\|_q=O(n^{-\frac{1}{p}})$（引理 3）. 由于

$$|c_1+\cdots+c_n|\leqslant\left(\sum_1^n 1\right)^{\frac{1}{q}}(|c_1|^p+\cdots+|c_n|^p)^{\frac{1}{p}}=O(n^{\frac{1}{q}}),$$

所以

$$\sum_{n+1}^{\infty}\nu^{-1}c_\nu=O(n^{-\frac{1}{p}}).$$

由是可知

$$\sum_{n}^{2n}\nu^{-1}c_\nu=O(n^{-\frac{1}{p}}).$$

利用和差变换，我们见到

$$\sum_{\nu=n}^{2n}c_\nu=\sum_{\nu=n}^{2n}\nu\frac{c_\nu}{\nu}=O(n^{1-\frac{1}{p}})=O(n^{\frac{1}{q}}).$$

利用这个结果，我们证明

$$\sum_{n-1}^{2n}A_\nu c_\nu=O(n^{-\alpha}).$$

由于 $A_\nu c_\nu=c_\nu\sum_{k=\nu}^{\infty}a_k/k$; 所以 $\sum_{n-1}^{2n}A_\nu c_\nu$ 等于

$$\sum_{k=n-1}^{\infty}\frac{a_k}{k}\sum_{\nu=n-1}^{\min(k,2n)}c_\nu=\sum_{k=n-1}^{2n}a_k k^{-1}\sum_{\nu=n-1}^{k}c_\nu+\sum_{k=2n+1}^{\infty}a_k k^{-1}\sum_{\nu=n-1}^{2n}c_\nu$$

$$=\Sigma_1+\Sigma_2.$$

由于

$$c_{n-1}+\cdots+c_k=O(n^{\frac{1}{q}}),$$

所以

$$\Sigma_1=O(n^{\frac{1}{p}-1-\alpha})O(n^{\frac{1}{q}})=O(n^{-\alpha}),$$

$$\Sigma_2=O(n^{-\alpha}),$$

从而得到

$$A_n c_n + \cdots + A_{2n} c_{2n} = O(n^{-\alpha}).$$

由是 $F \in \mathrm{Lip}(\alpha, p)$ 是下述引理的结论.

引理 4 假如 $F(x) \sim \sum A_n \cos nx$ 对于 $L_q(q>1)$ 中任一函数 $\chi(x) = \sum c_n \cos nx$, 系数之间成立着

$$A_n c_n + \cdots + A_{2n} c_{2n} = O(n^{-\alpha}) \quad (0<\alpha<1),$$

那末

$$F(x) \in \mathrm{Lip}(\alpha, p),$$

但 $p = \dfrac{q}{q-1}$.

【证明】 我们见到

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (F - \sigma_n(F))\chi\, dx = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\nu}{n+1} a_\nu c_\nu + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k c_k.$$

假如 $2^l \leqslant n < 2^{l+1}$, 那末, 末项等于

$$\sum_{k=n}^{2^{l+1}-1} a_k c_k + \sum_{\nu=l+1}^{\infty} \sum_{2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} a_k c_k = O(2^{-\alpha l}) + \sum_{\nu=l+1}^{\infty} O(2^{-\nu\alpha})$$
$$= O(2^{-\alpha l}) = O(n^{-\alpha}).$$

还有一项是

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\nu a_\nu c_\nu}{n+1} = \sum_{\left[\frac{n}{2}\right]}^{n} + \sum_{\left[\frac{n}{4}\right]}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1} + \cdots$$
$$= \left\{O(n^{1-\alpha}) + O\left(\frac{n}{2}\right)^{1-\alpha} + O\left(\frac{n}{4}\right)^{1-\alpha} + \cdots\right\} \frac{1}{n+1}$$
$$= O(n^{-\alpha})\left(1 + \frac{1}{2^{1-\alpha}} + \frac{1}{4^{1-\alpha}} + \cdots\right) = O(n^{-\alpha}).$$

因此

$$\int_0^{2\pi} (F - \sigma_n(F))\chi\, dx = O(n^{-\alpha}).$$

这就是说, 泛函 $u_n(\chi) = \int_0^{2\pi} n^\alpha (F - \sigma_n(F))\chi\, dx$ 是有界, 但 $\chi \in L_q$. 由是可知(参见齐革蒙特《三角级数论》旧版第 99 页):

$$\| n^\alpha (F - \sigma_n(F)) \|_p = O(1),$$

由引理 3, $F\in \mathrm{Lip}(\alpha, p)$. 证明完毕.

定理 6 的第二部分的证明从略.

定理 7 设 $f(x)\sim\sum a_n\cos nx\in \mathrm{Lip}(\alpha, p)$, 则当 $p\geqslant 1$, $0<\alpha p<1$ 时,

$$\Phi(x)\sim\sum_1^\infty \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\cos nx\in \mathrm{Lip}(\alpha, p).$$

【证明】 我们可以证明偶函数

$$\Phi^*(x)=\int_x^\pi \frac{f(u)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}u}du \quad (0<x\leqslant\pi)$$

的富理埃系数是

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{2n}-\frac{a_n}{n} \quad (n=1,\ 2,\ \cdots).$$

由于 $f(x)\in \mathrm{Lip}(\alpha, p)$, 所以 $\sum\frac{a_n}{n}\cos nx\in \mathrm{Lip}(\alpha, p)$. 因此我们只要证明 $\Phi^*(x)\in \mathrm{Lip}(\alpha, p)$ 当 $\alpha p<1$ 时成立.

首先讨论 $p=1$ 的情况. 我们见到

$$\int_0^{\pi-h}|\Phi^*(x)-\Phi^*(x+h)|dx$$

$$=\int_0^{\pi-h}dx\left|\int_x^{x+h}\frac{f(u)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}u}du\right|.$$

交换积分的次序, 并且以 $\frac{2}{u}$ 代 $1/\operatorname{tg}\frac{u}{2}$, 上式左端小于

$$2\int_0^h\frac{|f(u)|}{u}du\int_0^u dx+2\int_h^\pi\frac{|f(u)|}{u}\int_{u-h}^u dx$$

$$=2\int_0^h|f(u)|du+2h\int_h^\pi\frac{|f(u)|}{u}du$$

$$=O(h^\alpha)+2h\left\{\frac{1}{u}\int_0^u|f(t)|dt\Big|_h^\pi+\int_h^\pi u^{-2}\int_0^u f(t)dt\right\}$$

$$=O(h^\alpha)+O(h)+O(h^\alpha)+O(h-h^{-1+\alpha})$$

$$=O(h^\alpha).$$

其次, 当 $1<p<\infty$ 时,

$$\left[\int_0^{\pi-h}|\Phi^*(x)-\Phi^*(x+h)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}=\left(\int_0^{\pi-h}dx\left|\int_x^{x+h}\frac{f(u)}{\operatorname{tg}\frac{u}{2}}du\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant 2\int_0^h\frac{|f(u)|}{u}du\left(\int_0^u dx\right)^{\frac{1}{p}}+2\int_h^\pi\frac{|f(u)|}{u}du\left(\int_{u-h}^u dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant 2\int_0^h|f(u)|u^{\frac{1}{p}-1}du+2h^{\frac{1}{p}}\int_h^\pi\frac{|f(u)|}{u}du.$$

条件 $f\in\operatorname{Lip}(\alpha,\ p)$ 含有 $\int_0^u|f(t)|^p dt=O(u^{\alpha p})$，从而

$$\int_0^u|f(t)|dt\leqslant u^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^u|f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}=O(u^{\alpha+\frac{1}{q}}),$$

$$\int_0^h|f(u)|u^{\frac{1}{p}-1}du=O(h^{\alpha+\frac{1}{q}+\frac{1}{p}-1})+O\left(\int_0^h u^{-\frac{1}{q}-1+\alpha+\frac{1}{q}}du\right)$$

$$=O(h^\alpha).$$

依照 $p=1$ 的情况，我们可以证明

$$h^{\frac{1}{p}}\int_h^\pi\frac{|f(u)|}{u}du=O(h^\alpha).$$

总结起来，$\Phi^*(x)\in\operatorname{Lip}(\alpha,\ p)$.

现在讨论正弦级数．设 $g(x)\sim\sum b_n\sin nx\in\operatorname{Lip}(\alpha,\ p)$,

$$\Psi(x)\sim\sum_1^\infty\left(\sum_{m=n}^\infty\frac{2b_m}{m}\right)\sin nx.$$

定理 8 设 $0<\alpha<1$，则 $g(x)\in\operatorname{Lip}(\alpha,1)$ 含有 $\Psi(x)\in\operatorname{Lip}(\alpha,1)$，$g(x)\in\operatorname{Lip}\alpha$ 含有 $\Psi(x)\in\operatorname{Lip}\alpha$.

【证明】 容易证明，当 $0<x<\pi$ 时，

$$\Psi^*(x)=\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\int_0^x g(t)dt$$

$$=\sum_1^\infty\left(\sum_{m=n}^\infty\frac{2b_m}{m}-\frac{b_n}{n}\right)\sin nx$$

[见卢庆骏在美国数学期刊 (AJM) 71 卷上的论文(1949)]．因此我们只要证明 $\Psi^*(x)\in L(\alpha,\ 1)$，就得到 $\Psi(x)\in L(\alpha,\ 1)$．我们不妨对 $0\leqslant x<x+h\leqslant\pi$ 考虑 $\Psi^*(x+h)-\Psi^*(x)$ 的值，它等于

$$\operatorname{ctg}\frac{x+h}{2}\int_0^{x+h} g(t)dt-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\int_0^x g(t)dt$$
$$=\int_0^x g(t)dt\left[\operatorname{ctg}\frac{x+h}{2}-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right]+\operatorname{ctg}\frac{x+h}{2}\int_x^{x+h} g(t)dt.$$

由是

$$\int_0^{\pi-h}|\Psi^*(x+h)-\Psi^*(x)|dx$$
$$\leqslant\int_0^{\pi-h}\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}\frac{x+h}{2}\right)\int_0^x|g(t)|dt\,dx$$
$$+\int_0^{\pi-h}\operatorname{ctg}\frac{x+h}{2}\int_x^{x+h}|g(t)|dt\,dx$$
$$=I_1+I_2.$$

交换积分的次序，我们见到

$$I_2\leqslant\int_0^h|g(t)|\int_0^t\operatorname{ctg}\frac{x+h}{2}dx\,dt+\int_h^\pi|g(t)|\int_{t-h}^{\min(t,\pi-h)}\operatorname{ctg}\frac{x+h}{2}\,dx\,dt$$
$$=O\left(\int_0^h|g(t)|dt\right)+\int_h^\pi|g(t)|\frac{h}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}dt.$$

由于 $g\in\operatorname{Lip}(\alpha,1)$，所以

$$\int_0^h|g(t)|dt=O(h^\alpha),$$
$$\int_h^\pi t^{-1}|g(t)|dt=\frac{1}{t}\int_0^t|g(u)|du\Big|_h^\pi+\int_h^\pi t^{-2}\int_0^t|g(u)|du\,dt$$
$$=O(h^{\alpha-1}).$$

从而得到 $I_2=O(h^\alpha)$. 积分 I_1 是两个积分

$$\int_0^h\cdots dx\quad 和\quad\int_h^{\pi-h}\cdots dx$$

的和. 前者等于

$$\int_0^h\frac{\sin\frac{h}{2}}{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x+h}{2}}\int_0^x|g(t)|dt\,dx=O\left(\int_0^h\frac{x^\alpha}{x}\,dx\right)=O(h^\alpha),$$

后者等于

$$\int_h^{\pi-h}\frac{\sin\frac{h}{2}O(x^\alpha)}{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x+h}{2}}dx=O\left(h\int_h^{\pi-h}x^{\alpha-2}dx\right)=O(h^\alpha).$$

从而 $I_1=O(h^\alpha)$. 由是 $\Psi^*(x)\in\mathrm{Lip}(\alpha,1)$.

其次假设 $g(x)\in\mathrm{Lip}\,\alpha$. 我们要证 $\Psi(x)\in\mathrm{Lip}\,\alpha$. 其实只要证明 $\Psi^*(x)\in\mathrm{Lip}\,\alpha$. 由于 $g(t)-g(0)=g(t)$, 所以 $g(t)=O(t^\alpha)$, 从而

$$\begin{aligned}&\Psi^*(x+h)-\Psi^*(x)\\&=\left(\mathrm{ctg}\frac{x}{2}-\mathrm{ctg}\frac{x+h}{2}\right)\int_0^x g(t)dt+\mathrm{ctg}\frac{x+h}{2}\int_x^{x+h}g(t)dt\end{aligned}$$

的末项等于

$$O\left(\mathrm{ctg}\frac{x+h}{2}\cdot(x+h)^\alpha h\right)=O(h(x+h)^{\alpha-1})=O(h^\alpha).$$

还有一项当 $h\leqslant x\leqslant\pi$ 时, 等于

$$\frac{\sin\frac{h}{2}}{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x+h}{2}}\int_0^x g(t)dt=O\left(\frac{hx^{\alpha+1}}{x(x+h)}\right)=O(hx^{\alpha-1})=O(h^\alpha);$$

否则 $(0<x<h)$ 左端是 $O(x^\alpha)=O(h^\alpha)$. 总结起来, 我们见到

$$\Psi^*(x+h)-\Psi^*(x)=O(h^\alpha)\quad(h>0).$$

证明完毕.

在定理 7 中的条件下, 能否断定函数

$$\Phi_1(x)\sim\sum_1^\infty\frac{|a_1|+\cdots+|a_n|}{n}\cos nx$$

属于 $\mathrm{Lip}(\alpha,p)$? 我们证明如下的定理.

定理 9 设 $f(x)\sim\sum\limits_1^\infty a_n\cos nx\in\mathrm{Lip}(\alpha,p)$, 则当

$$1<p\leqslant 2,\ 0<\alpha<\frac{1}{p}$$

时, $\Phi_1(x)\in\mathrm{Lip}(\alpha,p)$. 当 $p>2$ 时, 或当 $p\geqslant\frac{1}{\alpha}$ 时, $\Phi_1(x)$ 未必属于 $\mathrm{Lip}(\alpha,p)$. 同样的结果, 对于正弦函数也成立.

【证明】 设 $\{a_n^*\}$ 是由 $\{|a_n|\}$ 更序而成的单调数列, 则由定理 4,

$$f^*(x)\sim\sum a_n^*\cos nx\in \mathrm{Lip}(\alpha,\ p).$$

由定理 3, $a_n^*=O(n^{-\alpha-\frac{1}{q}})$, 这里 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 由于

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k|\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^*=O\Big(\sum_1^n n^{-\frac{1}{q}-\alpha}\Big)=O(n^{\frac{1}{p}-\alpha}),$$

所以当 $\chi(t)\sim\sum c_\nu\cos\nu t\in L_q$ 时, 由定理 6 的证明,

$$\sum_{\nu=n+1}^{2n}c_\nu\frac{|a_1|+\cdots+|a_\nu|}{\nu}=\sum_{j=1}^{n+1}|a_j|\sum_{\nu=n+1}^{2n}\frac{c_\nu}{\nu}+\sum_{j=n+2}^{2n}|a_j|\sum_{\nu=j}^{2n}\frac{c_\nu}{\nu}$$

$$=O(n^{-\frac{1}{p}})\sum_1^{2n}|a_j|=O(n^{-\alpha}).$$

从而 $f^*(x)\in\mathrm{Lip}(\alpha,\ p)$ (引理 4).

同样, 从 $\sum a_n\sin nx\in\mathrm{Lip}(\alpha,\ p)$ 可以导出 $\sum a_n^*\sin nx\in\mathrm{Lip}(\alpha,\ p)$.

设 $f(x)=\cos x$, 则 $\Phi_1(x)=\sum n^{-1}\cos nx$ 属于 $\mathrm{Lip}\Big(\frac{1}{p},\ p\Big)$而不属于 $\mathrm{Lip}(\alpha,\ p)$, $\alpha>\frac{1}{p}$ 的话. 但是由于 $f(x)\in\mathrm{Lip}(1,\ p)$, 所以定理当 $p>2$ 或 $\alpha p>1$ 时, 不成立. 定理当 $\alpha p=1$ 时也不成立. 事实上, 取 $f(x)=\sum n^{-1}\cos nx$, 则 $f(x)\in\mathrm{Lip}\Big(\frac{1}{p},\ p\Big)$. 但是, 由于

$$\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}\simeq\frac{1}{n}\log n\neq O(n^{\frac{1}{p}-1-\alpha})\quad\Big(\alpha=\frac{1}{p}\Big),$$

所以由定理 3, $\Phi_1(x)\,\overline{\in}\,\mathrm{Lip}\Big(\frac{1}{p},\ p\Big)$.

当 $p>2$ 时, 即使 $\alpha p<1$, $\Phi_1(x)$ 也未必属于 $\mathrm{Lip}(\alpha,\ p)$. 例如取适当的 $\varepsilon_n=\pm1$, 可使 $\sum\varepsilon_n\{\sqrt{n}\log^2(n+1)\}^{-1}\cos nx$ 成一 $C_{2\pi}$ 中的偶函数(证明详见次节). 设 $0<\alpha<1$, 则由定理 5, 级数

$$\sum_1^\infty n^{-\alpha}\varepsilon_n\{\sqrt{n}\log^2(n+1)\}^{-1}\cos nx=f(x)\in\mathrm{Lip}\,\alpha.$$

但是这里 $|a_n|=[n^{\frac{1}{2}+\alpha}\log^2(n+1)]^{-1}$, $p>2$, $\alpha p<1$,

$$\frac{|a_1|+\cdots+|a_n|}{n}>\frac{C}{\log^2(n+1)}n^{-\frac{1}{2}-\alpha}\neq O(n^{\frac{1}{p}-1-\alpha}).$$

定理 9 证毕.

6. 系数的变动与函数的变质

任一符号叙列$\{\varepsilon_n\}$可用拉特马吼的函数列$\{\varphi_n(t)\}$来表达：$\varphi_n(t)=\operatorname{sgn}\sin(2^{n+1}\pi t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$. 对于一定的$\{\varepsilon_n\}$，存在$t_0\in[0,1]$适合$\varphi_n(t_0)=\varepsilon_n$. 对于三角级数

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_1^\infty(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\equiv\sum_0^\infty A_n(x),$$

我们作出许多(系数)变号(变更符号)的级数

$$\sum_0^\infty A_n(x)\varphi_n(t)\quad(0\leqslant t\leqslant 1).$$

假如后者在t的点集T上具有性质P，$|T|=1$的话，我们便说：几乎一切级数$\sum A_n(x)\varphi_n(t)$具有性质P. 一切级数$\sum A_n(x)\varphi_n(t)$的系数都满足

$$|a_n\varphi_n(t)|=|a_n|,\quad |b_n\varphi_n(t)|=|b_n|,$$

因此我们称$\sum A_n(x)\varphi_n(t_1)$和$\sum A_n(x)\varphi_n(t_2)$ $(t_1\in[0,1],\ t_2\in[0,1])$为系数同模的两个三角级数. 现在证明下述

定理 1 假如$\sum(a_n^2+b_n^2)<\infty$，那末几乎一切系数同模的级数$\sum A_n(x)\varphi_n(t)$概收敛. 假如$\sum(a_n^2+b_n^2)(\log n)^p$对于某一大于1的$p$收敛，那末几乎一切系数同模级数匀敛于连续函数.

这是配赖(Paley)和齐革蒙特的定理(剑桥杂志，1930).

【证明】 当$\sum(a_n^2+b_n^2)<\infty$时，$\sum A_n^2(x)<\infty$；由是可证

$$S_n(t)=\sum_{\nu=0}^n A_\nu(x)\varphi_\nu(t)\equiv S_n(t,x)$$

在$0\leqslant t\leqslant 1$上概敛(固定$x\in[0,2\pi]$)，设$[a,b]\subset[0,1]$，则由黎斯和菲秀(E. Fisher)关于直交函数系的定理(见定理1证明的下面)，存在函数$H(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$适合

$$\int_0^1[H(t)-S_n(t)]^2\,dt\to 0\quad(n\to\infty).$$

从而

$$\int_a^b(S_n(t)-H(t))\,dt\to 0$$

关于$[a, b]$均匀地成立；事实上，左端的绝对值不大于

$$\int_0^1 |H(t)-S_n(t)|dt\leqslant\left[\int_0^1 [H(t)-S_n(t)]^2 dt\right]^{\frac{1}{2}}=o(1).$$

设$[a, b]=[\nu 2^{-k}, \nu 2^{-k}+2^{-k}]$，则因

$$\int_a^b \varphi_{k+l}(t)dt=0 \quad (l=0, 1, \cdots),$$

我们见到，当$n>k$时，

$$O=\int_a^b [H(t)-S_{k-1}(t)]\,dt=\int_a^b (S_n(t)-S_{k-1}(t))dt.$$

从而

$$2^k\int_a^b S_{k-1}(t)dt=2^k\int_a^b H(t)dt=H(t)+o(1) \quad (k\to\infty)$$

几乎处处成立．或是，除开$[0, 1]$中t的一零集，成立着

$$\lim_{n\to\infty} S_n(t)=H(t)\equiv H(t, x).$$

这就证明了定理的第一部分．从$S_n(t)\to H(t)$，我们还要证明：当$t\in E$，$|E|=1$时，关于$x\in[0, 2\pi]$均匀地成立着

$$\sigma_n(x, t)=\frac{S_1(t)+\cdots+S_n(t)}{n+1}=o(\sqrt{\log n}).$$

我们利用杨格的不等式（见陈建功的《实函数论》）

$$ab\leqslant\Phi(a)+\Psi(b)$$

来证明，这里

$$\Phi(v)=\int_0^v \varphi(u)du, \quad \Psi(v)=\int_0^v \psi(u)du;$$

$\varphi(u)$ 和 $\psi(u)$ 是相互为逆的增加函数，$\varphi(0)=\psi(0)=0$, $a>0$, $b>0$．由于

$$\pi\sigma_n(x, t)=\int_0^{2\pi} S_n(t, u)K_n(u-x)du,$$

所以$\pi|\sigma_n(x, t)|$不大于

$$\int_0^{2\pi}\Phi(|S_n(t, u)|)du+\int_0^{2\pi}\Psi(K_n(u-x))du.$$

设$\Phi(v)=e^{\mu v^2}-1\,(\mu>1)$，则$w=\varphi(v)=2\mu v e^{\mu v^2}$，当$v\geqslant 1$时，

$$\log\varphi(v)\geqslant\mu v^2,\quad v\leqslant\sqrt{\frac{\log w}{\mu}}.$$

由是可知，$\Psi(w)\leqslant w\max(1+\sqrt{\mu^{-1}\log w})$. 从而

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}\Psi(K_n(u-x))du\\&\leqslant\int_0^{2\pi}K_n(u-x)\max\left(1+\sqrt{\mu^{-1}\log K_n(u-x)}\right)du\\&\leqslant(\mu^{-1}\log n)^{\frac{1}{2}}\int_0^{2\pi}K_n(u-x)du\\&=\pi(\mu^{-1}\log n)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

还有一个积分，在 $\sum(a_k^2+b_k^2)<\infty$ 的基础上，它是 $O(1)$. 由是

$$\sigma_n(x,\ t)=O(\sqrt{\mu^{-1}\log n})$$

关于 x 均匀地成立. 由于 μ 可以很大，所以 $\sigma_n(x,\ t)=o(\sqrt{\log n})$.

现在假设 $\sum(a_k^2+b_k^2)(\log k)^p<\infty\ (p>1)$. 置

$$\tau_n(x)=\sum_0^n\left(1-\frac{\nu}{n+1}\right)A_\nu(x)\,[\log(\nu+1)]^{\frac{p}{2}},$$

$$\sigma_n(x)=\sum_0^n\left(1-\frac{\nu}{n+1}\right)A_\nu(x),$$

由和差变换，我们见到

$$\begin{aligned}\sigma_n(x)=&\sum_{\nu=0}^{n-1}\sigma_\nu(x)(\nu+1)\Delta_\nu^2\left[\frac{n+1-\nu}{n+1}(\log(\nu+1))^{-\frac{p}{2}}\right]\\&+(n+1)\sigma_n(x)\,\frac{n+1-n}{n+1}(\log(n+1))^{-\frac{p}{2}}\\=&\sum_{\nu=0}^{n-1}\sigma_\nu(x)(\nu+1)\frac{n+1-\nu}{n+1}\,\Delta^2(\log(\nu+1))^{-\frac{p}{2}}\\&+\frac{2}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n-1}(\nu+1)\sigma_\nu(x)\Delta(\log(\nu+1))^{-\frac{p}{2}}+o(1).\end{aligned}$$

末项的 $o(1)$ 关于 x 是均匀的，中项也均匀地是 $o(1)$. 事实上，

$$\sigma_n(x)=o(\sqrt{\log n}),$$

$$\frac{2}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n-1}O(\log(\nu+1))^{-\frac{p}{2}-1+\frac{1}{2}}=o(1).$$

由于 $\sum\sigma_\nu(x)(\nu+1)\Delta^2\log^2[\log(\nu+1)]^{-\frac{p}{2}}$ 均匀地有极限，所以它们的

算术平均也是如此. 因此, 当 $n\to\infty$ 时, 极限 $\lim\sigma_n(x)$ 均匀地存在, 它的极限是 $C_{2\pi}$ 中的一个函数.

在这个基础上, 结合到 $\sigma_n(x, t)=o(\sqrt{\log n})$ $(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$ 对于 t 几乎处处成立, 我们断定: 几乎一切级数 $\sum A_n(x)\varphi_n(t)$, 当 $\sum(a_n^2+b_n^2)\cdot(\log n)^p$ $(p>1)$ 收敛时, 是 $C_{2\pi}$ 中函数的富理埃级数.

黎斯-菲秀定理 设 $\{\phi_n(x)\}$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ 是一就范的直交函数系, 假如 $\sum c_n^2$ 收敛 $(c_n\gtrless 0)$, 那末 $L_2(a, b)$ 中必有函数 $f(x)$ 适合于

$$\int_a^b f^2(x)dx=\sum_0^\infty c_n^2,\quad c_n=\int_a^b f(x)\phi_n(x)dx \quad (n=0, 1, \cdots).$$

【证明】 这里建立更一般的定理. 假如

$$f_n(x)\in L_p[a, b] \quad (p>0);$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ n'\to\infty}}\int_a^b |f_n(x)-f_{n'}(x)|^p dx=0,$$

那末 $L_p(a, b)$ 中存在 $f(x)$ 适合于

$$\int_a^b |f(x)-f_n(x)|^p dx\to 0,$$

$$\int_a^b |f_n(x)|^p dx\to\int_a^b |f(x)|^p dx.$$

利用不等式

$$||\alpha|^p-|\beta|^p|\leqslant p|\alpha-\beta|(|\alpha|^{p-1}+|\beta|^{p-1}),$$

我们见到

$$\int_a^b ||f_n|^p-|f_{n'}|^p|dx\leqslant p\int_a^b |f_n-f_{n'}|\{|f_n|^{p-1}+|f_{n'}|^{p-1}\}dx$$

$$\leqslant p\left[\int_a^b |f_n-f_{n'}|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}\cdot\left\{\left(\int_a^b |f_n|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}}+\left(\int_a^b |f_{n'}|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\right\}.$$

置 $\max(1, 2^{p-1})=P$, 则因

$$|f_n+f_{n'}|^p\leqslant P(|f_n|^p+|f_{n'}|^p),$$

$$\int_a^b |f_n|^p dx\leqslant P\int_a^b |f_{n'}|^p dx+P\int_a^b |f_n-f_{n'}|^p dx.$$

我们见到 $\int_a^b |f_n|^p dx=O(1)$. 从上面所得的不等式,

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ n'\to\infty}}\int_a^b \big||f_n|^p-|f_{n'}|^p\big|dx=0.$$

由是可知极限 $\lim\int_a^b |f_n|^p dx$ 存在.

设 $\varepsilon>0$, 当 $n\geqslant N(\varepsilon)$, $n'\geqslant N(\varepsilon)$ 时,

$$\int_a^b |f_n-f_{n'}|^p dx<\varepsilon^p,\quad |(x,\ |f_n(x)-f_{n'}(x)|\geqslant\varepsilon)|<\varepsilon.$$

置 $N(2^{-k}\eta)=n_k(k=1,\ 2,\ \cdots)$, 那末存在测度小于 $\sum\limits_1^\infty 2^{-k}\eta=\eta$ 的一个点集 E, 当 $[a,\ b]$ 中的 $x\overline{\in}E$ 时,

$$|f_{n_1}(x)-f_{n_2}(x)|<\frac{1}{2}\eta,\ \cdots,\ |f_{n_k}(x)-f_{n_{k+1}}(x)|<\frac{1}{2^k}\eta,\ \cdots.$$

在 $[a,\ b]-E$ 上, $\{f_{n_r}(x)\}$ 匀敛于一个函数 $f(x)$. 由于 η 可以任意地小,所以 $\{f_{n_r}(x)\}$ 概敛于 $f(x)$. 由是从

$$\int_a^b |f(x)-f_n(x)|^p dx\leqslant\lim_{r\to\infty}\int_a^b |f_{n_r}(x)-f_n(x)|^p dx.$$

得到: 当 $n\to\infty$ 时, 左端等于 $o(1)$. 我们建立了上述一般的黎斯-菲秀定理.

设 $S_n(x)=\sum\limits_0^n c_\nu\phi_\nu(x)$, 则当 $n'>n$ 时,

$$\int_a^b [S_n(x)-S_{n'}(x)]^2 dx=c_{n+1}^2+\cdots+c_{n'}^2=o(1)\quad(n\to\infty).$$

从而有 $f(x)$ 适合于

$$\int_a^b [f(x)-S_n(x)]^2 dx=o(1).$$

置 $\gamma_n=\int_a^b f(x)\phi_n(x)dx$, 则当 $m>n$ 时, γ_n-c_n 等于

$$\gamma_n-\int_a^b S_m(x)\phi_n(x)dx=\int_a^b \phi_n(x)[f(x)-S_m(x)]dx,$$

$$|\gamma_n-c_n|^2\leqslant\int_a^b \phi_n^2 dx\int_a^b |f-S_m|^2 dx=o(1)\quad(m\to\infty).$$

由是 $\gamma_n=c_n(n=0,\ 1,\ \cdots)$. 另一方面, 从 $\int_a^b [f-S_n]^2 dx=o(1)$, 得到

$$\int_a^b f^2\,dx = -\sum_0^\infty c_n^2 + 2\sum_0^\infty c_n\gamma_n = \sum_0^\infty c_n^2.$$

定理证毕.

系 当 $\sum(a_n^2+b_n^2)<\infty$ 时，必有以 $\{a_n, b_n\}$ 为富理埃系数的 $f(x)$ 适合

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2\,dx = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_n^2+b_n^2).$$

定理 2 设 $f(x)\in \mathrm{Lip}(\alpha, p)$ $(0\leqslant\alpha\leqslant 1,\ 1\leqslant p\leqslant\infty)$[*)]，则当 $0<\beta<1$, $\mathfrak{S}[f;\ x] = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_n\cos nx + b_n\sin nx)$ 时,

$$f_\beta(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (-\beta)_n (a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

$$\in \mathrm{Lip}(1-p^{-1}) \quad (\alpha+\beta>1);$$

$$f_\beta(x)\in \mathrm{Lip}(\alpha+\beta-p^{-1}) \quad \left(\frac{1}{p}<\alpha+\beta<1\right);$$

$$f_\beta(x+h)-f_\beta(x) = O\left(h\log\frac{1}{h}\right) \quad (\alpha+\beta=1,\ h>0).$$

【证明】 利用前节引理 1 的证明以及 $F(z)$ 等函数，但是这里还要引入

$$F_\beta(z) = \sum_0^\infty (-\beta)_n c_n z^n, \quad c_n = a_n - ib_n \quad (n>0), \quad c_0 = \frac{1}{2}a_0.$$

我们见到

$$F'_\beta(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{F(e^{i\varphi+i\theta})\,d\varphi}{(1-re^{i\varphi})^{2-\beta} re^{i\varphi}} \quad (z=re^{i\theta},\ 0<r<1).$$

从而

$$r\pi F'_\beta(z) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\varphi}(1-re^{i\varphi})^{\beta-2}\{F(e^{i\varphi+i\theta})-F(e^{i\theta})\}\,d\varphi,$$

$$r\pi\|F'_\beta(z)\|_p \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |1-re^{i\varphi}|^{\beta-2}\,d\varphi\left(\int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{i\varphi+i\theta})-F(e^{i\theta})|^p\right)^{\frac{1}{p}} d\theta$$

$$= O\left(\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi|^\alpha [(1-r)^2+\varphi^2]^{\frac{\beta-2}{2}}\,d\varphi\right).$$

因此，当 $r\to 1$ 时,

---

*) $L(0,\ p) = L_p(0,\ 2\pi)$, $\mathrm{Lip}(\alpha,\ \infty) = \mathrm{Lip}\,\alpha$.

$$\|F'_\beta(re^{i\theta})\|_p=O\left[(1-r)^{\alpha+\beta-1}\int_0^{\frac{\pi}{1-r}}t^\alpha(1-t^2)^{\frac{\beta-2}{2}}dt\right].$$

假如 $\alpha+\beta\neq1$，那末

$$\|F'_\beta(re^{i\theta})\|_p=O((1-r)^\eta),$$

这里 $\eta=\min(0,\ \alpha+\beta-1)$，由前节引理 1 的证明，我们见到

$$F'_\beta(re^{i\theta})=O((1-r)^{\eta-\frac{1}{p}}).$$

当 $\alpha+\beta=1$ 时，$\|F'_\beta(re^{i\theta})\|_p=O\left(\log\frac{1}{1-r}\right)$，从而我们见到

当 $\alpha+\beta>1$ 时，

$$F_\beta(e^{i\theta})\in\mathrm{Lip}\left(1-\frac{1}{p}\right);$$

当 $1>\alpha+\beta>\frac{1}{p}$ 时，

$$F_\beta(e^{i\theta})\in\mathrm{Lip}\left(\alpha+\beta-\frac{1}{p}\right);$$

当 $\alpha+\beta=1$ 时，

$$F_\beta(e^{i\theta+ih})-F_\beta(e^{i\theta})=O\left(h^{\frac{1}{q}}\log\frac{1}{h}\right)$$

$$\left(0<h<1,\ 1-\frac{1}{p}=\frac{1}{q}\right).$$

定理证毕.

当 $f(x)\sim\sum A_n(x)\in\mathrm{Lip}(\alpha,\ p)$ 时，我们还要研究级数

$$\mathfrak{S}_\delta[f]=A_0+\sum_1^\infty n^{-\delta}A_n(x)$$

的性质，δ 可以为负数，当 $\delta>0$ 时，我们假设 $A_0=0$.

定理 3 设 $0<\alpha\leqslant1,\ 1\leqslant p<\infty,\ f\in\mathrm{Lip}(\alpha,\ p)$，则当 $0<\alpha+\delta<1$ 时，

$$\mathfrak{S}_\delta[f]\in\mathrm{Lip}(\alpha+\delta,\ p).$$

【证明】 设 $c_n=a_n-ib_n$，作解析函数

$$F_\delta(z)=\mathfrak{S}_\delta[f]+i\tilde{\mathfrak{S}}_\delta[f]=\sum n^{-\delta}c_nz^n.$$

我们见到，$z=re^{i\theta}(0<r<1)$ 的话，

$$zF_\delta'(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_1^\infty n^{1-\delta}r^n e^{in\varphi}\cdot\sum_0^\infty c_n e^{in(\varphi+\theta)}d\varphi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_1^\infty n^{1-\delta}(re^{i\varphi})^n\cdot[F_0(\varphi+\theta)-F_0(\theta)]d\varphi.$$

由于

$$n^{1-\delta}=(1-\delta)_n\frac{n^{1-\delta}}{(1-\delta)_n}$$

$$=\Gamma(-\delta+2)(1-\delta)_n\left\{1+\frac{c_\delta}{n}+\frac{c_\delta'}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right\},$$

所以

$$\sum_1^\infty n^{1-\delta}z^n=\Gamma(-\delta+2)(1-z)^{-2+\delta}[1+O(|1-z|)]$$

$$+O(1)\quad(|z|<1).$$

从而

$$\|zF_\delta'(z)\|_p\leqslant C_\delta\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\|F_0(\varphi-\theta)-F_0(\theta)\|_p}{|1-re^{i\varphi}|^{2-\delta}}d\varphi,$$

常数 c_δ, c_δ', C_δ 只与 δ 有关系. 由是

$$\|F_\delta'(re^{i\theta})\|_p=O\left(\int_0^\pi\frac{\varphi^\alpha d\varphi}{[(1-r)^2+\varphi^2]^{1-\delta/2}}\right)=O((1-r)^{\alpha+\delta-1}).$$

设 C_1 是从 $e^{i\theta}$ 到 $re^{i\theta}$ 的直线段, C_2 表示从 $re^{i\theta}$ 沿以 O 为中心的圆周到 $re^{i(\theta+h)}$ 的圆弧, C_3 是 $re^{i(\theta+h)}$ 到 $e^{i\theta+ih}$ 的直线段, 那末

$$F_\delta(e^{i\theta+ih})-F_\delta(e^{i\theta})=\int_{C_1}+\int_{C_2}+\int_{C_3}F'(z)dz,$$

$$\|F_\delta(e^{i\theta+ih})-F_\delta(e^{i\theta})\|_p\leqslant\sum_{\nu=1}^3\left(\int_0^{2\pi}\left|\int_{C_\nu}F_\delta'(z)\,dz\right|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=I_1+I_2+I_3.$$

首先估计 I_2: 由于

$$I_2^p\leqslant\int_0^{2\pi}\left|\int_0^h F_\delta'(re^{i\theta+i\varphi})d\varphi\right|^p d\theta$$

$$\leqslant\int_0^{2\pi}h^{p-1}\int_0^h|F_\delta'(re^{i\theta+i\varphi})|^p d\varphi\,d\theta$$

$$=h^{p-1}h\|F_\delta'(re^{i\varphi})\|_{p,r}^p$$

所以 $I_2=O[h(1-r)^{\alpha-\delta-1}]$. 假如 $r=1-h$, 那末我们得到

$$I_2=O(h^{\alpha-\delta}).$$

其次计算 I_1:

$$I_1\leqslant\left\|\int_r^1|F'_\delta(\rho e^{i\theta})|d\rho\right\|_p\leqslant(1-r)^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_r^1\|F'_\delta(\rho e^{i\theta})\|_p^p d\rho\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=(1-r)^{1-\frac{1}{p}}O\left[\left(\int_r^1(1-\rho)^{(\alpha-\delta-1)p}d\rho\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

$$=O[(1-r)^{\alpha-\delta}]=O(h^{\alpha-\delta}).$$

同样可证 $I_3=O(h^{\alpha-\delta})$. 三者相加, 得到

$$\|F_\delta(e^{i\theta+ih})-F_\delta(e^{i\theta})\|_p=O(h^{\alpha-\delta}).$$

由是 $F_\delta(e^{i\theta})\in\mathrm{Lip}(\alpha-\delta, p)$. 从而 $\mathfrak{S}_\delta[f]\in\mathrm{Lip}(\alpha-\delta, p)$. 定理 3 证毕.

注意 当 $\alpha+\delta\geqslant1$ 时, $\mathfrak{S}_\delta[f]\in\mathrm{Lip}(1, p)$, 见前节定理 5. 事实上, 除开在 $\delta<0$ 的情况, 定理 3 的结果是含在前节定理 5 之中的.

当 $\sum A_n(x)\in\mathrm{Lip}(\alpha, p)$ 时, 假如 $\sum\lambda_nA_n(x)\in\mathrm{Lip}(\alpha, p)$, 那末写着

$$\{\lambda_n\}-\mathrm{Lip}(\alpha, p)\rightrightarrows\mathrm{Lip}(\alpha, p).$$

系 若 $\{\lambda_n\}-\mathrm{Lip}(\alpha_0, p)\rightrightarrows\mathrm{Lip}(\alpha_0, p)$ $(0<\alpha_0\leqslant1)$, 则对于 $(0, 1]$ 中任一 α, 成立着

$$\{\lambda_n\}-\mathrm{Lip}(\alpha, p)\rightrightarrows\mathrm{Lip}(\alpha, p).$$

【证明】 设 $\sum A_n(x)\in\mathrm{Lip}(\alpha_0, p)$, 则由假设 $\sum\lambda_nA_n(x)\in\mathrm{Lip}(\alpha_0, p)$. 设 $\alpha\neq\alpha_0$, 则由定理 3 及其注意, 当 $\sum A_n^*(x)\in\mathrm{Lip}(\alpha, p)$ 时,

$$\sum n^{\alpha-\alpha_0}A_n^*(x)\in\mathrm{Lip}(\alpha-(\alpha-\alpha_0), p).$$

从而(由假设) $\sum\lambda_nn^{\alpha-\alpha_0}A_n^*(x)\in\mathrm{Lip}(\alpha_0, p)$. 再由定理 3,

$$\sum n^{\alpha_0-\alpha}\lambda_nA_n^*(x)\in\mathrm{Lip}(\alpha_0-(\alpha_0-\alpha), p),$$

即 $\sum\lambda_nA_n^*(x)\in\mathrm{Lip}(\alpha, p)$. 证毕.

设 $0<\alpha\leqslant1$, 记适合

$$\sum n^{-\alpha}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\in\mathrm{Lip}(\alpha, p)$$

的 $\{a_n, b_n\}$ 为 $\{a_n, b_n\}\in\mathrm{Lip}(\alpha, p;\ n^{-\alpha})$. 用系的证法可以建立如下的

定理的前半：

定理 4 假如 $\{a_n, b_n\}\in \mathrm{Lip}(\alpha_0, p;\ n^{-\alpha_0})$ 对于某一 $\alpha_0(0<\alpha_0<1)$ 成立，那末当 $0<\alpha<1$ 时 $\{a_n, b_n\}$ 也属于 $\mathrm{Lip}(\alpha, p; n^{-\alpha})$．但是 $\{a_n, b_n\}$ 未必属于 $\mathrm{Lip}(1, p;\ n^{-1})$．

现在证明定理 4 的后半．设整数 $b>1$，则当 $0<\alpha<1$ 时，

$$f_\alpha(x)=\sum b^{-n\alpha}\cos b^n x\in \mathrm{Lip}\,\alpha \quad (\text{第三章 § 7 定理 5}).$$

从而 $\{1, 0\}\in \mathrm{Lip}(\alpha_0, p; n^{-\alpha_0})\ (1\leqslant p\leqslant\infty)$，但是，由于

$$\frac{f_\alpha(x+h)-f_\alpha(x-h)}{2h}=\sum -b^{n(1-\alpha)}\sin b^n x\left(\frac{\sin b^n h}{b^n h}\right),$$

所以 $f'_\alpha(x)$ 的概然存在等价于级数 $-\sum b^{n(1-\alpha)}\sin b^n x$ 的可用对称求和法几乎处处求和，这就要级数

$$\sum\left(b^{n(1-\alpha)}\right)^2$$

的收敛(理由详下面的引理)．因此当 $0<\alpha\leqslant 1$ 时，导数 $f'_\alpha(x)$ 几乎到处存在．另一方面，当 $f_1(x)\in \mathrm{Lip}(1, 1)$ 时，$f_1(x)$ 相当于一个有界变差的函数(参见梯奇马许的《函数论》第十章习题 10)，从而 $f'_1(x)$ 几乎到处存在，这是矛盾．由是 $\{1, 0\}\overline{\in}\mathrm{Lip}(1, p;\ n^{-1})$．定理 4 证毕．

置 $T^*=((t_{n0},\ t_{n1},\ t_{n2},\ \cdots))$，当 $\lim\limits_{n\to\infty} t_{n\nu}=1\ (\nu=0,\ 1,\ \cdots)$，$\lim\limits_{\nu\to\infty} t_{n\nu}=0\ (n=0,\ 1,\ \cdots)$ 时，称 T^* 是一级数的**线性变换**(当 $\sum\limits_{\nu}|t_{n\nu}-t_{n\nu-1}|=O(1)$ 时，T^* 具有正则性)．

引理 设阿达马缺项三角级数 $\sum A_{n_k}(x)\ (n_k\leqslant\theta n_{k+1},\ \theta<1)$ 几乎处处可用 T^* 变换求和，则必 $\sum\rho_k^2<\infty$，这里

$$\rho_k^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}A_{n_k}^2(x)dx \quad (k>0).$$

【证明】 首先将 T^* 改写成数列求和的变换：$a_{n\nu}=t_{n\nu}-t_{n\nu-1}$，那末

$$\lim_{n\to\infty} a_{n\nu}=0\ (\nu=0,\ 1,\ \cdots),\ \lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n\nu}=1.$$

当 $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}(u_0+u_1+\cdots+u_\nu)a_{n\nu}\to S$ 时，$\sum u_\nu=S(T^*)$．

置 $S_m(x)=A_0(x)+\cdots+A_m(x)$，我们见到

$$\tau_m(x)\equiv\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{m\nu}A_\nu(x)=\sum_{k=1}^{\infty}A_{n_k}(x)R_{mn_k},\quad R_{mn_k}=\sum_{\nu=n_k}^{\infty}a_{m\nu}.$$

由假设，存在正测度的点集 E，在 E 上，$\lim\tau_m(x)$ 存在并且 $|\tau_m(x)|\leqslant M$. 我们将证

$$\frac{1}{4}|E|\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k^2R_{mk}^2\leqslant\int_E\tau_m^2(x)\,dx\leqslant 2|E|\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k^2R_{mk}^2.$$

由是可知

$$\frac{1}{4}|E|\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k^2R_{mk}^2\leqslant M^2|E|,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k^2R_{mk}^2\leqslant(2M)^2.$$

因此 $\sum_{k=1}^{K}\rho_k^2R_{mk}^2\leqslant(2M)^2$. 令 $m\to\infty$，则得 $\sum_{k=1}^{K}\rho_k^2\leqslant(2M)^2$. 从而 $\sum\rho_k^2<\infty$.

将 $\tau_m(x)$ 的部分和 $\sum_{\nu=0}^{N}a_{m\nu}A_\nu(x)$ 写成

$$P(x)\equiv\sum_{-N}^{N}c_\nu e^{in_\nu x}$$

的形式，这里 $n_{-\nu}=-n_\nu$. 从而

$$\int_E P^2(x)\,dx=\int_E\sum c_\nu e^{in_\nu x}\sum\bar{c}_\mu e^{-in_\mu x}\,dx$$

$$=|E|\sum|c_\nu|^2+\sum_{\mu\neq\nu}c_\nu\bar{c}_\mu\int_E e^{i(n_\nu-n_\mu)x}\,dx.$$

最后的积分表示点集 E 的特征函数的"系数" $\gamma_{n_\nu-n_\mu}$ 乘上 2π. 末项 $\sum_{\mu\neq\nu}$ 的绝对值的平方不大于

$$2\pi\left(\sum|c_\nu c_\mu|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\mu\neq\nu}|\gamma_{n_\nu-n_\mu}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant 2\pi\left(\sum|c_\nu|^2\right)\left(\sum_{\mu\neq\nu}|\gamma_{n_\nu-n_\mu}|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

对于任一正整数 N，可以写成 $N=n_\nu-n_\mu$ 的写法的种数不超过 $O(\theta)$ $(n_k\leqslant\theta n_{k+1})$：事实上，不妨假设 $\nu>\mu>0$. 假如 $N=n_\nu-n_{-\mu}$，那末 $N=n_\nu+n_\mu$，$n_\nu\in\left(\frac{1}{2}N,\ N\right)$；这种 n_ν 的个数是 $O\left(\dfrac{1}{\log\frac{1}{\theta}}\right)$. 如果

$N=n_\nu-n_\mu$，那末 $N>n_\nu-\theta n_\nu$，$n_\nu<\frac{N}{1-\theta}$，$n_\nu\in\left(N, \frac{N}{1-\theta}\right)$．这样的 n_ν 的个数是 $O(\theta)$．总结起来，$N=n_\nu-n_\mu$ 的写法只有 $O(\theta)$ 种．由是，设能写成 $n_\nu-n_\mu$ 的最小 N 为 h，我们见到

$$\sum_{\mu\neq\nu}|\gamma_{n_\nu-n_\mu}|^2=O(\theta)[|\gamma_h|^2+\cdots].$$

又因 $\sum|\gamma_\nu|^2=\frac{1}{2\pi}|E|\leqslant 1$，$O(\theta)\leqslant K_\theta$，故 $\sum\limits_{\mu\neq\nu}|\gamma_{n_\nu-n_\mu}|^2\leqslant K_\theta\frac{|E|}{2\pi}$．我们不妨假设 $a_{mn_1}=a_{mn_2}=\cdots=a_{mn_j}=0$，取适当大的 j，可使最小的 $n_\nu-n_\mu(\mu\neq\nu)$ 为 h_0，

$$|\gamma_{h_0}|^2+\cdots\leqslant\frac{1}{2}[|\gamma_h|^2+\cdots].$$

从而得到

$$\frac{1}{2}\sum_{-N}^{N}|c_\nu|^2\leqslant\frac{1}{|E|}\int_E(P(x))^2dx\leqslant\frac{3}{2}\sum_{-N}^{N}|c_\nu|^2.$$

取 N 足够大，可使 $(P(x))^2<(\tau_m(x))^2+1\leqslant M^2+1$；因此

$$\frac{1}{2}\sum_{-N}^{N}|\rho_\nu|^2\leqslant M^2+1,\quad \sum|c_\nu|^2<\infty.$$

由是得到所要的结果：

$$\frac{1}{2}\sum|c_\nu|^2\leqslant\frac{1}{|E|}\int_E(\tau_m(x))^2dx\leqslant\frac{3}{2}\sum|c_\nu|^2.$$

引理证毕．

定理 5　假如 $\{\lambda_n\}-\mathrm{Lip}(\alpha, p)\rightrightarrows\mathrm{Lip}(\alpha, p)$，那末

$$\{\lambda_n\}-\mathrm{lip}(\alpha, p)\rightrightarrows\mathrm{lip}(\alpha, p).$$

倒过来说，也是对的．

【证明】　首先假设 $\{\lambda_n\}-\mathrm{Lip}(\alpha, p)\rightrightarrows\mathrm{Lip}(\alpha, p)$，则当 $\sum A_n(x)\in\mathrm{lip}(\alpha, p)$ 时，我们要证 $\sum\lambda_nA_n(x)\in\mathrm{lip}(\alpha, p)$．

由前节定理 3 的系 2，存在如下的 $\{\mu_n\}$，$0<\mu_n\uparrow\infty$，$\Delta^2\mu_n\leqslant 0$，

$$\sum\mu_n\lambda_nA_n(x)\in\mathrm{Lip}(\alpha, p).$$

利用 $\left\{\frac{1}{\mu_n}\right\}$，由前节定理 3 的系，

$$\sum\frac{1}{\mu_n}\mu_n\lambda_nA_n(x)=\sum\lambda_nA_n(x)\in\mathrm{lip}(\alpha, p).$$

这就证明了定理的前半.

设 $\sum A_n(x)\in \mathrm{Lip}(\alpha, p)$, $\{\lambda_n\}-\mathrm{lip}(\alpha, p)\rightrightarrows \mathrm{lip}(\alpha, p)$, 现在要证

$$\sum \lambda_n A_n(x)\in \mathrm{Lip}(\alpha, p).$$

当 $\mu_n=o(1)$, $\Delta^2\mu_n\geqslant 0$ 时, 由前节定理 3 的系, $\sum \mu_n A_n(x)\in \mathrm{lip}(\alpha, p)$, 应用 $\{\lambda_n\}$ 的性质, 我们见到 $\sum \lambda_n\mu_n A_n(x)\in \mathrm{lip}(\alpha, p)$. 这个结果是对于任意的凸性数列 $\{\mu_n\}$ ($\mu_n=o(1)$) 成立的. 由是可以导出所要的结果. 事实上, 置

$$\sigma_n(x)=\sum_0^n\left(1-\frac{\nu}{n+1}\right)\lambda_\nu\mu_\nu A_\nu(x), \quad \sigma_n^*(x)=\sum_0^n\left(1-\frac{\nu}{n+1}\right)\lambda_\nu A_\nu(x),$$

则有函数 $f_\mu(x)$ 适合

$$\|f_\mu(x)-\sigma_n(x)\|_p=\varepsilon_n=o(n^{-\alpha}).$$

利用前节定理 3 的证明中关于 $\sigma_n^*-\sigma_m^*(n>m)$ 的等式, 我们见到

$$\left[\int_0^{2\pi}|\sigma_n^*(x)-\sigma_m^*(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant \sum_{\nu=0}^m\left[\frac{n+1-\nu}{n+1}-\frac{m+1-\nu}{m+1}\right](\nu+1)\varepsilon_\nu\left|\Delta^2\left(\frac{1}{\mu_\nu}\right)\right|$$

$$+\sum_{\nu=m+1}^n(\nu+1)\varepsilon_\nu\left|\Delta^2\left(\frac{1}{\mu_\nu}\right)\right|+\eta_{mn},$$

$$\eta_{mn}=\frac{2}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n-1}(\nu+1)\varepsilon_\nu\left|\Delta\left(\frac{1}{\mu_{\nu+1}}\right)\right|$$

$$+\frac{2}{m+1}\sum_{\nu=0}^{m-1}(\nu+1)\varepsilon_\nu\left|\Delta\left(\frac{1}{\mu_{\nu+1}}\right)\right|+\varepsilon_n/\mu_n$$

$$+\varepsilon_n\Delta^2\left(\frac{1}{\mu_n}\right)+\varepsilon_m\left(\frac{1}{\mu_m}-\frac{1}{\mu_{m+1}}+\frac{1}{\mu_{m+2}}\right).$$

现在特取如下的 μ_n: $\dfrac{1}{\mu_n}=\omega(n)$, $\omega(x)$ 具有导数 $\omega'(x)$, $\omega''(x)$, $\omega'''(x)$; $\omega'(x)>0$, $\omega''(x)<0$, $\omega'''(x)>0$, $\omega(x)>0$ $(x\geqslant 0)$, $\omega(+\infty)=\infty$. 例如

$$\omega(x)=\frac{\log(x+3)}{\log\log(x+3)}\quad (x>0)$$

就具有这些性质. 由是

$$\left|\Delta^2\left(\frac{1}{\mu_\nu}\right)\right| = [\omega(\nu+1)-\omega(\nu)]-[\omega(\nu+2)-\omega(\nu+1)]$$

$$<\omega'(\nu)-\omega'(\nu+2)<2\omega''(\nu+2).$$

由于 $2x\omega'(x)+x^2\omega''(x)>0$, $[x^2\omega''(x)]'>0$, 所以 $|x\omega''(x)|<2\omega'(x)$。因此

$$\left|\Delta^2\left(\frac{1}{\mu_\nu}\right)\right|<4\omega'(\nu)/\nu.$$

从而

$$(\nu+1)\varepsilon_\nu\Delta^2\left(\frac{1}{\mu_\nu}\right)=O(\omega'(\nu)\nu^{-\alpha})=O(\nu^{-\alpha-1}(\log\log\nu)^{-1}).$$

代入于 $\|\sigma_n^*-\sigma_m^*\|_p$ 的估计式，就得到 $\|\sigma_{2m}^*-\sigma_m^*\|_p=O(m^{-\alpha})$. 由熟知的论法，得到 $\|f^*-\sigma_n^*\|_p=O(n^\alpha)$，这里 f^* 是 $\sigma_n^*(x)$ 当 $n\to\infty$ 时的极限. 由前节定理 3, $f^*\in \mathrm{Lip}(\alpha, p)$; $\mathfrak{S}[f^*, x]=\sum\lambda_n A_n(x)$. 定理证明完毕.

利用定理 5 的后半的证法，我们引入沙勒姆(R. Salem)的定理(数学之基础, 33, 1945):

定理 6 对于任一连续函数 $f(x)$ 的 $\mathfrak{S}[f]=\sum A_n(x)$，存在凹性数列 $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n>0$, $\lambda_n\uparrow\infty$ 使 $\sum\lambda_n A_n(x)$ 仍属于 $C_{2\pi}$. 对于任一富理埃级数 $\sum A_n(x)$，存在如上的 $\{\lambda_n\}$，使 $\sum\lambda_n A_n(x)$ 仍为勒贝格-富理埃级数，并且当 $\sum A_n(x)\in L_p(0, 2\pi)$ 时可使 $\sum\lambda_n A_n(x)\in L_p(0, 2\pi)$, $1\leqslant p<\infty$.

【证明】 记 $\sum A_n(x)$ 与 $\sum\lambda_n A_n(x)$ 的费耶算术平均分别为 $\sigma_n(x)$ 与 $\sigma_n^*(x)$. 我们见到

$$\sigma_n^*(x)-\lambda_0 f(x)=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{n+1-\nu}{n+1}(\nu+1)(\sigma_\nu-f)\Delta^2\lambda_\nu$$

$$+\frac{2}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n-1}(\nu+1)(\sigma_\nu-f)\Delta\lambda_{\nu+1}$$

$$+(\sigma_n-f)\lambda_n-(\sigma_n-f)\Delta^2\lambda_n.$$

由于 $f\in C_{2\pi}$, 所以 $\varepsilon_n=\max\limits_x|\sigma_n(x)-f(x)|=o(1)$. 设增加函数 $u(x)$ $(x\geqslant 0)$ 能使 $\sum\limits_0^\infty[u(n)]^{-1}$ 收敛, $u(0)>0$. 又设正值凹性增加函数 $\lambda(y)$ $(y\geqslant 0)$ 满足下列诸条件:

$$\lambda(+\infty)=+\infty,\ u(\lambda(n))<\frac{1}{\varepsilon_n},\ \lambda'''(y)>0,\ \lambda'(y)y^2\uparrow\infty.$$

由定理 5 的证明,级数 $\sum n\varepsilon_n|\Delta^2\lambda_n|$ 收敛;从而级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(\sigma_n(x)-f(x))\Delta^2\lambda_n$$

匀敛于一个连续函数,它的算术平均当然匀敛于这个函数. 由于 $\varepsilon_n\lambda_n<\lambda_n/u(\lambda_n)=o(1)$, $\varepsilon_n\Delta^2\lambda_n=o(1)$,所以等式中最后两项匀敛于零. $\lambda(y)$ 是凹的,从而 $\frac{\lambda(y)-\lambda(0)}{y-0}$ 是 y 的减小函数. 由于 $\lambda(0)>0$,所以 $\frac{\lambda(y)}{y}$ 是 y 的减小函数;因此 $y\lambda'(y)-\lambda(y)<0$. 由是

$$\nu\varepsilon_\nu|\Delta\lambda_{\nu+1}|=\nu\varepsilon_\nu[\lambda_{\nu+2}-\lambda_{\nu+1}]=\nu\varepsilon_\nu\lambda'(\nu)<\varepsilon_\nu\lambda_\nu=o(1).$$

从而等式的第二项 $\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1}(\nu+1)(\sigma_\nu-f)\Delta\lambda_{\nu+1}$ 匀敛于零. 我们证明了 $\sigma_n^*(x)$ 匀敛于一连续函数: $\sum\lambda_nA_n(x)\in C_{2\pi}$.

假如 $\sum A_n(x)\in L_p(0,2\pi)$,那末当 $n>m$ 时,

$$\begin{aligned}\|\sigma_n^*-\sigma_m^*\|_p\leqslant&\sum_{\nu=0}^{m}\left[\frac{n+1-\nu}{n+1}-\frac{m+1-\nu}{m+1}\right](\nu+1)\varepsilon_\nu|\Delta^2\lambda_\nu|\\&+\sum_{\nu=m+1}^{n}\frac{n+1-\nu}{n+1}(\nu+1)\varepsilon_\nu|\Delta^2\lambda_\nu|\\&+\frac{2}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n-1}(\nu+1)\varepsilon_\nu|\Delta\lambda_{\nu+1}|\\&+\frac{2}{m+1}\sum_{\nu=0}^{m-1}(\nu+1)\varepsilon_\nu|\Delta\lambda_{\nu+1}|\\&+\varepsilon_n\lambda_n+\varepsilon_n|\Delta^2\lambda_n|+\varepsilon_m\lambda_m+\varepsilon_m|\Delta^2\lambda_m|,\end{aligned}$$

这里 $\varepsilon_\nu=\|\sigma_\nu-f\|_p=o(1)$. 取上面的 $\{\lambda_n\}$,我们已经证明,当 $m\to\infty$ 时,上式末尾六项都是 $o(1)$.

记收敛级数 $\sum(\nu+1)\varepsilon_\nu|\Delta^2\lambda_{\nu+1}|$ 的最初 $n+1$ 的和为 Σ_n,那末等式右方最初两项等于

$$\frac{\Sigma_1+\Sigma_2+\cdots+\Sigma_n}{n+1}-\frac{\Sigma_1+\cdots+\Sigma_m}{m+1}=o(1)\quad(m\to\infty).$$

由是 $\|\sigma_n^*-\sigma_m^*\|_p\to0\ (n>m\to\infty)$. 由是可知 $\lim\sigma_n^*(x)\in L_p(0,2\pi)$,从而 $\sum\lambda_nA_n(x)\in L_p(0,2\pi)$. 定理证毕.

7. 系数的准确估计及其应用

对于一定的函数族 $\mathfrak{M}\subset L(0, 2\pi)$，我们来研究系数的准确估计

$$\sup_{f\in\mathfrak{M}}\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\right|=C_n(\mathfrak{M}).$$

当 $\mathfrak{M}$ 是$[\omega]_c$时，勒贝格老早(1910)证明

$$C_n(\mathfrak{M})=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{2x}{n}\right)\sin x\,dx,$$

这里 $\omega(t)$ 适合三个条件：

(i) $\dfrac{\omega(t_1)+\omega(t_2)}{2}\leqslant\omega\left(\dfrac{t_1+t_2}{2}\right)$,

(ii) $\omega(0)=0,\ \omega(t)\in C(0, \pi)$,

(iii) $\omega(t_1+t_2)\leqslant\omega(t_1)+\omega(t_2)$,

当 $f\in[\omega]_c$ 时，

$$\|f(x+t)-f(x)\|_c=\max_{|x|<\pi}|f(x+t)-f(x)|\leqslant\omega(t).$$

假如 $\omega(t)$ 不一定具备凹性（向上凸的性质）(i)，而是满足 (ii) 和 (iii)，那末我们就称 $\omega(t)$ 是一连续性模．叶菲莫夫于1960年苏联科学院的数学杂志 (Изд. АН СССР 24) 上证明：假如 $\omega(t)$ 只是一个连续性模，那末

$$C_n([\omega]_c)=\frac{2\theta_n}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{2x}{n}\right)\sin x\,dx,\quad \theta_n\in\left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

记

$$\|f(x)\|_L=\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,dx,\quad \Delta_hf(x)=f(x+h)-f(x),$$

$$\omega(t, f)=\sup_{0<h<t}\|\Delta_hf(x)\|\quad(0\leqslant t\leqslant\pi);$$

当 $\|\Delta_tf(x)\|\leqslant\omega(t)$ 时，写着 $f(x)\in[\omega]_L$. 别尔迭晓夫(В. И. Бердышев)最近(Изд. АН СССР 29, 1965)将叶菲莫夫的定理拓广到 $[\omega]_L$. 我们应该留意

$$\sup_{f\in\mathfrak{M}}\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\right|=C_n(\mathfrak{M}).$$

定理 1 设在区间 $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{n}$ 上，连续性模 $\omega(t)$ 是向上凸的，那末

$$C_n([\omega]_L)=\frac{1}{2}\theta_n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{2x}{n}\right)\sin x\,dx,\quad \theta_n=1;$$

在一般的连续性模 $\omega(t)$，$\frac{1}{2}\leqslant\theta_n\leqslant1$。

首先建立

引理 设 $f(x)$ 是具有周期 $\frac{2\pi}{n}$ 的周期偶函数，$f\left(x+\frac{\pi}{2n}\right)$ 是 x 的奇函数，$f\left(\frac{\pi}{2n}\right)=0$. 假如 $f(x)\in L\left(-\frac{\pi}{n},\frac{\pi}{n}\right)$，那末

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)-f(x)|\,dx\geqslant8n\left|\int_0^{\frac{t}{2}}f(x)\,dx\right|.$$

当 $f(x)$ 或 $-f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2n}\right]$ 上成一单调增加的正值函数时，且限于此时，式中等号成立.

【证明】 置 $\varDelta_tf(x)=f(x+t)-f(x)$，则 $\varDelta_tf\left(\frac{\pi}{n}k-\frac{t}{2}+x\right)$ 是 x 的奇函数. 事实上，它等于

$$\begin{aligned}&f\left(\frac{\pi}{n}k+\frac{t}{2}+x\right)-f\left(\frac{\pi}{n}k-\frac{t}{2}+x\right)\\&=-\left[f\left(\frac{\pi}{n}k+\frac{t}{2}-x\right)-f\left(\frac{\pi}{n}k+\frac{t}{2}-x-t\right)\right]\\&=-\varDelta_tf\left(\frac{\pi}{n}k-\frac{t}{2}-x\right).\end{aligned}$$

我们见到 $\frac{1}{4n}\|\varDelta_tf(x)\|_L$ 等于

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{\pi}{2n}-\frac{t}{2}}|\varDelta_tf(x)|\,dx&\geqslant\left|\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{\pi}{2n}-\frac{t}{2}}\{f(x)-f(x+t)\}\,dx\right|\\&=\left|\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{\pi}{2n}-\frac{t}{2}}f(x)\,dx-\int_{\frac{t}{2}}^{\frac{\pi}{2n}+\frac{t}{2}}f(x)\,dx\right|\\&=\left|\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}}f(x)\,dx-\int_{\frac{\pi}{2n}-\frac{t}{2}}^{\frac{\pi}{2n}+\frac{t}{2}}f(x)\,dx\right|.\end{aligned}$$

末了的积分是零，前者等于 $2\int_0^{\frac{t}{2}} f(x)\,dx$. 引理证毕.

【定理 1 的证明】 求 $C_n(\mathfrak{M})$ 的值，不妨假设 $f(x)$ 是具周期 $2\pi/n$ 的偶函数. 由是

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 4n\int_0^{\frac{\pi}{2n}} f(x)\cos nx\,dx$$

$$= 4n^2\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\int_0^{x} f(t)\,dt\,\sin nx\,dx.$$

应用引理，我们见到

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\right| \leqslant \frac{n}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \|\Delta_{2x} f(t)\|_L \sin nt\,dt$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{2x}{n}\right)\sin x\,dx.$$

假如 $\omega(t)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{n}\right]$ 上是凹的，那末具有周期 $2\pi/n$ 的周期函数 $f_\omega(x)$，当 $x\in\left(0, \frac{\pi}{2n}\right)$ 时，其值等于 $\frac{1}{8n}\frac{d}{dx}\omega(2x)$，就满足

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_\omega(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{2x}{n}\right)\sin x\,dx.$$

事实上，当 $k=0, \pm 1, \cdots, \pm n$ 时，$\|\Delta_t f_\omega(x)\|_L$ 都是 x 的偶函数，从而

$$\|\Delta_{\frac{\pi k}{n}+t} f_\omega(x)\|_L = \|\Delta_{\frac{\pi k}{n}-t} f_\omega(x)\|_L.$$

由引理，

$$\|\Delta_t f_\omega(x)\|_L = \int_0^{t/2} \frac{d}{dx}\omega(2x)\,dx = \omega(t).$$

另一方面，我们得到

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_\omega(x)\cos nx\,dx = \frac{n}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \|\Delta_{2x} f_\omega(t)\|_L \sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{2x}{n}\right)\sin x\,dx.$$

我们知道，对于任一连续性模 $\omega(t)$，存在具有凹性的增加函数

$\overline{\omega}(t)$，适合 $\omega(t)\leqslant\overline{\omega}(t)<2\omega(t)$ $(0\leqslant t\leqslant\pi)$. 函数 $f_{\frac{\overline{\omega}}{2}}(x)\in[\omega]_L$，在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2n}\right]$上，$f_{\frac{\overline{\omega}}{2}}(x)=\dfrac{1}{16n}\dfrac{d}{dx}\overline{\omega}(2x)$；并且

$$\int_{-\pi}^{\pi}f_{\frac{1}{2}\overline{\omega}}(x)\cos nx\,dx\geqslant\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2x}{n}\right)\sin x\,dx.$$

我们还要证明 $\overline{\omega}(t)$的存在. 函数

$$\overline{\omega}(t)=\sup_{0<x_1<t<x_2<\pi}\left\{\frac{x_2-t}{x_2-x_1}\omega(x_1)+\frac{t-x_1}{x_2-x_1}\omega(x_2)\right\}$$

是凹的，就是说，$\dfrac{1}{2}[\overline{\omega}(t)+\overline{\omega}(t')]\leqslant\overline{\omega}\left(\dfrac{t+t'}{2}\right)$当 $0\leqslant t<t'\leqslant\pi$ 时成立. $\overline{\omega}(t)$ $(t>0)$的几何意义是直线段$\overline{(x_1,\ \omega(x_1)),\ (x_2,\ \omega(x_2))}$上的点$(t,y)$的 y 对于$0\leqslant x_1<t<x_2\leqslant\pi$ 的最大值. 由是可知 $\overline{\omega}(t)$ 是向上凸的（凹函数），并且小于或等于 $\omega(t)$. 我们见到

$$\omega\left(t\cdot\frac{x_2}{t}\right)\leqslant\omega\left(t\left[\frac{x_2}{t}\right]+t\right)\leqslant\omega(t)+\left[\frac{x_2}{t}\right]\omega(t)\leqslant\frac{x_2+t}{t}\omega(t).$$

从而 $\omega(x_1)/\omega(t)\leqslant1$, $\omega(x_2)/\omega(t)\leqslant\dfrac{x_2+t}{t}$. 当 $t>0$ 时，若不 $\overline{\omega}(t)=\omega(t)$，则必有 x_1 和 x_2 适合

$$\overline{\omega}(t)=\frac{x_2-t}{x_2-x_1}\omega(x_1)+\frac{t-x_1}{x_2-x_1}\omega(x_2),\quad 0\leqslant x_1<t<x_2\leqslant\pi.$$

由是

$$\frac{\overline{\omega}(t)}{\omega(t)}\leqslant\frac{x_2-t}{x_2-x_1}+\frac{t-x_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{x_2+t}{t}=1+\frac{x_2}{x_2-x_1}-\frac{x_1x_2}{t(x_2-x_1)}<2.$$

这样，我们建立了 $\omega(t)\leqslant\overline{\omega}(t)\leqslant2\omega(t)$.

最后我们还要指出：定理中的 $\dfrac{1}{2}\leqslant\theta_n\leqslant1$ 是不可以缩成 $\dfrac{1}{2}+\varepsilon_n\leqslant\theta_n\leqslant1$ $(\varepsilon_n>0)$ 的. 这就是说，$\omega(t)$与$(2-\delta)\omega(t)$ $(0<\delta<1)$之间，不一定存在 $\overline{\omega}(t)$，例如在区间 $0\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{m^2}$ 和 $\dfrac{\pi(m-1)}{m^2}\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{m}$ 上分别等于

$$\frac{m^2}{4\pi}t,\ \frac{m^2}{4\pi}t-\frac{m-2}{4}$$

的连续函数 $\omega(t)$ $(0\leqslant t\leqslant\pi)$，当整数 $m>2$ 时，

$$0\leqslant\omega(t_2)-\omega(t_1)\leqslant\omega(t_2-t_1)\quad(0\leqslant t_1<t_2\leqslant\pi),$$

从这个 $\omega(t)$ 作成的 $\overline{\omega}(t)$，在区间 $\frac{\pi}{m^2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{m}$ 上，成立着

$$\overline{\omega}(t)=\frac{m^2t}{4\pi(m-1)}+\frac{m-2}{4(m-1)}.$$

由是，在点 $t=\frac{\pi(m-1)}{m^2}$，$\overline{\omega}(t)/\omega(t)$ 之值等于

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{m-2}{4(m-1)}\right)\div\frac{1}{4}=2-\frac{1}{m-1}.$$

取 m 很大，接近于 2. 定理证明完毕.

系　设 $f(x)\in[\omega]_L$，则 $\mathfrak{S}[f]$ 的部分和 $S_n(x, f)$ 适合于

$$S_n(x, f)-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin nt}{t}\,dt=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

事实上，

$$\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{\sin nt}{t}=\frac{1}{2}\cos nt+\left(\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}-\frac{1}{t}\right)\sin nt$$

$$=\frac{1}{2}\cos nt+\left(-\frac{t}{12}+O(t^3)\right)\sin nt,$$

积分

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\left[\frac{\sin nt}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{\sin nt}{t}\right]dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}f(x+t)\cos nt\,dt$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\left(-\frac{t}{12}+O(t^3)\right)\sin nt\,dt$$

的绝对值小于 $\frac{1}{2}C_n([\omega]_L)+O(C_n([\omega]_L))=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

利用定理 1，我们对于 $[\omega]_L$ 中函数 f，作出 $\|f(x)-S_n(x, f)\|_L$ 的准确估计.

定理 2 $\sup\limits_{f\in[\omega]_L}\|f(x)-S_n(x,f)\|_L=\frac{2}{\pi^2}\theta_n\log n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt$

$$+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right),\quad \frac{1}{2}\leqslant\theta_n\leqslant 1.$$

【证明】 置 $\lambda_k=\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}$，我们证明

$$\|S_n(x,f)-f(x)\|_L$$
$$=\frac{n}{2\pi^2}\left\|\sum_{k=0}^{[n/2]-2}\frac{1}{k+1}\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}[f(x+t)+f(x-t)]\sin nt\,dt\right\|_L$$
$$+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

从定理 1 的系，我们见到

$$\|S_n(x,f)-f(x)\|_L$$
$$=\frac{1}{\pi}\left\|\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+t)-f(x)]\frac{\sin nt}{t}dt\right\|_L+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)_L$$
$$=\frac{1}{\pi}\left\|\int_0^{\pi}\Delta_t^2 f(x)\frac{\sin nt}{t}dt\right\|_L+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)_L,$$

其中的积分等于 $I_0+I_1+\cdots+I_{\left[\frac{n}{2}\right]-1}+J_n$，这里

$$I_k=\int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k}\Delta_t^2 f(x)\frac{\sin nt}{t}dt\quad(\lambda_1=0),$$

$$J_n=\int_{\lambda_{\left[\frac{n}{2}\right]-1}}^{\pi}\Delta_t^2 f(x)\frac{\sin nt}{t}dt.$$

由于

$$\|I_1\|_L\leqslant 2\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\omega(t)\frac{\sin nt}{t}dt$$

$$\leqslant 2\omega\left(\frac{\pi}{2n}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\frac{\sin nt}{t}dt=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

$$\|J_n\|_L=\left\|\int_{\lambda_{\left[\frac{n}{2}\right]-1}}^{\pi}\Delta_t^2 f(x)\frac{\sin nt}{t}dt\right\|_L$$

$$\leqslant 2\int_{\lambda_{\left[\frac{n}{2}\right]-1}}^{\pi}\omega(t)\left|\frac{\sin nt}{t}\right|dt=O\left(\frac{1}{n}\right)=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right);$$

$$\frac{1}{\lambda_k}=\frac{n}{\pi}\cdot\frac{2}{4k+1}=\frac{n}{\pi}\left[\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k(4k+1)}\right],$$

$$I_k=I'_k+I''_k+I'''_k,$$

$$I'_k=\frac{n}{2\pi}\cdot\frac{1}{k}\int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k}\Delta_t^2 f(x)\sin nt\,dt,$$

$$I''_k=-\frac{n}{2\pi k(4k+1)}\int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k}\Delta_t^2 f(x)\sin nt\,dt,$$

$$I'''_k=\int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k}\Delta_t^2 f(x)\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{\lambda_k}\right]\sin nt\,dt,$$

所以

$$\|S_n(x,f)-f(x)\|_L$$
$$=\frac{1}{2\pi^2}\left\|\sum_{k=1}^{[n/2]-1}\left\{\frac{n}{k}\int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k}\Delta_t^2 f(x)\sin nt\,dt+I''_k+I'''_k\right\}\right\|_L+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

现在从

$$\|I''_k\|_L\leqslant\frac{n}{2\pi k(4k+1)}\left\{\left\|\int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k}f(x+t)\sin nt\,dt\right\|_L\right.$$
$$\left.+\left\|\int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k}f(x-t)\sin nt\,dt\right\|_L\right\}$$
$$=O\left(\frac{1}{k^2}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

得到

$$\sum_{k=1}^{[n/2]-1}\|I''_k\|_L=O\left(\sum_1^\infty\frac{1}{k^2}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right);$$

又因

$$\|I'''_k\|_L=\left\|\frac{2n}{\pi(4k+1)}\int_0^{\frac{2\pi}{n}}\Delta_{\lambda_k-\tau}^2 f(x)\frac{\tau\cos n\tau}{\lambda_k-\tau}d\tau\right\|_L$$

中的积分等于

$$\int_0^{\frac{2\pi}{n}}\left[\Delta_{\lambda_k-\tau}^2 f(x)-\frac{\lambda_k-\tau}{\lambda_k}\Delta_{\lambda_k}^2 f(x)\right]\frac{\tau\cos n\tau}{\lambda_k-\tau}d\tau,$$

故置 $\Phi_k(\tau)=\left\|\Delta_{\lambda_k-\tau}^2 f(x)-\dfrac{\lambda_k-\tau}{\lambda_k}\Delta_{\lambda_k}^2 f(x)\right\|_L$ 的话，我们见到

$$\Phi_k(\tau)\leqslant\|\Delta_{\lambda_k-\tau}^2 f(x)-\Delta_{\lambda_k}^2 f(x)\|_L+\left\|\frac{\tau}{\lambda_k}\Delta_{\lambda_k}^2 f(x)\right\|_L$$
$$\leqslant 2\omega(\tau)+2\frac{|\tau|}{\lambda_k}\omega(\lambda_k),$$

因此

$$\|I_k'''\|_L\leqslant\frac{n}{2\pi\left(k+\frac{1}{4}\right)}\int_0^{\frac{2\pi}{n}}\Phi_k(\tau)\frac{\tau|\cos n\tau|}{\lambda_k-\tau}d\tau$$

$$\leqslant\frac{n}{\pi\left(k+\frac{1}{4}\right)}\int_0^{\frac{2\pi}{n}}\left(\omega(\tau)+\frac{\tau}{\lambda_k}\omega(\lambda_k)\right)\frac{\tau}{\lambda_k-\tau}d\tau$$

$$=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)\frac{1}{k\left(k+\frac{1}{4}\right)},$$

$$\sum\|I_k'''\|_L=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)\sum\frac{1}{k\left(k+\frac{1}{4}\right)}=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

逼近等式简化为

$$\|f(x)-S_n(x,f)\|_L$$
$$=\frac{1}{2\pi^2}\left\|\sum_{k=1}^{[n/2]-1}\frac{n}{k}\int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k}\Delta_t^2f(x)\sin nt\,dt\right\|_L+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

这是与证明开始的等式相同的.

现在估计

$$\left\|\int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k}f(x\pm t)\sin nt\,dt\right\|_L=\left\|\int_0^{\frac{2\pi}{n}}f(x\pm\tau\pm\lambda_k)\cos n\tau\,d\tau\right\|_L,$$

我们得到

$$\|f(x)-S_n(x,f)\|_L$$
$$\leqslant\frac{n}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{[n/2]-1}\frac{1}{k}\left\{\left\|\int_0^{\frac{2\pi}{n}}f(\tau+y)\cos n\tau\,d\tau\right\|_L\right.$$
$$\left.+\left\|\int_0^{\frac{2\pi}{n}}f(\tau-y)\cos n\tau\,d\tau\right\|_L\right\}$$
$$\leqslant\frac{2}{\pi^2}\log n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

我们还要研究 $\sup\|f-S_n(f)\|_L(f\in[\omega]_L)$ 的"下限", 就是说, 必须证明 $\theta_n\geqslant\frac{1}{2}$, 当 $\omega(t)$ 具有向上凸的性质时, $\theta_n=1$.

首先假设 $\omega(t)$ 具有凸性，作出如下的函数 $f_\omega(x)$：设 n 是一正整数，

$$f_\omega(x)=0 \quad \left(-\pi\leqslant x\leqslant 0,\ \frac{2\pi}{n}\leqslant x\leqslant\pi\right),$$

$$f_\omega(x)=-\frac{1}{8}\frac{d}{dx}\omega\left(\frac{\pi}{n}-2x\right) \quad \left(0<x<\frac{2\pi}{n}\right),$$

$$f_\omega(x+2\pi)=f_\omega(x).$$

由于 $\omega(x)$ 在 $\left[0,\ \frac{\pi}{n}\right]$ 上是凸的，所以 $f_\omega(x)$ 在 $\left[0,\ \frac{\pi}{2n}\right]$ 上是一增加的正值函数，不难证明，当 $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{n}$ 时，

$$\|\Delta_t f_\omega(x)\|=8\int_{\frac{\pi}{2n}-\frac{t}{2}}^{\frac{\pi}{2n}} f_\omega(x)dx$$

$$=-\int_{\frac{\pi}{2n}-\frac{t}{2}}^{\frac{\pi}{2n}}\frac{d}{dx}\omega\left(\frac{\pi}{n}-2x\right)dx=\omega(t);$$

假如 $\frac{\pi}{n}\leqslant t\leqslant\pi$，那末

$$\|\Delta_t f_\omega(x)\|=\|\Delta_{\frac{\pi}{n}} f_\omega(x)\|=\omega\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

因此 $f_\omega(x)\in[\omega]_L$.

由定理 1 与定理 2，我们见到

$$\|f_\omega(x)-S_n(x,\ f_\omega)\|$$
$$=\frac{n}{2\pi^2}\left\|\sum_{k=1}^{[n/2]-3}\frac{1}{k+1}\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\{f_\omega(x+t)+f_\omega(x-t)\}\sin nt\,dt\right\|$$
$$+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

由于 $f_\omega(x)=0\left(x\overline{\in}\left(0,\ \frac{2\pi}{n}\right)\right)$，所以上式中的积分

$$\varphi_k(x)=\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} f_\omega(x+t)\sin nt\,dt,$$

$$\psi_k(x)=\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} f_\omega(x-t)\sin nt\,dt$$

分别在区间 $[-\lambda_{k+1},\ -\lambda_{k-1}]$，$[\lambda_k,\ \lambda_{k+2}]$ 外等于零．由是

$$\|S_n(x, f_\omega)-f_\omega(x)\|$$

$$=\frac{n}{2\pi^2}\left\|\sum_{k=1}^{[n/2]-2}\frac{1}{k+1}\varphi_k(x)\right\|+\frac{n}{2\pi^2}\left\|\sum_{k=1}^{[n/2]-3}\frac{1}{k+1}\psi_k(x)\right\|$$

$$+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$=\frac{n}{2\pi^2}\sum_{m=0}^{[n/2]-2}\int_{-\lambda_{m+1}}^{-\lambda_m}\left|\frac{1}{m+1}\varphi_m(x)+\frac{1}{m+2}\varphi_{m+1}(x)\right|dx$$

$$+\frac{n}{2\pi^2}\sum_{m=1}^{[n/2]-2}\int_{\lambda_{m+1}}^{\lambda_m}\left|\frac{\psi_m(x)}{m}+\frac{\psi_{m-1}(x)}{m-1}\right|dx+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$=(\varphi)+(\psi)+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

由于

$$\int_{\lambda_m}^{\lambda_{m+1}}|\psi_{m-1}(x)|dx\leqslant\|\psi_{m-1}(x)\|=O\left(\frac{1}{n}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

所以

$$(\psi)=\frac{n}{2\pi^2}\sum_{m=1}^{[n/2]-2}\frac{1}{m}\int_{\lambda_m}^{\lambda_{m+1}}|\psi_m(x)+\psi_{m+1}(x)|dx=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

其中的积分，略事计算，等于

$$\int_{\lambda_m}^{\lambda_{m-1}}\left|\int_{x-\frac{2\pi}{n}}^{x}f_\omega(x-t)\sin nt\,dt\right|dx=\frac{2}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt.$$

从而

$$(\psi)=\frac{1}{\pi^2}\log n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

同样可证

$$(\varphi)=\frac{1}{\pi^2}\log n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

由是

$$\|f_\omega(x)-S_n(x, f_\omega)\|=\frac{2}{\pi^2}\log n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

这是证明了，当 $\omega(t)$ 具有向上凸的性质时，$\theta_n=1$.

在一般的情况，$\omega(t)$ 不一定是向上凸的，此时存在向上凸的函数

$\dfrac{\overline{\omega}(t)}{2}<\omega(t)$. 由是 $f_{\frac{1}{2}\overline{\omega}}(t)\in[\omega]_L$,

$$\sup_{f\in[\omega]_L}\|f(x)-S_n(x,f)\|\geqslant\|f_{\frac{1}{2}\overline{\omega}}(x)-S_n(x,f_{\frac{1}{2}\overline{\omega}})\|$$

$$=\frac{\log n}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\overline{\omega}\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\geqslant\frac{\log n}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

这就证明 $\theta_n\geqslant\dfrac{1}{2}$. 定理证毕.

对于可积函数的共轭函数,用类似的方法,别尔迭晓夫建立了如下的

定理 3 设 $\omega(t)$ 是满足条件 $\omega(t)/t\in L(0,\pi)$ 的连续模, 则在 $[\omega]_L$ 上成立着

$$\sup_{f\in[\omega]_L}\|\tilde{f}(x)-\tilde{S}_n(x,f)\|$$

$$=\frac{2}{\pi^2}\theta_n\log n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt+\frac{\theta_n}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\omega(t)}{t}\,dt+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

这里 $\dfrac{1}{2}\leqslant\theta_n\leqslant1$, 区间 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 不可以缩短.

【证明】 首先证明 $\|\tilde{S}_n(x,f)-\tilde{f}(x)\|$ 等于

$$\left\|\frac{n}{2\pi^2}\sum_{k=0}^{[n/2]-1}\frac{1}{k+1}\int_{\frac{2\pi k}{n}}^{\frac{2\pi(k+1)}{n}}\{f(x+t)-f(x-t)\}\cos nt\,dt\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\,dt\right\|+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

置

$$g(t)=g(t+2\pi)=\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}-\frac{1}{t}\quad(-\pi\leqslant t\leqslant\pi),$$

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)g(t)\cos nt\,dt,$$

则因

$$2I=\int_{-\pi}^{\pi}\left\{f(x+t)g(t)-f\left(x+t+\frac{\pi}{n}\right)g\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\right\}\cos nt\,dt,$$

我们见到

$$\|I\|\leqslant\|g(t)\|\cdot\omega\left(\frac{\pi}{n},f\right)+\|f(x)\|\,\omega\left(\frac{\pi}{n},g\right).$$

由于 $g(t)$ 是有界，所以 $\|I\|=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$. 由是利用 $\omega(t)/t\in L$, 从

$$\bar{S}_n(x,f)-\bar{f}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{f(x+t)-f(x-t)\}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{f(x+t)-f(x-t)\}\frac{\cos nt}{t}dt$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\{f(x+t)-f(x-t)\}\sin nt\,dt$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{f(x+t)-f(x-t)\}g(t)\cos nt\,dt$$

得到

$$\|\bar{S}_n(x,f)-\bar{f}(x)\|$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\|\int_0^{\pi}\{f(x+t)-f(x-t)\}\frac{\cos nt}{t}dt\right\|+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

注意着积分

$$I_1=-\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\frac{2\pi}{n}}\{f(x+t)-f(x-t)\}\cos nt\,dt,$$

$$I_2=\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{2\pi}{n}}\{f(x+t)-f(x-t)\}\frac{\cos nt}{t}dt,$$

$$I_3=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\{f(x+t)-f(x-t)\}\frac{\cos nt-1}{t}dt$$

分别满足

$$\|I_j\|\leqslant\frac{2n}{\pi^2}\int_0^{\frac{2\pi}{n}}\omega(2t)\,|\cos nt|\,dt=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)\quad(j=1,2),$$

$$\|I_3\|\leqslant\frac{2n}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2n}}|f(x+t)-f(x-t)|dt=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

我们见到

$$\|\tilde{f}(x)-\tilde{S}_n(x,f)\|=\|I_1+I_2+I_3+I_4+J\|$$
$$=\|J+I_4\|+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

这里的 J 是证明最初的等式中的 $\frac{n}{2\pi^2}\Sigma$ 与一个积分的和，因此必须证明 $I_4=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$. 现在

$$I_4=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{[n/2]-1}\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{(2k+2)\pi}{n}}\{f(x+t)-f(x-t)\}\left\{\frac{1}{t}-\frac{n}{2k\pi+2\pi}\right\}dt,$$

$$\|I_4\|=\frac{1}{2\pi^2}\left\|\sum_{k=1}^{[n/2]-1}\frac{n}{k+1}\int_0^{\frac{2\pi}{n}}\left\{f\left(x+\frac{(2k+2)\pi}{n}-z\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-f\left(x-\frac{(2k+2)\pi}{n}+z\right)\right\}\frac{nz}{2k\pi+2\pi-nz}\cos nz\,dz\right\|$$
$$\leqslant\frac{1}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{[n/2]-1}\frac{n}{k+1}\int_0^{\frac{2\pi}{n}}\left[4\omega(z)+2zn\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]\frac{nz}{2k\pi+2\pi-nz}dz$$
$$=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

这样，我们建立了证明开始的等式.

从证明开始的等式，我们得到 $\|\tilde{f}(x)-\tilde{S}_n(x,f)\|$ 关于 $f\in[\omega]_L$ 的上界不大于

$$\frac{1}{2\pi^2}\sum_{k=0}^{[n/2]-1}\frac{n}{k+1}\left\{\left\|\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{2\pi(k+1)}{n}}f(x+t)\cos nt\,dt\right\|\right.$$
$$\left.+\left\|\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{2\pi(k+1)}{n}}f(x-t)\cos nt\,dt\right\|\right\}$$

的上限加上

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\omega(t)}{t}dt+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

因此

$$\sup_{f\in[\omega]_L}\|\tilde{f}(x)-\tilde{S}_n(x,f)\|$$

$$\leqslant\frac{2}{\pi^2}\log n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\omega(t)}{t}dt+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

现在假设 $\omega(t)$ 是向上凸的，那末我们能证

$$\|\tilde{f}_\omega(x)-\tilde{S}_n(x,f_\omega)\|$$

$$=\frac{2}{\pi^2}\log n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\omega(t)}{t}dt+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

事实上，当 $x\in\left[0,\frac{2\pi}{n}\right]$ 时，$f_\omega(x)=0$. 因此，函数

$$\varphi(x)=\sum_{k=2}^{[n/2]-1}\frac{n}{k+1}\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{2k+2}{n}\pi}f_\omega(x+t)\cos nt\,dt$$

当 $x\in\left[-\frac{2\pi}{n}\left[\frac{n}{2}\right],-\frac{2\pi}{n}\right]$ 时，其值等于零. 又若

$$x\in\left[\frac{4\pi}{n},\frac{2\pi}{n}\left(1+\left[\frac{n}{2}\right]\right)\right],\quad \psi(x)=0,$$

但

$$\psi(x)=\sum_{k=2}^{[n/2]-1}\frac{n}{k+1}\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{(2k+2)\pi}{n}}f_\omega(x-t)\cos nt\,dt.$$

又设

$$p(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\frac{f_\omega(x+t)-f_\omega(x-t)}{t}dt,$$

则当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2n},\frac{5\pi}{2n}\right]$ 时，$p(x)=0$.

利用证明开始的等式，我们见到

$$\|\tilde{f}_\omega(x)-\tilde{S}_n(x,f_\omega)\|$$

$$=\frac{1}{2\pi^2}\{\|\varphi(x)\|+\|\psi(x)\|\}+\frac{1}{\pi}\|p(x)\|+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

利用定理 2 的证明中有关 (φ) 和 (ψ) 的处理方法，得到

$$\frac{1}{2\pi^2}\{\|\varphi(x)\|+\|\psi(x)\|\}=\frac{2}{\pi^2}\log n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt.$$

由于 $8f_\omega(x)=-\frac{d}{dx}\omega\left(\frac{\pi}{n}-2x\right)\left(x\in\left(0,\frac{2\pi}{n}\right)\right)$, 所以在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2n}\right]$ 上, $f_\omega(x)$ 是单调增加的正值函数, 从而, $x\in[-\pi,\pi]$ 的话, t 的函数

$$f_\omega(x+t)-f_\omega(x-t)$$

在区间 $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2n}$ 上, 不变其符号. 由于

$$\|\Delta_t f_\omega(x)\|=\omega(t),$$

所以 $\frac{1}{\pi}\|p(x)\|$ 等于

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\frac{|f_\omega(x+t)-f_\omega(x-t)|}{t}dt\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\frac{\omega(t)}{t}dt.$$

总结起来, 得到

$$\begin{aligned}&\|\tilde{f}_\omega(x)-\tilde{S}_n(x,f_\omega)\|\\&=\frac{2}{\pi^2}\log n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\omega(t)}{t}dt+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).\end{aligned}$$

对于任意的 $\omega(t)$, 利用 $\omega(t)\leqslant\overline{\omega}(t)<2\omega(t)$ 的向上凸的 $\overline{\omega}(t)$, 与前同样可以证明 $\theta_*\geqslant\frac{1}{2}$. 证明完毕.

注意, 等式右端的最初两项, 第一项含有 $\log n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt$, 第二项含有 $\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\omega(t)}{t}dt$, 究竟哪个是主项, 殊未一定. 例如当 $\omega(t)=t^\alpha$, $0<\alpha\leqslant1$ 时,

$$\log n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2t}{n}\right)^\alpha\sin t\,dt\sim\frac{\log n}{n^\alpha},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}}t^{\alpha-1}dt\sim n^{-\alpha}.$$

若 $\omega(t)=\left(\log\frac{1}{t}\left(\log\log\frac{1}{t}\right)^2\right)^{-1}$, 则存在如下的常数 A 和 B:

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}}\omega(t)t^{-1}dt>A(\log\log n)^{-1},$$

$$\log n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt<B(\log\log n)^{-2}.$$

8. 几种具有特殊系数的三角级数及其应用

当 $g(x)\in L(-\infty,\infty)$ 时，

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}|g(x+2k\pi)|dx=\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|dx<\infty.$$

由富弼尼的定理（陈建功《实函数论》，第六章§4，定理5），级数 $\sum|g(x+2k\pi)|$ 概收敛．置 $G_n(x)=\sum_{-n}^{n}g(x+2k\pi)$，则当 $n\to\infty$ 时，$G_n(x)$ 概收敛于一个可积函数 $G(x)$，$G(x+2\pi)=G(x)$．设 $G(x)\sim\sum c_\nu e^{i\nu x}$，则

$$c_\nu=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}G_n(x)e^{-i\nu x}dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-2n\pi}^{(2n+2)\pi}g(x)e^{-i\nu x}dx$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)e^{-i\nu x}dx.$$

一般地说，当积分

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)e^{-iyx}dx$$

在某种意义上存在时，其值称为 $g(x)$ 的富理埃变换，这是 y 的函数 $\gamma(y)$，$-\infty<y<\infty$．在这里的情况，$G(x)$ 的富理埃系数 c_ν 是 $g(x)$ 的富理埃变换 $\gamma(y)$ 在 $y=\nu$ 的值．

现在建立普阿松公式：假如 $g(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上是 L 可积并且是有界变差，那末普阿松的系数总和公式

$$\sum_{-\infty}^{\infty}g(2k\pi)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)e^{-i\nu x}dx$$

成立，这里右端的和是 $\lim\limits_{\nu\to\infty}\sum\limits_{-\nu}^{\nu}$．

事实上，记 $v_k=\int_{2k\pi}^{(2k+2)\pi}|dg(x)|$．设在 $(2k\pi,(2k+2)\pi)$ 中，x_0 是 $\sum g(x+2k\pi)$ 的一个绝对收敛点，则当 $x\in(2k\pi,(2k+2)\pi)$ 时，

$$|g(x+2k\pi)-g(x_0+2k\pi)|\leqslant v_k.$$

由于 $\sum v_k<\infty$，所以级数 $\sum|g(x+2k\pi)|$ 在 $(2k\pi,(2k+2)\pi)$ 中匀敛，$G(x)=\sum g(x+2k\pi)$ 是有界变差．由若当的收敛定理，知等式成立．

利用这个结果，我们证明

定理 1 设 $0<\alpha<1$，则当 $0<x\leqslant\pi$ 时，

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos\nu x}{\nu^{\alpha}}=\Gamma(1-\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}\cdot x^{\alpha-1}+O(1),$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin\nu x}{\nu^{\alpha}}=\Gamma(1-\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{2}\cdot x^{\alpha-1}+O(1).$$

两者末项的 $O(1)$ 是具有任意阶有界导函数的函数.

【证明】 置 $g^*(x)=\frac{2\pi}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}(x>0)$，$g^*(x)=0(x\leqslant0)$，则函数

$$g(x)=g^*(x)-\frac{1}{2\pi}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}g^*(t)dt\quad(2k\pi\leqslant x<(2k+2)\pi)$$

满足普阿松公式的要求，这里

$$G(x)=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=-n}^{n}g^*(x+2k\pi)-\frac{1}{2\pi}\int_{-2n\pi}^{2n\pi}g^*(t)dt\right\},$$

$$\int_0^{2\pi}G(x)dx=0,$$

$$\gamma(\nu)=\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega}^{\omega}g^*(x)e^{-i\nu x}dx\quad(\nu=\pm1,\ \pm2,\ \cdots).$$

由是，当 $0<x<2\pi$ 时，

$$\Psi_\alpha(x)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\pi}{\Gamma(\alpha)}\left\{x^{\alpha-1}+(x+2\pi)^{\alpha-1}+\cdots+(x+2n\pi)^{\alpha-1}-\frac{(2\pi)^{\alpha-1}}{\alpha}n^{\alpha}\right\}.$$

利用表达式

$$e^{-\frac{1}{2}\pi i\alpha}\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-it}dt\quad(0<\alpha<1),$$

我们能证

$$\Psi_\alpha(x)=\sum_{-\infty}^{-1}+\sum_{+1}^{\infty}|\nu|^{-\alpha}e^{i\nu x}e^{-\frac{1}{2}\pi i\alpha\,\mathrm{sgn}\,\nu}.$$

于 $\Psi_\alpha(x)$ 的表达式，除去 $x^{\alpha-1}$，极限是均匀的；因此，除去一个均匀有界部分 $O(1)$，

$$\Psi_\alpha(x)=\begin{cases}O(1)&(-\pi\leqslant x<0),\\2\pi x^{\alpha-1}/\Gamma(x)&(0<x<\pi).\end{cases}$$

由是，从

$$\frac{1}{4}\{\Psi_\alpha(x)+\overline{\Psi}_\alpha(x)\}=\sum_1^\infty \nu^{-\alpha}\cos\nu x\cos\frac{\alpha\pi}{2},$$

$$\frac{1}{4}\{\Psi_\alpha(x)-\overline{\Psi}_\alpha(x)\}=\sum_1^\infty \nu^{-\alpha}\sin\nu x\sin\frac{\alpha\pi}{2},$$

以及 $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\pi/\sin\pi\alpha$，得到所要的结果.

利用 $\Psi_\alpha(x)$，可以定义函数 $f(x)$ 的 α 次 $(\alpha>0)$ 积分. 当

$$f(x)\sim\sum c_n e^{inx},\quad c_0=0$$

时，定义

$$f_\alpha(x)\sim\sum c_n\frac{e^{inx}}{(in)^\alpha}$$

为 $f(x)$ 的 α 次伐伊尔积分. 写着

$$\Psi_\alpha(t)=\sum{}'\frac{e^{int}}{(in)^\alpha}=\sum\gamma_n^{(\alpha)}e^{int},$$

那末

$$(f(x))_\alpha\equiv f_\alpha(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\Psi_\alpha(x-t)dt.$$

我们见到 $\gamma_0^{(\alpha)}=0$，当 $n\neq0$ 时，

$$\gamma_n^{(\alpha)}=(in)^{-\alpha}=|n|^{-\alpha}\exp\left(-\frac{1}{2}\pi i\,\alpha\operatorname{sgn}n\right),$$

$$\Psi_\alpha(t)=2\cos\frac{\alpha\pi}{2}\sum_1^\infty\frac{\cos nt}{n^\alpha}+2\sin\frac{\alpha\pi}{2}\sum_1^\infty\frac{\sin nt}{n^\alpha}.$$

容易明白：$((f(x))_\alpha)_\beta=(f(x))_{\alpha+\beta}$ 当 $\alpha>0$, $\beta>0$ 时成立. 当 $0<\alpha<1$ 时，记

$$(f(x))^{(\alpha)}=\frac{d}{dx}(f(x))_{1-\alpha},$$

这是"α 阶"的导函数. 现在将 $f_\alpha(x)$ 写成另一种形式：由于 $c_0=0$，所以

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x-t)\Psi_\alpha(x-t)\,dt=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{2\pi}f(x-t)\sum_0^n(t+2\pi\nu)^{\alpha-1}dt$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty f(x-t)t^{\alpha-1}dt.$$

从而

$$f_\alpha(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{x} f(x)(x-t)^{\alpha-1}dt \quad (\alpha>0),$$

这是在 $\int_0^{2\pi} f(t)dt=0$ 的基础上定义的．写着

$$\Gamma(\alpha)\Psi_\alpha(x)=2\pi x^{\alpha-1}+r_\alpha(x)\Gamma(\alpha),$$

我们得到

$$f_\alpha(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x} f(t)(x-t)^{\alpha-1}dt+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)r_\alpha(x-t)dt.$$

在区间 $(0, 2\pi)$ 上，末项所表示的函数，具有任意次有界的导函数．

非整数次的导函数和积分对于讨论 $\operatorname{Lip}\alpha$ 的函数族有应用．

定理 2 (i) 设 $0\leqslant\alpha<1$, $\beta>0$, 则当 $f(x)\in\operatorname{Lip}\alpha$, $\alpha+\beta<1$ 时，$f_\beta(x)\in\operatorname{Lip}(\alpha+\beta)$．假如 $f(x)\in\operatorname{Lip}\alpha$, 那末 $f_{1-\alpha}(x)$ 是亚光滑的，就是说

$$f_{1-\alpha}(x+h)+f_{1-\alpha}(x-h)-2f_{1-\alpha}(x)=O(h).$$

(ii) 设 $0<\gamma<\alpha<1$, 则当 $f(x)\in\operatorname{Lip}\alpha$ 时，$(f(x))^{\gamma}\in\operatorname{Lip}(\alpha-\gamma)$．假如 $f(x)$ 是亚光滑的，那末 $(f(x))^{(\gamma)}\in\operatorname{Lip}(1-\gamma)$．

【证明】 (i) 设 $f(x)\in\operatorname{Lip}\alpha$, $\alpha+\beta<1$, 则当正数 h 足够小时，

$$f_\beta(x+h)-f_\beta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x-t)-f(x)\}\{\Psi_\beta(t+x)-\Psi_\beta(t)\}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|<2h}+\frac{1}{2\pi}\int_{2h\leqslant|t|\leqslant\pi}=I+J.$$

我们见到

$$|I|=\int_{-2h}^{2h} O(|t|^{\alpha})\{|\Psi_\beta(t+h)|+|\Psi_\beta(t)|\}dt$$

$$=O\left(h^{\alpha}\int_{-3h}^{3h}|\Psi_\beta(t)|dt\right)=O\left(h^{\alpha}\int_0^{3h}t^{\beta-1}dt\right)$$

$$=O(h^{\alpha+\beta}),$$

$$|J|\leqslant\int_{2h\leqslant|t|\leqslant\pi}O(|t|^{\alpha})h|\Psi'_\beta(t+\theta h)|dt \quad (0<\theta<1).$$

由于 $\Psi'_\alpha(t)=O(|t|^{\alpha-2})$, 所以从上式得到

$$J=O\left(h\int_{2h<|t|<\pi}|t|^{\alpha}(|t|-h)^{\beta-2}dt\right)$$
$$=O\left(h\int_{2h}^{\infty}t^{\alpha+\beta-2}dt\right)=O(h^{\alpha+\beta}).$$

因此 $f_\beta(x+h)-f_\beta(x)=O(h^{\alpha+\beta})$. 这就证明了(i)的前半.

当 $f(x)$ 是有界时, $f_1(x)$ 是亚光滑的. 现在假设 $0<\alpha<1$, 要从 $f(x)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$ 导出 $f_{1-\alpha}(x)$ 的亚光滑性, 由于

$$f_\beta(x+h)+f_\beta(x-h)-2f_\beta(x)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x-t)-f(x)\}\{\Psi_\beta(t+h)+\Psi_\beta(t-h)-2\Psi_\beta(t)\}dt$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|<2h}+\frac{1}{2\pi}\int_{2h<|t|<\pi}=I+J=O(h)+J,$$
$$|J|\leqslant\int_{2h<|t|<\pi}O(|t|^{\alpha})h^2|\Psi_\beta''(t+\theta h)|dt$$
$$=O\left(h^2\int_{2h}^{\infty}t^{\alpha+\beta-2}dt\right)=O(h),$$

所以 $f_\beta(x+h)+f_\beta(x-h)-2f_\beta(x)=O(h)$. (i)的证明完毕.

(ii) 当 $f(x)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $0<\gamma<\alpha$ 时, 我们证明

$$\frac{d}{dx}f_{1-\gamma}(x)=(f(x))^{(\gamma)}$$

是存在的. 设 F 是 f 的积分, 那末

$$f_{1-\gamma}(x)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d}{dx}\{F(x-t)-F(x)\}\Psi_{1-\gamma}(t)dt$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{F(x-t)-F(x)\}\Psi_{1-\gamma}'(t)dt.$$

右端的导数

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{f(x-t)-f(x)\}\Psi_{1-\gamma}'(t)dt$$

是存在的. 事实上, 这个积分绝对地匀敛. 因此

$$\frac{d}{dx}f_{1-\gamma}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{f(x-t)-f(x)\}\Psi_{1-\gamma}'(t)dt$$

成立, 左端表示 $(f(x))^{(\gamma)}$. 简写 $\Delta=f(x+h-t)-f(x+h)-f(x-t)+$

$f(x)$. 我们见到 $\Delta=O(|t|^\alpha)$, 并且 $\Delta=O(h^\alpha)$,

$$\begin{aligned}
&(f(x+h))^{(\gamma)}-(f(x))^{(\gamma)}\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Psi'_{1-\gamma}(t)\Delta dt\\
&=\int_{|t|<h}O(|t|^\alpha\cdot|t|^{-\gamma-1})\,dt+\int_{h<|t|<\pi}O(h^\alpha|t|^{-\gamma-1})dt\\
&=O(h^{\alpha-\gamma}).
\end{aligned}$$

因此 $(f(x))^{(\gamma)}\in\mathrm{Lip}(\alpha-\gamma)$.

最后, 从 $f(x)$ 的亚光滑性导出 $(f(x))^{(\gamma)}\in\mathrm{Lip}(1-\gamma)$. 由于

$$\begin{aligned}
f_{1-\gamma}(x)=&-\frac{\sin\dfrac{\pi\gamma}{2}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}C_{1-\gamma}(t)\frac{d}{dt}F(x-t)dt\\
&-\frac{\cos\dfrac{\pi\gamma}{2}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S_{1-\gamma}(t)\frac{d}{dt}F(x-t)dt,
\end{aligned}$$

$$S_{1-\gamma}(t)=\sum_1^\infty\frac{\sin nt}{n^{1-\gamma}},\quad C_{1-\gamma}(t)=\sum_1^\infty\frac{\cos nt}{n^{1-\gamma}},$$

两个积分所表示的函数是共轭的, 所以只要证明末项具有导数属于 $\mathrm{Lip}(1-\gamma)$, 就得到 $(f(x))^{(\gamma)}\in\mathrm{Lip}(1-\gamma)$. 我们见到

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S_{1-\gamma}(t)\frac{d}{dt}F(x-t)dt$$

具有导数

$$\begin{aligned}
g(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x-t)-f(x)\}S'_{1-\gamma}(t)dt\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\phi_x(t)S'_{1-\gamma}(t)dt.
\end{aligned}$$

因此

$$g(x+h)+g(x-h)-2g(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}S'_{1-\gamma}(t)\Delta dt,$$

这里

$$\Delta=\phi_{x+h}(t)+\phi_{x-h}(t)-2\phi_x(t),\quad \Delta=O(t),\quad \Delta=O(h).$$

由是

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} S_{1-\gamma}^{\prime\prime}(t)\,\Delta dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{h} O(t\cdot t^{-1-\gamma})dt+\frac{1}{\pi}\int_h^{\pi} O(h\cdot t^{-1-\gamma})dt$$

$$=O(h^{1-\gamma}).$$

从而 $\mathfrak{S}[g]$ 的费耶平均 $\sigma_n(x, g)$ 满足 $g(x)-\sigma_n(x, g)=O(n^{-1+\gamma})$. 由§5中的引理3, $g(x)\in \mathrm{Lip}(1-\gamma)$. 即 $(f(x))^{(\gamma)}\in \mathrm{Lip}(1-\gamma)$. 证明完毕.

系　将定理2中的 Lip 改为 lip, "亚光滑"改为"光滑", 一切所述结果仍成立.

定理2中的函数是属于 $\mathrm{Lip}\,\alpha$ 函数族的, 现在进一步讨论 $L_p(0, 2\pi)$ 中的函数的非整数次积分的李普希兹性质.

定理3　设 $1\leqslant p<\infty$, $f(x)\in L_p(0, 2\pi)$, 则当 $\alpha\in\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p}+1\right)$ 时, $f_\alpha(x)\in \mathrm{Lip}\left(\alpha-\frac{1}{p}\right)$.

【证明】 若 $p=1$, 则 $f_1(x)\in C_{2\pi}$. 从定理2的(i)(系), 当 $0<\beta<1$ 时, $(f_1)_\beta\in \mathrm{lip}\,\beta$, 或是 $f_\alpha(x)\in \mathrm{lip}(\alpha-1)$ $(1<\alpha<2)$. 假如 $\beta=1$, 那末 $(f_1)_1$ 是一光滑函数, 或 $f_2(x)\in \mathrm{lip}\,1$.

现在假设 $p>1$. 当 $1\leqslant\alpha<1+\frac{1}{p}$ 时, 与前同样, 所要的结果可以从定理2(i)(系)导出. 由是只要讨论 $\frac{1}{p}<\alpha<1$ 的情况. 由于

$$2\pi|f_\alpha(x+h)-f_\alpha(x)|=\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\{\Psi_\alpha(t+h)-\Psi_\alpha(t)\}dt\right|$$

$$\leqslant\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|\Psi_\alpha(t+h)-\Psi_\alpha(t)|^{\frac{p}{p-1}}dt\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

的右端第一个因子无关于 h, 所以只要证明末了这个因子是 $O(h^{\alpha-\frac{1}{p}})$. 我们见到

$$\int_{-2h}^{2h}|\Psi_\alpha(t+h)-\Psi_\alpha(t)|^{\frac{p}{p-1}}dt$$

$$=O\left(\int_{-2h}^{2h}(|\Psi_\alpha(t+h)|^{\frac{p}{p-1}}+|\Psi_\alpha(t)|^{\frac{p}{p-1}})dt\right)$$

$$=O\left(\int_{-3h}^{3h}|t|^{(\alpha-1)\frac{p}{p-1}}dt\right)=O\left(h^{\frac{(\alpha-1)p}{p-1}+1}\right),$$

$$\int_{2h<|t|<\pi}|\Psi_\alpha(t+h)-\Psi_\alpha(t)|^{\frac{p}{p-1}}dx=O\left(h^{\frac{p}{p-1}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^{(\alpha-2)\frac{p}{p-1}}dt\right)$$
$$=O\left(h^{\frac{(\alpha-1)p}{p-1}+1}\right).$$

从而 $|f_\alpha(x+h)-f_\alpha(x)|=O(h^{\alpha-\frac{1}{p}})$. 证毕.

我们要问, 假如 a_n, $b_n(n=0, 1, \cdots)$ 是连续函数 f 的富理埃系数, 是否一定存在小于 2 的 $p=p(f)$ 使级数 $\sum(|a_n|^p+|b_n|^p)$ 收敛? 这里我们利用哈戴-立脱尔伍德的级数

$$HL(\alpha, c;\ x)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{icn\log n}n^{-\frac{1}{2}-\alpha}e^{inx}$$

来解决这个问题.

首先建立凡窦戈普(van der Corput)的引理.

引理 1 设 $F(u)=e^{2\pi if(u)}$, $I(F;\ a, b)=\int_a^b F(u)du$,

$$S(F;\ a, b)=\sum_{a<n<b}F(n),\ D(F;\ a;\ b)=I(F;\ a, b)-S(F;\ a, b),$$

则当 $f'(u)$ 具有单调性而不小于正数 λ (或不大于负数 $-\lambda$) 时, $|I(F;\ a, b)|<\frac{1}{\lambda}$, 假如 $f''(u)\geqslant\rho>0$(或是 $f''(u)\leqslant-\rho<0$), 那末 $|I(F;\ a, b)|\leqslant 4\rho^{-\frac{1}{2}}$. 又若 $|f'|\leqslant\frac{1}{2}$, 那末 $|D(f;\ a, b)|$ 小于一个绝对常数 A; 在这个情况, $|S(F;\ a, b)|\leqslant[2+|f'(b)-f'(a)|]\left(A+\frac{4}{\sqrt{\rho}}\right)$.

【证明】 应用第二中值定理于 $I(F;\ a, b)=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{1}{f'(u)}dF(u)$ 的实部和虚部, 我们见到 $|I|\leqslant\frac{2}{\pi\lambda}<\frac{1}{\lambda}$.

不妨假设 $f'(u)\geqslant\rho$(否则以 $-f$ 代 f). 当 $f'(u)$ 在 (a, b) 不改变符号时, 比方说 $f'(u)\geqslant 0$, 我们见到

$$f'(\gamma)=\int_a^\gamma f''(u)du+f'(a)\geqslant(\gamma-a)\rho\quad(a<\gamma<b).$$

因此

$$|I(F;\ a, b)|\leqslant|I(F;\ a, \gamma)|+|I(F;\ \gamma, b)|\leqslant(\gamma-a)+\frac{1}{(\gamma-a)\rho}.$$

取适当的 γ, 可得 $|I(F;\ a, b)|\leqslant 2\rho^{-\frac{1}{2}}$. 假如 $f'(u)$ 在 (a, b) 中有变号

点 c，那末

$$|I(F;\ a,\ b)|\leqslant|I(F;\ a,\ c)|+|I(F;\ c,\ b)|\leqslant 2\cdot 2\rho^{-\frac{1}{2}}=4\rho^{-\frac{1}{2}}.$$

假如 a 和 b 都不是整数：$a>[a]$，$b>[b]$，那末取阶梯函数 $\psi(u)$ 使在任一整数点 n，具有 1 的"跃进"，在相邻两整数间取常数值．我们见到

$$S(F;\ a,\ b)=\int_a^b F(u)d\psi(u),$$

取 $\psi(u)=[u]+\frac{1}{2}$，$\psi(n)=n$；$\chi(u)=u-[u]-\frac{1}{2}$，那末

$$D(F;\ a,\ b)=\int_a^b F(u)d\chi(u),\quad \chi(u+1)=\chi(u).$$

将 $F(u)$ 关于 $\chi(u)$ 积分施行分部积分，得到

$$|D(F;\ a,\ b)+I(F'\chi;\ a,\ b)|\leqslant 1.$$

从等式 $\frac{\pi-x}{2}=\sum\limits_1^\infty\frac{\sin nx}{n}$ $(0<x<2\pi)$，我们得到

$$\chi(u)=-\sum_1^\infty\frac{\sin 2n\pi u}{n\pi}.$$

这个级数的部分和是均匀有界．由是

$$\begin{aligned}I(F'\chi;\ a,\ b)&=-\sum_1^\infty\frac{1}{n\pi}\int_a^b\sin 2n\pi u\cdot F'(u)du\\&=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{2\pi in}\left\{\int_a^b\frac{f'(u)}{f'(u)-n}\,de^{2\pi i(f(u)-nu)}\right.\\&\qquad\left.-\int_a^b\frac{f'(u)}{f'(u)+n}\,de^{2\pi i(f(u)+nu)}\right\}.\end{aligned}$$

函数 $\frac{f'(u)}{f'(u)\pm n}$ 都是单调的，利用第二中值定理，级数第 n 项的绝对值小于 $2\Big/\pi n\left(n-\frac{1}{2}\right)$；因此，级数绝对的匀敛．由是 $I(F'\chi;\ a,\ b)$ 的绝对值小于一个绝对常数，从而 $D(F;\ a,\ b)$ 的绝对值小于一个绝对常数 B．假如 $a>[a]$ 和 $b>[b]$ 两者至少有一个不成立，那末

$$|D(F;\ a,\ b)|<2+|D(F;\ a+\varepsilon,\ b-\varepsilon)|<2+B=A.$$

引理 1 证毕．

最后我们估计 $S(F; a, b)$. 假设 $f''(u)\geqslant\rho$. 如果存在适合于 $f'(\alpha_p)=p-\frac{1}{2}$ 的点 α_p, 那末写着 $F_p(u)=e^{2\pi i(f(u)-pu)}$. 在 (α_p, α_{p+1}) 中, $|f'(u)-p|\leqslant\frac{1}{2}$. 假如 $[a, b]$ 中存在 $\alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_{r+s}$, 那末

$$S(F; \alpha_p, \alpha_{p+1})=S(F_p; \alpha_p, \alpha_{p+1})$$
$$=I(F_p; \alpha_p, \alpha_{p+1})-D(F_p; \alpha_p, \alpha_{p+1})$$

的绝对值小于 $\frac{4}{\sqrt{\rho}}+A$. 此数也是 $S(F; a, \alpha_r)$ 和 $S(F; \alpha_{r+s}, b)$ 的上界. 由是

$$|S(F; a, b)|\leqslant|S(F; a, \alpha_r)|+\cdots+|S(F; \alpha_{r+s}, b)|$$
$$\leqslant\left(\frac{4}{\sqrt{p}}+A\right)(s+2).$$

由于 $s+2=f'(\alpha_{r+s})-f'(\alpha_r)+2$, 所以引理 1 的证明完毕.

引理 2 设 $c>0$, $0<\alpha<1$, 则当 $0\leqslant x\leqslant2\pi$ 时, 级数 $HL(\alpha, c; x)$ 匀敛于 $\mathrm{Lip}\,\alpha$ 中的一个函数.

【证明】 首先证明级数 $HL(0, c; x)$ 的部分和 $S_n(x)=O(\sqrt{n})$. 事实上, 函数 $f(u)=\frac{1}{2\pi}(cu\log u+ux)$ 的导数 $f'(u)=\frac{1}{2\pi}(c+x+c\log u)$ 是 u 的增加函数. 设 ν 是一整数, $\nu\geqslant0$, 则由引理 1, 当 $2^\nu<N\leqslant2^{\nu+1}$ 时,

$$|S(F; 2^\nu, 2^{\nu+1})|\leqslant C2^{\frac{1}{2}\nu}\quad (C\text{ 只与 }c\text{ 有关系}),$$
$$|S_N(x)|\leqslant1+|S(F; 1,2)|+|S(F; 2, 4)|+\cdots+|S(F; 2^n, N)|$$
$$\leqslant1+C(1+2^{\frac{1}{2}}+\cdots+2^{\frac{1}{2}n})\leqslant C_12^{\frac{1}{2}n}\leqslant C_1N^{\frac{1}{2}}.$$

由是 $HL(\alpha, c; x)$ 的最初 N 项之和等于

$$\sum_{\nu=1}^{N-1}S_\nu(x)\Delta\nu^{-\frac{1}{2}-\alpha}+S_N(x)N^{-\frac{1}{2}-\alpha}=\sum_{\nu=1}^{N}O(\nu^{\frac{1}{2}}\cdot\nu^{-\frac{1}{2}-1-\alpha})+O(N^{-\alpha}),$$

当 $N\to\infty$ 时, 匀敛于一个函数 $\phi_\alpha(x)$. 设 $h>0$, 则

$$\phi_\alpha(x+h)-\phi_\alpha(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\{S_\nu(x+h)-S_\nu(x)\}\Delta\nu^{\frac{1}{2}-\alpha}=h_1+h_2,$$

这里

$$h_1=\sum_{\nu=1}^{[h^{-1}]}\{S_\nu(x+h)-S_\nu(x)\}\Delta\nu^{-\frac{1}{2}-\alpha}.$$

级数的第 ν 项等于 $O(\nu^{\frac{1}{2}})\Delta\nu^{-\frac{1}{2}-\alpha}=O(\nu^{-1-\alpha})$，从而

$$h_2=\sum_{\nu>\frac{1}{h}}O(\nu^{-1-\alpha})=O(h^\alpha).$$

另一方面，级数的第 ν 项等于 $hS'_\nu(x+\theta h)\Delta\nu^{-\frac{1}{2}-\alpha}$，而 $S'_N(x)$ 是 $HL(-1, c; x)$ 的部分和，它等于 $O(N^{\frac{3}{2}})$. 由是

$$h_1=\sum_{\nu<\frac{1}{h}}O(h\nu^{\frac{3}{2}})\nu^{-\frac{3}{2}-\alpha}=O(h^\alpha).$$

$\phi_\alpha(x)\in\mathrm{Lip}\,\alpha$ 的证明完毕.

实际上，级数 $\phi_\alpha(x)$ $(\alpha>0)$ 本身还不能解决我们的问题，只是对于 $\phi_\alpha(x)$ 所用的解析方法，可利用它来解决问题的. 我们证明

定理 4 设 $c>0$, $\beta>1$，级数 $\sum_{n=2}^{\infty}C_n(c, \beta)e^{inx}$ 匀敛于一连续函数，但当 $p<2$ 时，$\sum|C_n(c, \beta)|^p$ 发散. 这里

$$C_n(c, \beta)=n^{-\frac{1}{2}}(\log n)^{-\beta}e^{icn\log n}.$$

【证明】 现在

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{N}&C_n(c, \beta)e^{inx}\\&=\sum_{n=2}^{N-1}S_n(x)\Delta(n^{-\frac{1}{2}}(\log n)^{-\beta})+S_N(x)N^{-\frac{1}{2}}(\log N)^{-\beta}\\&=\sum_{n=2}^{N-1}O(n^{\frac{1}{2}}\cdot n^{-\frac{3}{2}}(\log n)^{-\beta})+O(\log N)^{-\beta}.\end{aligned}$$

由于 $\beta>1$，所以 $\sum C_n(c, \beta)e^{inx}$ 均匀收敛于连续函数. 但是，当 $p<2$ 时，$|C_n(c, \beta)|^p=n^{-\frac{p}{2}}(\log n)^{-p\beta}$，级数 $\sum|C_n(c, \beta)|^p$ 发散. 证明完毕.

当 $0<\beta<1$，$x\to+0$ 时，从定理 1 知道

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\beta}e^{inx}\approx x^{\beta-1}i\Gamma(1-\beta)\exp\left(-\frac{1}{2}i\pi\beta\right),$$

我们称右端为 $\sum n^{-\beta}e^{inx}$ 的和的主要部分. 对于具有适当性质的实函数 $b(u)$，我们可以求得 $\sum n^{-\beta}b(n)e^{inx}$ 的和的主要部分.

定理 5 设 $0<\beta<1$. 对于任何正数 ε，假如 $b(u)u^{\varepsilon}$ 单调增加，$b(u)u^{-\varepsilon}$ 单调减少，那末当 $x\to+0$ 时，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta} b(n) e^{inx}$$

的和具有主要部分 $x^{\beta-1} b\left(\frac{1}{x}\right) i\Gamma(1-\beta) e^{-\frac{\pi}{2}\beta i}$.

【证明】 设 $S_1=\sum\limits_{n<\delta/x} n^{-\beta}\sin nx$, $T_1=\sum\limits_{n<\delta/x} b(n)n^{-\beta}\sin nx$, 则因

$$S_1=O\left(\frac{1}{1-\beta}\left(\frac{\delta}{x}\right)^{1-\beta}\right),\quad T_1=\sum_{n<\delta x^{-1}} b(n)n^{\varepsilon}\cdot n^{-\beta-\varepsilon}\sin nx,$$

我们见到，当 $\beta<\beta+\varepsilon<1$ 时，

$$|T_1|<b(\delta x^{-1})(\delta x^{-1})^{\varepsilon}(\delta x^{-1})^{1-\beta-\varepsilon}\frac{1}{1-\beta-\varepsilon}$$

$$=\frac{1}{1-\beta-\varepsilon}(\delta x^{-1})^{1-\beta} b(\delta x^{-1}).$$

固定正数 δ，我们证明 $\lim\limits_{x\to+0} b(\delta x^{-1})/b(x^{-1})=1$. 当 $1\leqslant k<\frac{1}{\eta}$ 时，

$$b(kx^{-1})(kx^{-1})^{-\varepsilon}\leqslant b\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^{-\varepsilon},\quad b\left(\frac{k}{x}\right)\leqslant k^{\varepsilon} b\left(\frac{1}{x}\right)\leqslant \eta^{-\varepsilon} b\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$b\left(\frac{k}{x}\right)\left(\frac{k}{x}\right)^{\varepsilon}\geqslant b\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^{\varepsilon},\quad b\left(\frac{k}{x}\right)\geqslant k^{-\varepsilon} b\left(\frac{1}{x}\right)\geqslant \eta^{\varepsilon} b\left(\frac{1}{x}\right).$$

由是

$$\eta^{\varepsilon}\leqslant\frac{b\left(\frac{k}{x}\right)}{b\left(\frac{1}{x}\right)}\leqslant\eta^{-\varepsilon}.$$

令 $x\to+0$，再令 $\varepsilon\to 0$，就得到 $b\left(\frac{k}{x}\right)\simeq b\left(\frac{1}{x}\right)$. 同样可证此结果当 $\eta<k<1$ 时成立. 由是可知

$$T_1=O\left\{\left(\frac{\delta}{x}\right)^{1-\beta} b\left(\frac{1}{x}\right)\right\}\quad (x\to+0).$$

其次考虑 $S_3=\sum\limits_{n>\frac{1}{\delta x}} n^{-\beta}\sin nx$ 和 $T_3=\sum\limits_{n>\frac{1}{\delta x}} n^{-\beta} b(n)\sin nx$. 显然

$S_3=O(\delta^{\beta}x^{\beta-1})$,

$$T_3=\sum_{n>(\delta x)^{-1}} b(n)n^{-\varepsilon}\cdot n^{\varepsilon-\beta}\sin nx,$$

$$|T_3|=O\left\{b\left(\frac{1}{\delta x}\right)(\delta x)^{s}x^{\beta-s-1}\right\}=O(\delta^{s})b\left(\frac{1}{x}\right)x^{\beta-1}.$$

最后讨论

$$S_2=\sum_{\delta x^{-1}<n<(\delta x)^{-1}}n^{-\beta}\sin nx,$$

$$T_2=\sum_{\delta x^{-1}<n<(\delta x)^{-1}}n^{-\beta}b(n)\sin nx.$$

写着

$$T_2=b\left(\frac{1}{x}\right)\sum_{[\delta x^{-1}]}^{[(\delta x)^{-1}]}n^{-\beta}\sin nx+\sum_{[\delta x^{-1}]}^{[(\delta x)^{-1}]}\left\{b(n)-b\left(\frac{1}{x}\right)\right\}n^{-\beta}\sin nx$$

$$=b\left(\frac{1}{x}\right)S_2+\max_{[\delta x^{-1}]<n<[(\delta x)^{-1}]}\left|b(n)-b\left(\frac{1}{x}\right)\right|O\left(\sum_{[\delta x^{-1}]}^{[(\delta x)^{-1}]}n^{-\beta}\right).$$

由于 $S_2=\left(\Gamma(1-\beta)\cos\frac{\pi\beta}{2}+(\delta)\right)x^{\beta-1}(x\to+0)$，其中的$(\delta)$，当 δ 足够小时，其绝对值可以任意小，并且 T_2 的末项等于

$$o\left(b\left(\frac{1}{x}\right)\right)O\left(\frac{1}{\delta x}\right)^{1-\beta}=o\left(x^{\beta-1}b\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

所以

$$T_1+T_2+T_3=x^{\beta-1}b\left(\frac{1}{x}\right)\left\{\Gamma(1-\beta)\cos\frac{\pi\beta}{2}\right.$$

$$\left.+(\delta)+o(1)+O(\delta^{s})+O(\delta^{1-\beta})\right\},$$

从而得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\beta}b(n)\sin nx\simeq x^{\beta-1}\Gamma(1-\beta)\cos\frac{\pi\beta}{2}\,b\left(\frac{1}{x}\right).$$

同样可得

$$\sum n^{-\beta}b(n)\cos nx\simeq x^{\beta-1}b\left(\frac{1}{x}\right)\Gamma(1-\beta)\sin\frac{\pi\beta}{2}.$$

两者相并，就得到定理所述的结果.

我们仔细检查定理 5 的证明. 估计

$$T_3=O(\delta^{s})b\left(\frac{1}{x}\right)x^{\beta-1}$$

当 $\beta>0$ 时就成立，不必有 $\beta<1$ 的限制. 当 $\beta<2$ 时，

$$|S_1| \leqslant \sum_{n<\delta x^{-1}} n^{-\beta} nx = O(\delta^{2-\beta} x^{\beta-1}),$$

从而

$$T_1 = O(\delta^{2-\beta}) x^{\beta-1} b\left(\frac{\delta}{x}\right).$$

T_2 可仍其旧，因此得到

系 1　设 $0<\beta<2$，则当 $x\to+0$ 时，

$$\sum n^{-\beta} b(n) \sin nx \approx x^{\beta-1} \Gamma(1-\beta) \cos\frac{\pi\beta}{2} b\left(\frac{1}{x}\right)$$

成立，但 $\Gamma(1-\beta)\cos\frac{\pi\beta}{2}$ 当 $\beta=1$ 时，其值是 $\frac{\pi}{2}$；$b(u)$ 是满足定理 5 中条件的函数.

对于余弦级数 $\sum n^{-\beta} b(n) \cos nx$，成立着

系 2　设 $b(u)$ 满足定理 5 中的条件，则当 $\sum \frac{b(n)}{n}$ 发散时，

$$\sum \frac{1}{n} b(n) \cos nx \approx \int_1^{\frac{1}{x}} b(t) \frac{dt}{t} \quad (x\to+0),$$

假如 $\sum \frac{b(n)}{n} < \infty$，那末

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n} b(n)(1-\cos nx) \approx \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} b(t) \frac{dt}{t} \quad (x\to+0).$$

【证明】　写着

$$\sum_{n\leqslant x^{-1}} \frac{b(n)}{n} - \sum_1^{\infty} \frac{b(n)}{n} \cos nx$$
$$= \sum_{n\leqslant x^{-1}} \frac{b(n)}{n}(1-\cos nx) - \sum_{n>x^{-1}} \frac{b(n)}{n} \cos nx.$$

由于

$$\frac{b(n)}{n}(1-\cos nx) < \frac{1}{2} n b(n) x^2,$$

所以等式右端第一项小于 $\frac{1}{2}\frac{1}{x} b\left(\frac{1}{x}\right) x^2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2} b\left(\frac{1}{x}\right)$.

假如 $\sum \frac{b(n)}{n} = \infty$，那末

$$\sum_{n>x^{-1}} b(n)n^{-\varepsilon}n^{-1+\varepsilon}\cos nx = b\left(\frac{1}{x}\right)x^{\varepsilon}O\left(\left|\sum_{n>x^{-1}} n^{-1+\varepsilon}\cos nx\right|\right)$$

$$= b\left(\frac{1}{x}\right)x^{\varepsilon}O(x^{-\varepsilon}) = O\left(b\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

假如 $\sum \frac{b(n)}{n} < \infty$，那末仍然

$$\sum_{n>x^{-1}} b(n)n^{-1}\cos nx = O\left(\frac{1}{x}\right).$$

总而言之，不管 $\sum \frac{b(n)}{n}$ 是发散或收敛，我们得到

$$\sum_1^{\infty} \frac{b(n)}{n}\cos nx - \sum_{n<x^{-1}} \frac{b(n)}{n} = O\left(b\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

因此系 2 的证明归结于建立下述两事：

（i）当 $\sum b(n)n^{-1} = \infty$ 时，

$$\sum_{n\leqslant x^{-1}} n^{-1}b(n) \approx \int_1^{\frac{1}{x}} b(t)\frac{dt}{t} \quad \text{以及} \quad b\left(\frac{1}{x}\right) = o\left(\int_1^{\frac{1}{x}} b(t)\frac{dt}{t}\right).$$

（ii）当 $\sum b(n)n^{-1} < \infty$ 时，

$$\sum_{n>x^{-1}} n^{-1}b(n) \approx \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} b(t)\frac{dt}{t} \quad \text{以及} \quad b\left(\frac{1}{x}\right) = o\left(\int_{\frac{1}{x}}^{\infty} b(t)\frac{dt}{t}\right).$$

设 $k>1$，则

$$\int_1^{\frac{1}{x}} b(t)\frac{dt}{t} > \int_{\frac{1}{kx}}^{\frac{1}{x}} b(t)\frac{dt}{t} \approx b\left(\frac{1}{x}\right)\int_{\frac{1}{kx}}^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{t} = b\left(\frac{1}{x}\right)\log k.$$

由于 k 可以很大，所以

$$b\left(\frac{1}{x}\right) = o\left(\int_1^{\frac{1}{x}} b(t)\frac{dt}{t}\right).$$

同样可证

$$b\left(\frac{1}{x}\right) = o\left(\int_{\frac{1}{x}}^{\infty} b(t)\frac{dt}{t}\right).$$

$\frac{b(n)}{n}$ $(n=1, 2, \cdots)$ 是单调减少的，从而得到

$$0 \leqslant \frac{b(n)}{n} - \int_n^{n+1} \frac{b(t)}{t}dt \leqslant \frac{b(n)}{n} - \frac{b(n+1)}{n+1},$$

$$0\leqslant\sum_{1}^{N}\left\{\frac{b(n)}{n}-\int_{n}^{n+1}\frac{b(t)}{t}dt\right\}\leqslant b(1).$$

由是可知，当 $n\to+0$ 时，

$$\int_{1}^{\frac{1}{x}}t^{-1}b(t)dt-\sum_{n\leqslant x^{-1}}n^{-1}b(n)$$

有一定的极限，这就完成了(i)的证明．现在还要完成(ii)的证明．设整数 N 适合 $N<\frac{1}{x}\leqslant N+1$，则

$$\int_{N+1}^{\infty}t^{-1}b(t)dt\leqslant\sum_{n>x^{-1}}n^{-1}b(n)<\int_{N}^{\infty}t^{-1}b(t)dt.$$

系 2 的证明已毕．

系 3 当 $x\to+0$ 时；

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{\log n}\approx\frac{\pi}{2}\frac{1}{x}\frac{1}{\log^2\frac{1}{x}},\quad\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\log n}\approx\frac{1}{x}\frac{1}{\log\frac{1}{x}}.$$

这些结果是包含在下面的系 4 中．

系 4 当 $x\to+0$ 时，设 $b\left(\frac{1}{x}\right)\to0$．又设导数 $b'(u)\,(u>0)$ 是负的，对于任一正数 $\varepsilon\,(\varepsilon<1)$，函数 $-u^{1+\varepsilon}b'(u)$ 是单调增加的，$-u^{1-\varepsilon}b'(u)$ 是单调减少的．在这个情况，当 $x\to+0$ 时，

$$\sum b(n)\cos nx\simeq-\frac{\pi}{2}\frac{1}{x^2}b'\left(\frac{1}{x}\right),\quad\sum b(n)\sin nx\simeq\frac{1}{x}b\left(\frac{1}{x}\right).$$

【证明】 由于 $\sum b(n)\cos nx=\sum\Delta b(n)\left\{D_n(x)-\frac{1}{2}\right\}$，

$$\sum\Delta b(x)=O(1),\quad\left|\sum\Delta b(n)\cos nx\right|\leqslant\sum-\Delta b(n)=O(1),$$

所以

$$\sum b(n)\cos nx=\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^{-1}\sum\Delta b(n)\sin nx+O(1).$$

将系 1 在 $\beta=1$ 的情况，取 $n^{-1}b(n)$ 为 $\Delta b(n)$，我们只要检查：(1°) 当 $0<\varepsilon<1$ 时，$n^{1+\varepsilon}\Delta b(n)$ 关于 n 是增加的；(2°) $C(ku)\simeq C(u)$ 当 $\eta\leqslant k\leqslant\frac{1}{\eta}$ 时成立，但 $C(u)=u\{b(u)-b(u+1)\}$，就能得到 $\sum b(u)\cos nx$ 的主要部分．由于 $C(u)\approx-ub'(u)$，所以由 $b'(u)$ 的性质得到 (2°)．又

因 $-u^{1-\varepsilon}b'(u)$ 当 $0<\varepsilon<1$ 时，是单调减少的，故必 $-b'(n)$ 是单调减少．因此 $b(u)$ 是一凸函数，$\Delta b(n)\downarrow$．由中值定理以及 $-u^{1+\varepsilon}b'(u)$ 的单调增加性，我们见到

$$\frac{b(n)-b(n+1)}{b(n+1)-b(n+2)}=\frac{b'(n+\theta)}{b'(n+\theta+1)}\leqslant\left(\frac{n+1+\theta}{n+\theta}\right)^{1+\varepsilon},$$

这里 $0<\theta<1$．右端小于 $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{1+\varepsilon}$，从而得到(1°)：

$$n^{1+\varepsilon}\Delta b(n)<(n+1)^{1+\varepsilon}\Delta b(n+1).$$

我们证明了 $\sum b(n)\cos nx\simeq-\frac{\pi}{2}\frac{1}{x^2}b'\left(\frac{1}{x}\right)$.

现在讨论 $\sum b(n)\sin nx$．由于 $C(n)=n\Delta b(n)$，所以

$$\sum b(n)\sin nx=\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^{-1}\sum\frac{C_n}{n}(1-\cos nx)+O(1).$$

利用系 2，并且注意到 $\int_{x^{-1}}^{\infty}u^{-1}C(u)du$ 等于

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\infty}\{b(u)-b(u+1)\}du\simeq\int_{\frac{1}{x}}^{1+\frac{1}{x}}b(u)du\simeq b\left(\frac{1}{x}\right).$$

证明完毕.

下面是定理 5 的一种逆命题.

定理 6 设 $b(x)$ 在任一区间 $0<\eta\leqslant x\leqslant\pi$ 上是有界变差，当 $\varepsilon>0$ 时，$x^{\varepsilon}b(x)$ 和 $x^{-\varepsilon}b(x)$ 分别是单调增加和单调减少．设 $0<\beta<1$，$0<x<\pi$，

$$b(x)x^{-\beta}\sim\sum a_n\cos nx,\quad b(x)x^{-\beta}\sim\sum b_n\sin nx,$$

则

$$\frac{\pi}{2}\frac{a_n}{b_n}\simeq n^{\beta-1}b\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma(1-\beta)\frac{\sin}{\cos}\frac{\pi\beta}{2}.$$

【证明】 当 $b(x)\equiv1$ 时，a_n+ib_n 等于

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}t^{-\beta}e^{itn}dt=\frac{2}{\pi}n^{\beta-1}\int_0^{n\pi}t^{-\beta}e^{it}dt.$$

由于

$$\int_0^{\infty}t^{-\beta}e^{it}dt=\Gamma(1-\beta)\exp\left\{\frac{\pi}{2}i(1-\beta)\right\},$$

所以此时

$$\begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix} = \frac{2}{\pi} n^{\beta-1} \Gamma(1-\beta) \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} \frac{\pi\beta}{2}.$$

在一般的情况，由于 $b(x)$ 在$[\eta, \pi]$ $(\eta>0)$ 上是有界变差，我们见到

$$a_n + ib_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\delta}{n}} + \int_{\frac{\delta}{n}}^{\frac{1}{\delta n}} + \int_{\frac{1}{\delta n}}^{\pi}\right) t^{-\beta} b(t) e^{int}\, dt$$

的第一个积分的实部和虚部分别等于

$$\int_0^{\frac{\delta}{n}} t^{\varepsilon} b(t) \cdot t^{-\varepsilon-\beta} \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} nt\, dt = O\left(\left(\frac{\delta}{n}\right)^{\varepsilon} b\left(\frac{\delta}{n}\right)\right) \int_0^{\frac{\delta}{n}} t^{-\varepsilon-\beta} \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} nt\, dt$$

$$= O\left(\frac{\delta}{n}\right)^{1-\beta} b\left(\frac{1}{n}\right).$$

第三个积分是

$$\int_{\frac{1}{\delta n}}^{\pi} t^{-\beta} b(t) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} nt\, dt = O\left\{(\delta n)^{\beta} b\left(\frac{1}{\delta n}\right) \left| \int_{\frac{1}{\delta n}}^{\pi} \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} nt\, dt \right|\right\}$$

$$= O\left(\delta^{\beta} n^{\beta-1} b\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

主要部分是第二个积分，它可以写成

$$\int_{\frac{\delta}{n}}^{\frac{1}{\delta n}} t^{-\beta} \left\{ b(t) - b\left(\frac{1}{n}\right)\right\} \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} nt\, dt + b\left(\frac{1}{n}\right) \int_{\frac{\delta}{n}}^{\frac{1}{\delta n}} t^{-\beta} \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} nt\, dt.$$

利用定理 5 的证法，上式等于

$$o\left(n^{\beta-1} b\left(\frac{1}{n}\right)\right) + 2n^{\beta-1} b\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma(1-\beta) \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} \frac{\pi\beta}{2}.$$

这是因为 δ 可以很小之故. 总结起来，我们得到

$$a_n + ib_n = \frac{2i}{\pi} n^{\beta-1} b\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma(1-\beta) \{e^{-in\pi/2} + o(1)\}.$$

证明完毕.

利用定理 6，我们就能估计幂级数

$$F(z) \equiv F_{a,\beta}(z) = \frac{1}{(1-z)^{1+\alpha}} \left\{\frac{a}{1-z}\right\}^{\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha;\ a,\ \beta)_n z^n$$

的系数$(\alpha;\ a,\ \beta)_n$，这里$a\geqslant 2$，β是实数．由于

$$\alpha F_{\alpha,\beta}(z)+\beta F_{\alpha,\beta-1}(z)=\frac{1}{(1-z)^{1+\alpha}}\left(\log\frac{a}{1-z}\right)^{\beta-1}\left\{\alpha\log\frac{a}{1-z}+\beta\right\}$$
$$=F'_{\alpha-1,\beta}(z),$$

所以我们就获得等式

$$n(\alpha-1;\ a,\ \beta)_n=\alpha(\alpha;\ a,\ \beta)_{n-1}+\beta(\alpha;\ a,\ -1+\beta)_{n-1}.$$

下面称这个等式为有关$F_{\alpha,\beta}(z)$的系数等式．

定理 7 设$a\geqslant 2$，β是任一实数，则当α不是负整数的实数时，

$$(\alpha;\ a,\ \beta)_n\approx\frac{n^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}(\log n)^\beta;$$

假如α是一负的整数，那末

$$(\alpha;\ a,\ \beta)_n\approx(-1)^{\alpha-1}\Gamma(|\alpha|)\beta n^\alpha(\log n)^{\beta-1}.$$

【证明】 第一式当α（任意的β）时成立的话，从系数等式得到

$$(\alpha-1;\ a,\ \beta)_n\simeq\frac{1}{n}\left\{\frac{\alpha n^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}(\log n)^\beta+\frac{\beta n^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}(\log n)^{\beta-1}\right\}$$
$$\simeq\frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(\log n)^\beta.$$

这就是说，第一式当α时成立的话，当$\alpha-1$时也成立．因此，假如我们证得第一式在$-1<\alpha<0$的情况成立，那末对于非整数的一负数，第一式成立．另一方面，第一式当$\alpha(\alpha>[\alpha])$时成立的话，从$F_{\alpha+1,\beta}(z)=(1-z)^{-1}F_{\alpha,\beta}(z)$得到

$$(\alpha+1;\ a,\ \beta)_n=\sum_{\nu=0}^{n}(\alpha;\ a,\ \beta)_\nu=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\sum_{\nu=2}^{n}\nu^\alpha(\log\nu)^\beta(1+o(1))$$
$$\simeq\frac{n^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}(\log n)^\beta\quad(\alpha>-1).$$

因此，假如第一式当$-1<\alpha<0$时成立，那末它对于一切非整数的正数也都成立．

现在证明当$-1<\alpha<0$时的第一式．当$0\leqslant\eta<\eta'\leqslant\pi$时，由定理6的证明，均匀地成立着

$$\int_\eta^{\eta'}x^{-\beta}b(x)\cos nx\,dx=O\left(n^{\beta-1}b\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

假如$\lambda(x)$在$[0, \pi]$上是有界变差，那末从定理 6 以及它的证明，我们得到

$$b(x)\lambda(x)x^{-\beta}\sim\sum\frac{a_n\cos}{b_n\sin}nx$$

的系数是

$$\frac{a_n}{b_n}\approx\frac{2}{\pi}n^{\beta-1}b\left(\frac{1}{n}\right)\lambda(+0)\Gamma(1-\beta)\frac{\sin}{\cos}\frac{\pi\beta}{2}.$$

设$z=re^{ix}$，则$F(z)=O\left(|x|^{\alpha-1}\log^{\beta}\left|\frac{1}{x}\right|\right)(x\to 0)$关于$0<r<1$是均匀的．由于$\mathrm{Re}(F(e^{ix}))$等于

$$\frac{1}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^{\alpha+1}}\left\{\log^2\frac{a}{2\sin\frac{x}{2}}+\frac{(\pi-x)^2}{4}\right\}^{\frac{\beta}{2}}$$

$$\cdot\cos\left\{\frac{(\pi-x)(\alpha+1)}{2}+\beta\operatorname{tg}^{-1}\frac{\frac{\pi-x}{2}}{\log\frac{a}{2}\csc\frac{x}{2}}\right\},$$

它的中间的因子$\{\cdots\}^{\frac{\beta}{2}}$具有定理 6 中$b(x)$的性质，$\cos\{\cdots\}$是一有界变差的函数，所以$\mathrm{Re}(F(e^{ix}))$具有$b(x)\lambda(x)x^{\alpha+1}$的形式，

$$\mathrm{Re}(F(e^{ix}))=\sum(\alpha;\ a,\ \beta)_n\cos nx.$$

从而

$$(\alpha;\ a,\ \beta)_n\approx-\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi\alpha}{2}\cos\frac{\pi\alpha}{2}\Gamma(-\alpha)n^{\alpha}(\log n)^{\beta}$$

$$=\frac{n^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}(\log n)^{\beta}.$$

当$\alpha>[\alpha]$时，我们已经证明了$(\alpha;\ a,\ \beta)_n\approx n^{\alpha}(\log n)^{\beta}/\Gamma(1+\alpha)$.

假如证得$(0;\ a,\ \beta)_n\approx(\log n)^{\beta}$，那末当$[\alpha]=\alpha$时，上式也成立．

现在从$F_{0,\beta}(z)=F_{-\frac{1}{2},\beta}(z)F_{-\frac{1}{2},0}(z)$得到

$$(0;\ a,\ \beta)_n=\sum_{\nu=0}^{n}\left(-\frac{1}{2};\ a,\ \beta\right)_{\nu}\left(-\frac{1}{2};\ a,\ 0\right)_{n-\nu}$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n}\left(-\frac{1}{2};\ a,\ \beta\right)_{\nu}\left(-\frac{1}{2}\right)_{n-\nu}=\sum_{\nu=0}^{[\theta n]}+\sum_{[\theta n+1]}^{n},$$

这里$0<\theta<\frac{1}{2}$，$\sum_{\nu=0}^{[\theta n]}$ 等于或小于

$$\left(-\frac{1}{2}\right)_{n-[\theta n]}\sum_{\nu=0}^{[\theta n]}\left(-\frac{1}{2};\ \alpha,\ \beta\right)_\nu=O(n^{-\frac{1}{2}})(\log n)^\beta\sum_{\nu=0}^{[\theta n]}\left(-\frac{1}{2}\right)_\nu$$

$$=O(\sqrt{\theta})(\log n)^\beta,$$

$$\sum_{[\theta n+1]}^{n}\left(-\frac{1}{2};\ \alpha,\ \beta\right)_\nu\left(-\frac{1}{2}\right)_{n-\nu}$$

$$\approx(\log n)^\beta\sum_{\nu=[\theta n+1]}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)_\nu\left(-\frac{1}{2}\right)_{n-\nu}$$

$$=(\log n)^\beta\left\{1-\sum_{\nu=0}^{[\theta n]}\left(-\frac{1}{2}\right)_\nu\left(-\frac{1}{2}\right)_{n-\nu}\right\}$$

$$=(\log n)^\beta\{1+O(\sqrt{\theta})\};$$

总结起来，我们得到

$$(0;\ \alpha,\ \beta)_n=(\log n)^\beta\{1+O(\sqrt{\theta})\}.$$

由于θ可以很小，所以第一式当$\alpha=0$时成立．因此，只要α不是负整数，第一式总成立．

由于$n(-1;\ \alpha,\ \beta)_n=\beta(0;\ \alpha,\ \beta-1)_{n-1}\simeq\beta(\log n)^{\beta-1}$，所以第二式当$\alpha=-1$时成立．假如第二式当负整数$\alpha$时成立，那末

$$n(\alpha-1;\ \alpha,\ \beta)_n=\alpha(\alpha;\ \alpha,\ \beta)_{n-1}+\beta(\alpha;\ \alpha,\ \beta-1)_{n-1}$$

$$\simeq(-1)^\alpha\Gamma(|\alpha|+1)n^\alpha\{\beta(\log n)^{\beta-1}-\beta O(\log n)^{-1}\}$$

$$\simeq(-1)^\alpha\Gamma(|\alpha|+1)n^\alpha\beta(\log n)^{\beta-1}.$$

因此第二式当$\alpha-1$时也成立．由是第二式当任何负整数α时成立．定理证明完毕．

第 七 章

三角多项式的逼近论

1. 周期连续函数的逼近问题

设 $\Phi(u)\,(u\geqslant0)$ 是一单调增加的连续函数，$\Phi(0)=0$，$\Phi(\infty)=\infty$。当 $\Phi(f(x))$ 属于 $L(a,\,b)$ 时，记 $f(x)\in L_{\Phi}(a,\,b)$。设 $\phi(u)\,(u\geqslant0)$ 和 $\psi(v)\,(v\geqslant0)$ 是一对相互为逆的连续增加函数，$\phi(0)=\psi(0)=0$，那末成立着杨格的不等式

$$ab\leqslant\int_0^a\phi(u)\,du+\int_0^b\psi(v)dv\quad(a>0,\ b>0)$$

(参见著者《实函数论》)．记

$$\Phi(x)=\int_0^x\phi(u)du,\quad \Psi(y)=\int_0^y\psi(v)dv.$$

假如对于适合 $\int_a^b\Psi(g(y))dy\leqslant1$ 的 $g(y)$，积分 $\int_a^b f(x)g(t)dt$ 的绝对值具有上界，那末称此上界 $\|f(x)\|_{\Phi}$ 为 $f(x)$ 的 Φ 范数，此时记 $f(x)\in L_{\Phi}^{*}(a,\,b)$．这个范数的定义比较"间接"，我们对于特殊的空间，直接定义范数于下：

在 $C_{2\pi}$ 上定义 $\|f(x)\|_C=\max\limits_{0<x<2\pi}\|f(x)\|$，

在 $L_p(0, 2\pi)$ 上，定义 $\|f(x)\|_p=\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$.

在这里我们只讨论以 2π 为周期的周期函数，$L_\Phi^*(0, 2\pi)$ 代表 $C_{2\pi}$ 或是 $L_p(0, 2\pi)$ 等函数族，$t_n(x)$ 代表阶数不高于 n 的三角多项式. 因此，当 $L_\Phi^*(0, 2\pi)=C_{2\pi}$ 时，

$$\|f(x)\|_\Phi=\max_x|f(x)|=\|f(x)\|_C;$$

当 $L_\Phi^*(0, 2\pi)=L_p(0, 2\pi)$ 时，$\|f(x)\|_\Phi=\|f(x)\|_p$. 设 $f(x)\in L_\Phi^*(0, 2\pi)$，称 $\delta(f, t_n)_\Phi=\|f(x)-t_n(x)\|_\Phi$ 为 $f(x)$ 与 $t_n(x)$ 的**距离**. 固定正整数 n，将 $t_n(x)$ 变动，称 $\delta(f, t_n)_\Phi$ 的下界为在 $L_\Phi^*(0, 2\pi)$ 中 $f(x)$ 对于阶数不高于 n 的 $t_n(x)$ 的**最佳逼近**，记它做 $E_n(f)_\Phi$, $E(f)_C$ 等. 我们见到

$$E_n(f)_\Phi=\inf_{t_n}\|f(x)-t_n(x)\|_\Phi \quad (\text{固定 } n).$$

定理 1 若 $f(x)\in C_{2\pi}$，则对于任一正整数 n，必有 $t_n(x)$ 适合

$$E_n(f)_C=\|f(x)-t_n(x)\|_C,$$

而 $\mathfrak{S}[f]$ 的费耶平均 $\sigma_m(x)\equiv\sigma_m(x, f)$ 适合

$$\|f(x)-2\sigma_{2n-1}(x)+\sigma_{n-1}(x)\|_C\leqslant 4E_n(f)_C.$$

假如 $\|f(x)-\sigma_n(x, f)\|_C=o\left(\frac{1}{n}\right)(n\to\infty)$，那末 $f(x)$ 是一常数.

【证明】 设 $\varepsilon_\nu\downarrow 0$. 对于 ε_ν，存在 $t_{n,\nu}(x)$（阶数不高于 n 的三角多项式）适合

$$\|f(x)-t_{n,\nu}(x)\|_C\leqslant\varepsilon_\nu+E_n(f)_C.$$

由于 $t_{n,\nu}(x)$ $(\nu=1, 2, \cdots)$ 是均匀有界，所以它们至少有一个极限多项式 $t_n(x)$，因此 $\|f(x)-t_n(x)\|_C\leqslant E_n(f)_C$；这里的不等号是不成立的.

置 $f(x)=t_n(x)+\rho(x)$，则 $\|\rho(x)\|_C=E_n(f)_C$. 对于 $\mathfrak{S}[f]$ 和 $\mathfrak{S}[\rho]$ 的部分和以及费耶平均，我们分别写做 $S_n(x, f)$, $S_n(x, \rho)$, $\sigma_n(x, f)$, $\sigma_n(x, \rho)$. 写着 $S_k(x, f)-t_n(x)=r_k(x)$ $\quad(k\geqslant n)$，我们见到

$$\frac{S_n(x, f)+\cdots+S_{n+p-1}(x, f)}{p}=t_n(x)+\frac{r_n(x)+\cdots+r_{n+p-1}(x)}{p}$$

或是

$$\frac{n+p}{p}\sigma_{n+p-1}(x, f)-\frac{n}{p}\sigma_{n-1}(x, f)$$

$$=t_n(x)+\frac{n+p}{p}\sigma_{n+p-1}(x, \rho)-\frac{n}{p}\sigma_{n-1}(x, \rho).$$

置 $p=n$, 左端 $\tau_{2n-1}(x)\equiv 2\sigma_{2n-1}(x, f)-\sigma_{n-1}(x, f)$ 是一个 $2n-1$ 阶(可能阶数小于 $2n-1$)的多项式, 右端末了两项之和的绝对值不大于 $3E_n(f)_C$. 由是

$$\|f(x)-\tau_{2n-1}(x)\|_C\leqslant\|f(x)-t_n(x)\|_C+3E_n(f)_C=4E_n(f)_C.$$

设 $f(x)\sim\sum c_k e^{ikx}$, 则当 $n\geqslant k$ 时,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{f(x)-\sigma_n(x, f)\}e^{-ikx}\,dx=\frac{|k|c_k}{n+1},$$

假如 $f-\sigma_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$, 那末当 $|k|>0$ 时, $|k|c_k=o(1)$; 从而 $c_k=0$,

$$f(x)\equiv c_0.$$

定理证毕.

前章 §5 的引理 3 说: 当 $1<p<\infty$, $0<\alpha<1$ 时, $f(x)\in\mathrm{Lip}(\alpha, p)$ 的充要条件是 $\|f(x)-\sigma_n(x, f)\|_p=O(n^{-\alpha})$. 关于 $p=\infty$, $p=1$ 以及 $\alpha=1$ 的各种情况, 未有论述, 我们首先证明

定理 2 假如 $\sigma_n(x, f)-f(x)=O\left(\frac{1}{n}\right)$, 那末 $\tilde{f}(x)\in\mathrm{Lip}\,1$; 后者也包含前者. 前者是 $f(x)$ 具有亚光滑性的充分条件. $f(x)\in\mathrm{Lip}\,\alpha\,(0<\alpha<1)$ 的充要条件是

$$\sigma_n(x, f)-f(x)=O(n^{-\alpha}).$$

【证明】 首先证明 $\sigma_n-f=O(n^{-1})$ 等价于 $\tilde{f}\in\mathrm{Lip}\,1$, 写着 $f-\sigma_n(f)=g_n$, 那末从 $g_n=O(n^{-1})$ 得到 $\sigma_n(g_n)=O(n^{-1})$. 由是

$$\sigma_n[f]-f=\{\sigma_n(\sigma_n(f))-\sigma_n(f)\}+\{\sigma_n(g_n)-g_n\}$$
$$=\sigma_n(\sigma_n(f))-\sigma_n(f)+O(n^{-1}).$$

左端也是 $O(n^{-1})$. 一般地说: $t_n-\sigma_n(t_n)=\frac{1}{n+1}\frac{d\tilde{t}_n}{dx}$, 因此, 从上式得到

$$\tilde{\sigma}_n'(x, f)=O(1).$$

由是 $\tilde{\sigma}_n(x+h, f)-\tilde{\sigma}_n(x, f)=O(|h|)$ 均匀地成立，或是说函数列 $\{\tilde{\sigma}_n(x, f)\}$ 均匀地属于 Lip 1；从而 $\tilde{f}(x)\in\text{Lip}\,1$.

现在要从 $\tilde{f}(x)\in\text{Lip}\,1$ 导出 $\sigma_n[f]-f=O(n^{-1})$，只要从 $f\in\text{Lip}\,1$ 导出 $\tilde{\sigma}_n[f]-\tilde{f}=O(n^{-1})$ 好了(交换了 f 与 $\tilde{f}$!)．由于

$$\tilde{\sigma}_n(x, f)-\tilde{f}(x)=\frac{1}{\pi(n+1)}\int_0^\pi\{f(x+t)-f(x-t)\}\frac{\sin(n+1)t}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^2}dt$$

$$=\int_0^{\frac{1}{n}}+\int_{\frac{1}{n}}^\pi=I+J,$$

$$I=\frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{1}{n}}O\left(t\cdot(n+1)\,t\cdot\left(\frac{2}{\pi}\cdot t\right)^{-2}\right)dt=O\left(\frac{1}{n}\right),$$

所以，写着 $S(t)=\int_t^\pi\sin(n+1)u\left(2\sin\frac{u}{2}\right)^{-2}du$, 我们只要估计

$$J=\frac{1}{\pi(n+1)}\left\{\left[-S(t)\left(f(x+t)-f(x-t)\right)\right]_{\frac{1}{n}}^\pi\right.$$
$$\left.+\int_{\frac{1}{n}}^\pi[f'(x+t)+f'(x-t)]S(t)dt\right\}.$$

利用第二中值定理，我们见到

$$S(t)=\frac{1}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^2}\int_t^{\tau}\sin(n+1)t\,dt=O(1/nt^2).$$

因此，

$$J=O\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{\pi(n+1)}\int_{\frac{1}{n}}^\pi O\left(\frac{1}{nt^2}\right)dt=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

将 $I=O(n^{-1})$ 与 $J=O(n^{-1})$ 相并，就获得

$$\tilde{\sigma}_n(x, f)-\tilde{f}(x)=O(n^{-1}).$$

定理 2 的第一部分已经证明完毕．其次，从 $\sigma_n(x, f)-f(x)=O(n^{-1})$ 导出 $f(x)$ 的亚光滑性．简写 $\sigma_n(x)=\sigma_n(x, f)$，那末

$$f(x)=\sigma_2(x)+(\sigma_{2^2}(x)-\sigma_2(x))+\cdots+(\sigma_{2^n}(x)-\sigma_{2^{n-1}}(x))+\cdots.$$

此级数的第 n 项 $u_n(x)=\sigma_{2^n}(x)-\sigma_{2^{n-1}}(x)$ 是阶数不高于 2^n 的三角多项式，它均匀地等于 $O(2^{-n})$．为了要导出 $f(x)$ 的亚光滑性，我们不妨假

设 $\sigma_2(x)\equiv 0$, 因此

$$\begin{aligned}
&f(x+h)+f(x-h)-2f(x)\\
&\quad=\sum_{n=2}^{\infty}\{u_n(x+h)+u_n(x-h)-2u_n(x)\}\\
&\quad=\sum_{2}^{N}+\sum_{N+1}^{\infty},
\end{aligned}$$

这里 $h>0$, $2^{-N}<h\leqslant 2^{-N+1}$. 当 $n>N$ 时,

$$|u_n(x+h)+u_n(x-h)-2u_n(x)|\leqslant 4\max|u_n(x)|=O(2^{-n}).$$

从而

$$\begin{aligned}
&\sum_{N+1}^{\infty}\{u_n(x+h)+u_n(x-h)-2u_n(x)\}\\
&\quad=O\left(\sum_{N+1}^{\infty}2^{-n}\right)=O(2^{-N})=O(h).
\end{aligned}$$

对于 $\sum\limits_{2}^{N}$ 的估计, 我们利用将于下文建立的贝恩斯坦定理:

$$|t_n'(x)|\leqslant 2n\max|t_n(x)|.$$

由于

$$\begin{aligned}
&\{u_n(x+h)-u_n(x)\}+\{u_n(x-h)-u_n(x)\}\\
&\quad=h\{u_n'(x+\theta h)-u_n'(x-\theta' h)\}\\
&\quad=(\theta-\theta')h^2u_n''(x+\theta'' h)\quad(|\theta-\theta'|<1,\ |\theta''|<1)
\end{aligned}$$

的绝对值不大于

$$8h^2\cdot 2^{2n}\max|u_n(x)|=h^2 2^n O(1)=O(h)h2^n,$$

所以

$$\sum_{2}^{N}\{u_n(x+h)+u_n(x-h)-2u_n(x)\}=O(h)h\sum_{1}^{N}2^n=O(h).$$

总结起来, 我们得到

$$f(x+h)+f(x-h)-2f(x)=O(h).$$

这就证明了 $f(x)$ 的亚光滑性.

这个证明的方法也可利用它来从 $\sigma_n(f)-f=O(n^{-\alpha})$ $(0<\alpha<1)$ 导出 $f(x)\in\mathrm{Lip}\,\alpha$. 当 $n\leqslant N$ 时, 我们利用贝恩斯坦的定理:

$$\sum_{n=2}^{N}\{u_n(x+h)-u_n(x)\}=h\sum_{n=2}^{N}u_n'(x+\theta_n h)\quad(0<\theta_n<1),$$

由于 $u_n(x+h)-u_n(x)$ 的绝对值不大于 $2\max|u_n(x)|$, 所以

$$f(x+h)-f(x)=h\sum_{n=2}^{N}O(2^{n-\alpha n})+O\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}2^{-\alpha n}\right)$$
$$=hO(2^{(1-\alpha)N})+O(2^{-\alpha N})=O(h^{\alpha}).$$

从 $\sigma_n(x)-f(x)$ 的积分表达式, 容易从 $f(x+t)-f(x)=O(t^{\alpha})$ 得到 $O(n^{-\alpha})$ 的估计.

定理 2 证明完毕. 我们还要证明

贝恩斯坦的定理 当阶数不高于 n 的三角多项式 $t_n(x)$ 的最大绝对值是 M 时, $|t_n'(x)|\leqslant 2nM$.

【证明】 设 $D_n(t)$ 与 $K_n(t)$ 分别表示狄里克莱核与费耶核, 我们见到

$$t_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}t_n(t)D_n(x-t)dt,\quad t_n'(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}t_n(x+t)D_n'(t)dt,$$

由于

$$-D_n'(t)=\sum_1^n k\sin kt,$$
$$-D_n'(t)-\sum_{k=1}^{n-1}k\sin(2n-k)t=2n\sin nt\,K_{n-1}(t),$$

所以

$$t_n'(x)=\frac{2n}{\pi}\int_0^{2\pi}t_n(x+t)\sin nt\,K_{n-1}(t)dt$$

的绝对值 $|t_n'(x)|\leqslant\frac{2nM}{\pi}\int_0^{2\pi}K_{n-1}(t)dt=2nM$. 证明完毕.

对于 $t_n(x)$ 的共轭多项式 $\tilde{t}_n(x)$, 相应于贝恩斯坦不等式, 有

$$|\tilde{t}_n'(x)|\leqslant 2n\max_x|t_n(x)|.$$

这是赛干(Szegö)在 1928 年得到的. 类似于上述, 只要注意到

$$\tilde{t}_n'(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}t_n(x+t)\tilde{D}_n'(t)dt$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}t_n(x+t)\left\{\sum_1^n k\cos kt\right\}dt$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}t_n(x+t)\left\{\sum_1^n k\cos kt+\sum_1^{n-1}k\cos(2n-k)t\right\}dt$$
$$=\frac{2n}{\pi}\int_0^{2\pi}t_n(x+t)\cos nt\,K_{n-1}(t)dt$$

就可完成赛干不等式的证明.

利用敏可夫斯基不等式于 $t_n'(x)$ 和 $\tilde{t}_n'(x)$ 的表达式,我们得到

$$\|t_n'(x)\|_p\leqslant 2n\|t_n(x)\|_p \quad (p>1),$$
$$\|\tilde{t}_n'(x)\|_p\leqslant 2n\|t_n(x)\|_p.$$

这是尼可里斯基的不等式.

当 $f\in L_\Phi^*(0,\ 2\pi)$ 时, $\omega(h,\ f)_\Phi=\|f(x+h)-f(x)\|_\Phi$ 未必满足 $\omega(+0,\ f)_\Phi=0$, 比方说,有界函数 f 具有不连续点时, $\omega(+0,\ f)_C>0$, 但是,为便利起见,我们称 $\omega(h,\ f)_\Phi$ 为 $f(x)$ 在 $L_\Phi^*(0,\ 2\pi)$ 中的连续模.

定理 3 假如 $f(x)$ 具有 k 次有界导函数 $f^{(k)}(x)$ $(k>0)$, 那末

$$E_n(f)_C\leqslant C_k\omega\left(\frac{2\pi}{n},\ f\right)_C n^{-k},$$

常数 C_k 只与 k 有关系.

【证明】 设 $\mathfrak{S}[f]=\sum A_n(x)$, 我们首先利用等式

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}f(x+t)\frac{\sin\omega t}{t}dt=\sum_{\nu\leqslant\omega}{}' A_\nu(x) \quad (\omega>0)$$

建立

$$E_n(f)_C=O(n^{-k}).$$

这里的 $\sum'$ 表示: 当 $\omega=[\omega]$ 时, 末项 $A_\omega(x)$ 乘以 $\frac{1}{2}$. 假如阶梯函数 $\bar{\nu}=\bar{\nu}(\nu)$ 当 $\nu=[\nu]$ 时,有跃度 $A_\nu(x)$, 那末

$$\sum_{\nu\leqslant\omega}{}' A_\nu(x)=\int_0^\omega d\bar{\nu}(\nu),$$

$$\int_0^\omega\sum_{\nu\leqslant\omega}{}' A_\nu(x)d\omega'=\int_0^\omega d\bar{\nu}(\nu)\int_\nu^\omega d\omega'=\sum_{\nu\leqslant\omega}{}'(\omega-\nu)A_\nu(x).$$

我们得到等式

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x+t)\frac{\sin^2\frac{1}{2}\omega t}{\omega t^2}dt=\sum_{\nu\leqslant\omega}{}'\left(1-\frac{\nu}{\omega}\right)A_\nu(x),$$

设 $\omega=2m$(偶数),则得

$$\sigma_{2m-1}(x)=\frac{1}{\pi m}\int_{-\infty}^{\infty}f(x+t)\frac{\sin^2 mt}{t^2}dt.$$

因此,设

$$\tau_{2m-1}(x)=2\sigma_{2m-1}(x)-\sigma_{m-1}(x),\ h(t)=\sin^2 t-\sin^2\frac{t}{2},$$

则因

$$\int_0^\infty (t^{-1}\sin t)^2\,dt=\frac{1}{2}\pi,\quad \tau_{2m-1}(x)=\frac{2}{m\pi}\int_{-\infty}^\infty f(x+t)\frac{h(mt)}{t^2}\,dt,$$

我们得到

$$\tau_{2m-1}(x)-f(x)=\int_0^\infty\left\{f\left(x+\frac{t}{m}\right)+f\left(x-\frac{t}{m}\right)-2f(x)\right\}\frac{h(t)}{t^2}\,dt.$$

函数 $H_0(t)=h(t)/t^2$ $(0\leqslant t<\infty)$ 是有界，$h(t)$ 也是有界，从而

$$H_1(t)=\int_t^\infty H_0(u)\,du\quad (0\leqslant t<\infty)$$

也是有界，并且

$$H_1(t)=O(t^{-2})\quad (t\to\infty).$$

事实上，当 $T>t$ 时，积分

$$\int_t^T H_0(u)\,du=\frac{1}{t^2}\int_t^{T'} h(t)\,dt=\frac{1}{2t^2}\int_t^{T'} (\cos t-\cos 2t)\,dt$$

的绝对值小于 $\frac{3}{2}t^{-2}$. 由于

$$2h_p(t)=\underbrace{\int^t\cdots\int^{t_1}}_{p} 2h(t_1)\,dt_1\cdots dt_p$$

$$=\begin{cases}\pm(\cos t-2^{-p}\cos 2t) & (p\text{: 偶数}),\\ \pm(\sin t-2^{-p}\sin 2t) & (p\text{: 奇数}),\end{cases}$$

所以

$$H_1(t)=-\frac{h_1(t)}{t^2}-2!\frac{h_2(t)}{t^3}-\cdots$$

$$-p!\frac{h_p(t)}{t^{p+1}}+(p+1)!\int_t^\infty\frac{h_p(u)}{u^{p+2}}\,du.$$

两边施行积分，我们见到

$$H_2(t)=\int_t^\infty H_1(u)\,du=O(t^{-2}).$$

同样，

$$H_p(t)=\int_t^\infty H_{p-1}(u)\,du=O(t^{-2})\quad (p=3,\ 4,\ \cdots).$$

另一方面，我们要证 $H_3(0)=H_5(0)=\cdots=0$. 写着 $\tau_m(x)=\tau_m(x, t)$, 那末，当 $m\geqslant 1$ 时，

$$\tau_{2m-1}(x,\ 1)=\frac{2}{\pi m}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h(mt)}{t^2}\,dt=1,$$

$$\tau_{2m-1}(x,\ \cos x)=\frac{2}{\pi m}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos mt}{t^2}\cos(x+t)\,dt=\cos x.$$

置 $x=0$, 则得

$$\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}H_0(t)\,dt=1,\quad \frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\frac{t}{m}\,H_0(t)\,dt=1.$$

从第二个等式，我们见到

$$\frac{4}{\pi}\Big[-\cos\frac{t}{m}\,H_1(t)\Big]_0^{\infty}+\frac{4}{\pi m}\int_0^{\infty}\sin\frac{t}{m}\,H_1(t)\,dt=1,$$

$$\Big[-\frac{4}{\pi m}\sin\frac{t}{m}\,H_2(t)\Big]_0^{\infty}+\frac{4}{\pi m^2}\int_0^{\infty}\cos\frac{t}{m}\,H_2(t)\,dt=0,$$

$$\int_0^{\infty}\cos\frac{t}{m}\,H_2(t)\,dt=0.$$

将 $m\to\infty$, 得到

$$\int_0^{\infty}H_2(t)\,dt=0.$$

同样可证

$$H_5(0)=\cdots=0.$$

从上面所得的 $\tau_{2m-1}(x)-f(x)$ 的积分表达式，施行分部积分，我们见到

$$\tau_{2m-1}(x)-f(x)=\frac{2}{\pi m^p}\int_0^{\infty}\Big\{f^{(p)}\Big(x+\frac{t}{m}\Big)$$

$$+(-1)^{(p)}f^{(p)}\Big(x-\frac{t}{m}\Big)\Big\}H_p(t)\,dt,$$

这里的整数 $p\leqslant k$. 由是，取 $p=k$, 我们得到

$$|\tau_{2m-1}(x)-f(x)|\leqslant\frac{1}{\pi m^k}\max_x|f^{(k)}(x)|\int_0^{\infty}|H_k(t)|\,dt.$$

从而 $E_{2m-1}[f]_C=O(m^{-k})$, $E_n[f]_C=O(n^{-k})$. 写着

$$A_k=2^k\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}|H_k(t)|\,dt,$$

我们得到

$$E_n(f)_C \leqslant \frac{A_k}{n^k} \max|f^{(k)}(x)|.$$

设 $\delta>0$, $F(x)$是$f(x)$ 的积分, 那末"动点平均"(在点x的平均)

$$f_\delta(x)=\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} f(x+t)dt=\frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)dt$$
$$=\frac{F(x+\delta)-F(x-\delta)}{2\delta}$$

是以 2π 为周期的周期函数, $(f_\delta)'=(f')_\delta$, 函数 $g(x)=f(x)-f_\delta(x)$的最大绝对值不大于

$$\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}|f(x+t)-f(x)|dt \leqslant \omega(\delta, f)_C,$$

并且

$$|g^{(k)}(x)|=|f^{(k)}(x)-f_\delta^{(k)}(x)| \leqslant \omega(\delta, f^{(k)})_C.$$

由于

$$|f_\delta^{(k+1)}(x)|=\frac{|f^{(k)}(x+\delta)-f^{(k)}(x-\delta)|}{2\delta}$$
$$\leqslant \frac{1}{2\delta}\omega(2\delta, f^{(k)})_C \leqslant \frac{1}{\delta}\omega(\delta, f^{(k)})_C,$$

所以从 $E_n(f)_C \leqslant E_n(f_\delta)_C+E_n(g)_C$ 得到

$$E_n(f)_C \leqslant \frac{A_{k+1}}{n^{k+1}} \max_x |f_\delta^{(k+1)}(x)| + \frac{A_k}{n^k} \max|g^{(k)}(x)|$$
$$\leqslant \frac{1}{n^k}\left[\frac{A_{k+1}}{n\delta}+A_k\right]\omega(\delta, f^{(k)})_C.$$

置 $\delta=\frac{1}{n}$, 就得到所要的结果, 定理证毕.

定理 4 假如$f(x)$ 是亚光滑的, 那末

$$f(x)-2\sigma_{2n-1}(x, f)+\sigma_{n-1}(x, f)=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

假如 $f^{(k)}(x)$ $(k>0)$是亚光滑的, 那末 $E_n(f)_C=O(n^{-1-k})$.

【证明】 设$f_\delta(x)$ 的动点平均$(f_\delta(x))_\delta=f_{\delta\delta}(x)$ 与$f(x)$ 相差是 $g(x)$:

$$f(x)=f_{\delta\delta}(x)+g(x),$$

那末当 $f^{(k)}(x)$ 具有亚光滑性时，成立着

$$|f_{\delta\delta}^{(k+2)}(x)|=\frac{|f^{(k)}(x+2\delta)+f^{(k)}(x-2\delta)-2f^{(k)}(x)|}{4\delta^2}\leqslant\frac{1}{2\delta}M,$$

这里 $M\geqslant|f^{(k)}(x+t)+f^{(k)}(x-t)-2f^{(k)}(x)|/2t$. 由于 $4\delta^2f_{\delta\delta}(x)$ 等于

$$\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}f(x+u+v)\,du\,dv=\int_{-2\delta}^{2\delta}f(x+t)(2\delta-|t|)dt$$

$$=\int_0^{2\delta}\{f(x+t)+f(x-t)\}(2\delta-t)dt,$$

所以

$$g^{(k)}(x)=-\frac{1}{2\delta^2}\int_0^{2\delta}\{f^{(k)}(x+t)+f^{(k)}(x-t)-2f^{(k)}(x)\}(2\delta-t)dt,$$

$$|g^{(k)}(x)|\leqslant\frac{1}{2\delta^2}\int_0^{2\delta}Mt(2\delta-t)dt\leqslant\frac{1}{2}\delta M,$$

从而

$$E_n(f)\leqslant E_n(f_{\delta\delta})+E_n(g)\leqslant A_{k+2}n^{-2-k}(2\delta)^{-1}M+\frac{1}{2}A_k2^{-k}\delta M.$$

设 $\delta=\frac{1}{n}$, 就得到 $E_n(f)=O(n^{-1-k})$.

当 $k=0$ 时, $E_n(f)=O(n^{-1})$. 由定理 1,

$$\|f(x)-2\sigma_{2n-1}(x)+\sigma_n(x)\|_C\leqslant 4E_n(f)=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

定理证明完毕.

现在将定理 2 拓广成如下的形式，它也是定理 3 和定理 4 的“逆”.

定理 5 设 $E_n(f)_C\leqslant Mn^{-k-\alpha}$ $(0<\alpha<1)$ (k 是 0 或是正整数), 那末

$$|f^{(k)}(x+h)-f^{(k)}(x)|\leqslant B_\alpha M|h|^\alpha\quad(B_\alpha\text{ 只与 }\alpha\text{ 有关系}),$$

假如 $E_n(f)_C\leqslant Mn^{-k-1}$, 那末

$$|f^{(k)}(x+h)+f^{(k)}(x-h)-2f^{(k)}(x)|\leqslant CMh\quad(C\text{ 是绝对常数}),$$

$$|f^{(k)}(x+h)-f^{(k)}(x)|\leqslant 8\,Mh\log\frac{1}{h}\quad(0<h<1).$$

【证明】 设 $\|f-t_n(x)\|_C=E_n[f]$. 我们不妨假设 $t_2(x)\equiv 0$. 置

$$T_n(x)=t_{2^n}(x)-t_{2^{n-1}}(x)\quad(n=2,\ 3,\ \cdots),$$

则 $f(x)=T_2(x)+T_3(x)+\cdots$. 由于

$$|T_n(x+h)-T_n(x)|\leqslant 2E_{2^{n-1}}(f)\leqslant 4M2^{-(k+\alpha)n},$$

所以从贝恩斯坦定理，得到

$$\sum_{N+1}^{\infty}|T_n^{(k)}(x+h)-T_n^{(k)}(x)|\leqslant 8M\sum_{n=N+1}^{\infty}2^{kn-(k+\alpha)n}<\frac{8M}{2^\alpha-1}2^{-\alpha N},$$

$$\sum_{n=2}^{N}|T_n^{(k)}(x+h)-T_n^{(k)}(x)|\leqslant h\sum_{n=2}^{N}\max_x|T_n^{(k+1)}(x)|$$

$$\leqslant 4hM\sum_{n=2}^{N}2^{(k+1)n-(k+\alpha)n}$$

$$\leqslant 8Mh2^{(1-\alpha)N}.$$

设 N 适合 $2^{-N}<h\leqslant 2^{-N+1}$，则得

$$|f^{(k)}(x+h)-f^{(k)}(x)|\leqslant B_\alpha Mh^\alpha \quad (B_\alpha \text{ 只与 } \alpha \text{ 有关系}).$$

当 $E_n(f)_C\leqslant Mn^{-1-k}$ 时，$f^{(k)}(x+h)+f^{(k)}(x-h)-2f^{(k)}(x)$ 等于

$$\sum_{n=2}^{\infty}\{T_n^{(k)}(x+h)+T_n^{(k)}(x-h)-T_n^{(k)}(x)\}=\sum_{n=2}^{N}+\sum_{n=N+1}^{\infty}.$$

由中值定理，$\left|\sum_{n=2}^{N}\right|$ 不大于 $\sum_{2}^{N}h^2\max_x|T_n^{(k+2)}(x)|$，其第 n 项小于

$$2h^2E_{2^{n-1}}(f)\cdot(2^n)^{k+2}\leqslant 16Mh^2 2^{-(k+1)n+kn+2n},$$

从而 $\left|\sum_{n=2}^{N}\right|\leqslant 16Mh^2 2^N\leqslant 16\,Mh$. 其次,

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}\right|\leqslant 4M\sum_{n=N+1}^{\infty}2^{-n}<8M2^{-N}<8Mh.$$

两者相加得到

$$|f^{(k)}(x+h)+f^{(k)}(x-h)-2f^{(k)}(x)|\leqslant 24Mh.$$

在同一条件 $E_n[f]_C\leqslant Mn^{-1-k}$ 下，我们来估计 $f^{(k)}(x+h)-f^{(k)}(x)$. 我们已经证明

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}|T_n^{(k)}(x+h)-T_n^{(k)}(x)|\leqslant 8M2^{-N}<8Mh.$$

问题是在估计 $\sum_{2}^{N}|T_n^{(k)}(x+h)-T_n^{(k)}(x)|$，它小于 $4hM\sum_{2}^{N}1=4hNM$. 因此，当 $h<\frac{1}{9}$ 时,

$$|f^{(k)}(x+h)-f^{(k)}(x)|\leqslant 4hM\left\{2+\log\frac{1}{h}\right\}<8Mh\log\frac{1}{h}.$$

定理 5 证毕. 我们还要指出：从 $E_n(f)_C \leqslant Mn^{-1-k}$（$k$ 是 0 或是正整数）只能得到 $f^{(k)}(x)$ 的亚光滑性，它不含有 $f^{(k)}(x)\in \mathrm{Lip}\,1$. 举例来说：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-kn-n}\cos 2^n\left(x-\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right)$$

的话，$f^{(k)}(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{-n}\cos 2^n x$，$\left|\sum\limits_{N+1}^{\infty}2^{-n}\cos 2^n x\right|\leqslant 2^{-N}$. 当 $2^N\leqslant n<2^{N+1}$ 时，我们见到

$$|f^{(k)}(x)-t_n(x)|<\frac{2}{n},\quad E_n(f^{(k)})_C<\frac{2}{n}.$$

因此 $f^{(k)}(x)$ 是亚光滑的. 由于 $f^{(k)}(x)$ 的富理埃级数的导级数 $-\sum \sin 2^n x$ 不是富理埃级数，所以 $f^{(k)}(x)\overline{\in}\mathrm{Lip}\,1$.

结合定理 3 与定理 5, 我们可述如下的结果：

系 设 $0<\alpha<1$, $f(x)\in\mathrm{Lip}\,\alpha$ 的充要条件是 $E_n(f)_C=O(n^{-\alpha})$, 也是

$$f(x+h)+f(x-h)-2f(x)=O(h^{\alpha}).$$

最后，我们从 $f(x)$ 的性质导出共轭函数 $\tilde{f}(x)$ 的属性.

定理 6 设 $E_n(f)_C=O(n^{-\alpha-k})$（$k$ 是 0 或是正整数, $0<\alpha<1$），则 $\tilde{f}^{(k)}(x)\in\mathrm{Lip}\,\alpha$ （$\tilde{f}^{(0)}(x)\equiv\tilde{f}(x)$）. 假如 $E_n(f)_C=O(n^{-1-k})$（$k=0$ 或是正整数），那末 $\tilde{f}^{(k)}(x)$ 具有亚光滑性，它的连续模

$$\omega(t,\tilde{f})_C=O\left(t\log\frac{1}{t}\right).$$

【证明】 三角多项式 $t_n(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}t_n(t)\left\{\frac{1}{2}+\sum_1^N\cos\nu(t-x)\right\}dt$ 的共轭多项式

$$\tilde{t}_n(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t_n(t)\sum_1^N\sin\nu(t-x)\,dt$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t_n(t)\frac{\cos\frac{1}{2}(t-x)-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\sin\frac{1}{2}(t-x)}dt$$

适合

$$|\tilde{t}_n(x)|\leqslant\frac{2}{\pi}\log n\cdot\max_x|t_n(x)|.$$

因此

$$|\tilde{T}_n(x)|\leqslant\log 2^n\cdot\max|t_{2^n}(x)-t_{2^{n-1}}(x)|\leqslant n\cdot 4M2^{-(k+\alpha)n}.$$

由是可知 $\tilde{f}(x)=\sum\limits_2^\infty \tilde{T}_n(x)$ 均匀地成立. 不但如此，并且均匀地成立着

$$\tilde{f}^{(k)}(x)=\sum_{n=2}^\infty \tilde{T}_n^{(k)}(x),$$

事实上，

$$|\tilde{T}_n^{(k)}(x)|\leqslant(2\cdot 2^n)^k\max|\tilde{T}_n(x)|\leqslant 4Mn(2^{n+1})^k2^{-(k+\alpha)n},$$

$$\sum_{n=2}^\infty|\tilde{T}_n^{(k)}(x)|\leqslant 4M2^k\sum_{n=2}^\infty 2^{-\alpha n}n<\infty.$$

由于 $k\geqslant 1$ 时，

$$\tilde{f}^{(k)}(x+h)-\tilde{f}^{(k)}(x)=\sum_{n\leqslant N}+\sum_{n>N}\{\tilde{T}_n^{(k)}(x+h)-\tilde{T}_n^{(k)}(x)\}$$

的估计，可以仿照定理 5 的证明来处理，此时代替贝恩斯坦不等式而用赛干不等式，所以 $\tilde{f}^{(k)}(x)\in\mathrm{Lip}\,\alpha$. 同样，当 $\alpha=1$ 时，得到所要的结果.

再考虑 $k=0$ 的情况. 因为让 f 减去一个常数，是不影响 $E_n(f)_C$ 的，所以可假设 $\mathfrak{S}[f]$ 的常数项等于零，从而 f 的原函数 F 是个周期函数. 应用定理 3、4 和 5，有 $E_n(F)=O(n^{-1-\alpha})$. 于是，由刚证明的事实推得 $\tilde{F}'$ 存在，而且当 $0<\alpha<1$ 时，$\tilde{F}'\in\mathrm{Lip}\,\alpha$; $\alpha=1$ 时，$\tilde{F}'$ 具有亚光滑性. 显然 $\tilde{f}=\tilde{F}'$. 定理证明完毕.

结合定理 6 与定理 5 的系，我们可述如下的

系 1 当 $0<\alpha<1$ 时，$f\in\mathrm{Lip}\,\alpha$ 与 $\tilde{f}\in\mathrm{Lip}\,\alpha$ 或是都成立，或是都不成立.

这个结果包含在下述系 2 中.

系 2 设 $f(x)\in C_{2\pi}$，则有绝对常数 A 适合

$$\omega(h,\ \tilde{f})_C\leqslant A\int_0^h dt\int_t^\pi u^{-2}\omega(u,\ f)_C\,du.$$

由于右端的二重积分等于

$$\int_0^h t^{-1}\omega(t,\ f)_C\,dt+h\int_h^\pi t^{-2}\omega(t,\ f)_C\,dt,$$

末项 $J(h)$ 当 $h\to 0$ 时，等于 $o(1)$，第一项 $I(h)$ 未必存在；所以 $\tilde{f}(x)$ 未必属于 $C_{2\pi}$.

【证明】 当二重积分不存在时，系 2 是无聊的. 因此，我们假设 $t^{-1}\omega(t, f)_C$ 在[0, 1]上可以积分. 这样我们得到 $\tilde{f}$ 的勒贝格积分表达式

$$\tilde{f}(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+t)-f(x)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}dt.$$

从而

$$\tilde{f}(x+h) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+t)-f(x+h)}{2\operatorname{tg}\frac{t-h}{2}}dt.$$

由于

$$\left|-\frac{1}{\pi}\int_{-2h}^{2h}\frac{f(x+t)-f(x)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}dt\right| \leqslant \frac{2}{\pi}I(2h) \leqslant \frac{4}{\pi}I(h),$$

$$\left|-\frac{1}{\pi}\int_{-2h}^{2h}\frac{f(x+t)-f(x+h)}{2\operatorname{tg}\frac{t-h}{2}}dt\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\{I(h)+I(3h)\} \leqslant \frac{4}{\pi}I(h),$$

所以

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x+h)-\tilde{f}(x) = &-\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{-2h}+\int_{2h}^{\pi}\right)\{f(x+h)-f(x)\} \\ &\cdot\left\{\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{t-h}{2}}-\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\right\}dt \\ &+\frac{1}{\pi}\{f(x+h)-f(x)\}\left(\int_{-\pi}^{-2h}+\int_{2h}^{\pi}\frac{dt}{2\operatorname{tg}\frac{t-h}{2}}\right) \\ &+C_h I(h),\end{aligned}$$

这里 C_h 的绝对值小于 $\frac{8}{\pi}$. 第一项的绝对值小于

$$\begin{aligned}&A_1\left(\int_{-\pi}^{-2h}+\int_{2h}^{\pi}\right)\frac{\omega(|t|)h\,dt}{\left|\sin\frac{t-h}{2}\sin\frac{t}{2}\right|} \\ &\leqslant A_2\int_{2h}^{\pi}ht^{-2}\omega(t)dt < A_2 J(h),\end{aligned}$$

第二项的绝对值小于 $A_3\omega(h)$. 由于

$$\omega(h) \leqslant \omega(h)h\int_{h}^{\pi}\frac{2}{t^2}dt \leqslant 2J(h),$$

所以总结起来，我们得到所要的结果：

$$\max_{x}|\tilde{f}(x+h)-\tilde{f}(x)|\leqslant A_1I(h)+(A_2+A_3)J(h).$$

2. $L_p(0, 2\pi)$中的函数

首先考虑如下的问题：当三角多项式叙列$\{t_n(x)\}$匀敛于$f(x)$时，$f(x)\in C_{2\pi}$而未必是全连续，假如

(1) $$\|f(x)-t_n(x)\|_p\leqslant\omega(n)\to0\quad(n\to\infty,\ p>1).$$

在怎样情况下，能断言$f(x)$是一全连续函数？

定理 1 设$0<\omega(x)\ (x\geqslant1)$，$\omega(x)\downarrow$，$\int_1^\infty\omega(x)x^{-1}dx<\infty$. 假如(1)成立，那末

(2) $$\omega(f,\ t)_p\leqslant A\int_2^{\frac{2}{t}}\omega(x)dx+A\int_{\frac{1}{t}}^{\infty}\omega(x)x^{-1}dx.$$

假如(1)的右端可以除以n^{-r}(r：正整数)，那末$f^{(r)}(x)$几乎处处存在，$\omega(f^{(r)},\ t)_L$小于(2)的右端.

这是奎特(E. S. Quade)的定理(丢克数学杂志第三卷，1937).

【证明】 设$t_n(x)$满足(1)，$T_n(x)=t_{2^n}(x)-t_{2^{n-1}}(x)$. 不妨假设$t_2(x)\equiv0$，从而

$$\|f(x)-(T_1+T_2+\cdots+T_n)\|_p=\|f(x)-t_{2^n}(x)\|_p\leqslant\omega(2^n)\to0.$$

设$2^{-N}<t\leqslant2^{-N+1}$，则

(2) $$\begin{aligned}\|f(x+t)-f(x)\|_p&\leqslant\sum_{n=2}^{N}\|T_n(x+t)-T_n(x)\|_p\\&\quad+\sum_{n=N+1}^{\infty}\|T_n(x+h)-T_n(x)\|_p\\&\leqslant4t\sum_{n=2}^{N}2^n\omega(2^n)+4\sum_{n=N+1}^{\infty}\omega(2^n)\\&\leqslant4t\int_2^{2^N}\omega(x)dx+4\int_{2^N}^{\infty}\frac{\omega(x)}{x}dx.\end{aligned}$$

从而得到

$$\omega(t, f)_p \leqslant 4t\int_2^{\frac{2}{t}} \omega(x)dx + 4\int_{\frac{1}{t}}^{\infty} \frac{\omega(x)}{x} dx.$$

当$\|f(x)-t_n(x)\|_p \leqslant \omega(n)n^{-r}(r>0)$成立时，从(2)得到

$$\|f^{(r)}(x+t)-f^{(r)}(x)\|_p \leqslant 4t\sum_{n=2}^{N} 2^{n(r+1)}\omega(2^n)2^{-nr}$$

$$+4\sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{nr}\omega(2^n)n^{-nr}$$

$$\leqslant 4t\int_2^{\frac{2}{t}} \omega(x)dx + 4\int_{\frac{1}{t}}^{\infty} \omega(x)x^{-1}dx.$$

因此，$\omega(t, f^{(r)})_p$不大于最后两项的和. 至于$f^{(r)}(x)$的几乎处处存在的理由，可从级数 $\sum\int_0^x |T_n^{(r)}(u)|du$ 的收敛明白——它的和不大于$\sum\|T_n^{(r)}(x)\|_p$，应用富弼尼定理而知$\sum|T_n^{(r)}(x)|$的概收敛，从而$\sum T_n^{(r)}(x)$概收敛，其和等价于$f^{(r)}(x)$. 定理证毕.

定理 2 设$0<\alpha<1$, $p\geqslant 1$. 假如对于每一正整数n，有阶数不超过n的三角多项式$t_n(x)$适合

$$\|f(x)-t_n(x)\|_p = O(n^{-\alpha}),$$

那末$f\in \mathrm{Lip}(\alpha, p)$. 假如$\|f-t_n\|_p = O(n^{-1})$，那末

$$\omega(t, f)_p = O\left(t\log\frac{1}{t}\right).$$

【证明】 在$0<\alpha<1$的情况，置$\omega(x)=x^{-\alpha}$，从定理1得到

$$\omega(t, f)_p \leqslant A\left(t\int_2^{\frac{1}{t}} x^{-\alpha}dx + \int_{t^{-1}}^{\infty} x^{-\alpha-1}dx\right) = O(t^{\alpha}).$$

当$\alpha=1$时，$\omega(t, f)_p = O\left(t\log\frac{1}{t}\right)$也可以从定理1导出.

所宜注意的是$\|f-t_n\|_p = O(n^{-1})$不含有$f\in \mathrm{Lip}(1, p)$. 例如

$$f(x) = \sum n^{-\frac{3}{2}}\cos nx$$

的话，从

$$\|f(x)-\sum_1^n \nu^{-\frac{3}{2}}\cos \nu x\|_2 = \left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-3}\right)^{\frac{1}{2}} = O(n^{-1}),$$

和$\|f-t_n\|_2=O(n^{-1})$. 但是,当 $h>0$ 时,

$$\|f(x+h)-f(x-h)\|_2=2\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3}\sin^2 nh\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=h\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\geqslant 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 h\left(\sum_{n=1}^{[\pi/2h]} n^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}>Ah\left(\log\frac{1}{h}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

因此 $f\overline{\in}\mathrm{Lip}(1,\ 2)$.

现在证明定理 2 具备如下的"逆定理":

定理 3 假如$f\in L_p(0,\ 2\pi)$, 并且 $\omega(+0,\ f)_p=0$, 那末对于任一正整数 n, 有阶数不高于 n 的三角多项式满足

$$\|f(x)-t_n(x)\|_p\leqslant A\omega\left(\frac{1}{n};\ f\right)_p.$$

假如 f 具有 $f^{(r)}\in L_p(0,\ 2\pi)$, 那末

$$\|f(x)-t_n(x)\|\leqslant An^{-r}\omega\left(\frac{1}{n};\ f^{(r)}\right)_p.$$

【证明】 当 $f\in L_p(0,\ 2\pi)$时, 作积分

$$t_n(x)=\frac{1}{I}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x+\frac{2}{m}t\right)\left(\frac{\sin t}{t}\right)^4 dt,$$

这里 $I=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^4 dt$, $n=2m-1$. 这个积分 $t_n(x)$ 是阶数小于 $2n$ 的三角多项式(参见伐赖-普山(de la Vallée-Poussin)的«函数逼近论», 1919, § 35). 置

$$\phi_x(t)=f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x),$$

则得

$$t_n(x)-f(x)=\frac{1}{I}\int_0^{\infty}\phi_x\left(\frac{t}{m}\right)\left(\frac{\sin t}{t}\right)^4 dt,$$

从而

$$\|t_n(x)-f(x)\|_p\leqslant\int_0^{\infty}\left\|\phi_x\left(\frac{t}{m}\right)\right\|_p\left(\frac{\sin t}{t}\right)^4 dt/I.$$

由于

$$\left\|\phi_x\left(\frac{t}{m}\right)\right\|_p\leqslant 2\omega\left(\frac{2t}{m};\ f\right)_p\leqslant 4(t+1)\omega\left(\frac{1}{m};\ f\right)_p,$$

所以 $\|f_n(x)-f(x)\|_p\leqslant A\omega\left(\frac{1}{m};\ f\right)_p$. 显然，当 n 为偶数时，此关系也成立。

假如 $f^{(r)}\in L_p(0,\ 2\pi)$，那末作如下的积分：

$$t_n(x)=\frac{1}{I_n}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_x\left(\frac{t}{m}\right)\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2\left[\frac{r}{2}\right]+4}dt,$$

这里 $\psi_x(f)=\sum_{\nu=0}^{[r/2]}c_\nu f(x+2^{-\nu}2t)$，常数 C_ν 是从方程组

$$\psi_x(0)=f(x),\quad \psi_x^{(2)}(0)=\psi_x^{(4)}(0)=\cdots=\psi_x^{\left(2\left[\frac{r}{2}\right]\right)}(0)=0$$

决定，$I_n=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2\left[\frac{r}{2}\right]+4}dt$；$t_n(x)$ 是阶 $n=\left(2+\left[\frac{r}{2}\right]\right)2^{\left[\frac{r}{2}\right]}-1$ 的三角多项式. 置 $\Psi_x(t)=\psi_x(t)-\psi_x(0)+\psi_x(-t)-\psi_x(0)$，我们见到

$$\Psi_x^{(r)}(t)-\Psi_x^{(r)}(0)=[\psi_x^{(r)}(t)-\psi_x^{(r)}(0)]$$
$$+(-1)^r[\psi_x^{(r)}(-t)-\psi_x^{(r)}(0)].$$

因此，固定正数 t，成立着

$$\|\Psi_x^{(r)}(t)-\Psi_x^{(r)}(0)\|_p\leqslant\sum_{\nu=0}^{[r/2]}\frac{|c_\nu|}{2^{(\nu-1)r}}\left\|\left[f^{(r)}\left(x+\frac{2t}{2^\nu}\right)-f^{(r)}(x)\right]\right.$$
$$\left.+(-1)^r\left[f^{(r)}\left(x-\frac{2t}{2^\nu}\right)-f^{(r)}(x)\right]\right\|_p$$
$$=O(\omega(2t;\ f^{(r)})_p).$$

由于

$$\Psi_x(t)=\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{r-1}}\{\Psi_x^{(r)}(t')-\Psi_x^{(r)}(0)\}\,dt'\,dt_{r-1}\,dt_{r-2}\cdots dt_2\,dt_1,$$

所以

$$\|\Psi_x(t)\|_p\leqslant\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{r-1}}\|\Psi_x^{(r)}(t')-\Psi_x^{(r)}(0)\|_p\,dt'\,dt_{r-1}\cdots dt_1$$
$$\leqslant C\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{r-1}}\omega(2t';\ f^{(r)})\,dt'\,dt_{r-1}\cdots dt_1,$$

$$\left\|\Psi_x\left(\frac{t}{m}\right)\right\|_p\leqslant\frac{C}{m^r}\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{r-1}}\omega\left(\frac{2u}{m};\ f^{(r)}\right)_p du\,dt_{r-1}\cdots dt_1$$
$$\leqslant\frac{C}{m^r}\omega\left(\frac{1}{m};\ f^{(r)}\right)_p\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{r-1}}(2u+1)\,du\,dt_{r-1}\cdots dt_1$$
$$\leqslant\frac{Ct^r}{m^r}\omega\left(\frac{1}{m};\ f^{(r)}\right)_p.$$

现在从

$$t_n(x)-f(x)=\frac{1}{I_n}\int_0^\infty \Psi_x\left(\frac{t}{m}\right)\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{4\left[\frac{r}{2}\right]+4}dt$$

得到

$$\|t_n(x)-f(x)\|_p\leqslant\frac{C}{m^r I_n}\omega\left(\frac{1}{m};\ f^{(r)}\right)_p\int_0^\infty t^r\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2\left[\frac{r}{2}\right]+4}dt.$$

由于 $m=(n+1)/2^{-\left[\frac{r}{2}\right]}\left(2+\left[\frac{r}{2}\right]\right)$，所以上式建立着定理中的结果.

系 设 $p\geqslant1$, $0<\alpha\leqslant1$, 假如 $f(x)\in\mathrm{Lip}(\alpha,\ p)$，那末对于正整数 n, 有阶数不高于 n 的三角多项式 $t_n(x)$ 适合于 $\|t_n(x)-f(x)\|_p=O(n^{-\alpha})$.

【证明】 由于 $\omega(t;\ f)_p=O(t^\alpha)$，所以这是定理 3 在 $r=0$ 的特殊情况.

现在我们考虑如下的问题：当 $f\in L_p(0,2\pi)$ 时，$\mathfrak{S}[f]$ 的部分和 $S_n(x)\equiv S_n(x,\ f)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ 具有怎样的性质？首先讨论 $p=2$ 的情况.

定理 4 设 $f(x)\in L_2(0,\ 2\pi)$，则 $S_n(x,\ f)\doteq o\{\sqrt{\log n}\}$，函数

$$S_2^*(x)=\sup_{n>1}|S_n(x;\ f)(\log n)^{-\frac{1}{2}}|$$

满足 $\|S_2^*(x)\|_2\leqslant A\|f(x)\|_2$.

【证明】 首先从 $f\in L_2$ 导出 $S_n(x)\doteq o(\sqrt{\log n})$. 设 N 是大于 1 的一个整数，$n(x)$ 是专取整数值的阶梯函数，$2\leqslant n(x)\leqslant N$. 置

$$\frac{1}{\log n(x)}=\lambda(x),$$

对于 x, 存在 $n(x)$ 适合

$$\sup_{2\leqslant n\leqslant N}|S_n(x,\ f)(\log n)^{-\frac{1}{2}}|=\sqrt{\lambda(x)}|S_{n(x)}(x,\ f)|.$$

因此，假如我们证得

$$\|\sqrt{\lambda(x)}S_{n(x)}(x,\ f)\|_2\leqslant A\|f(x)\|_2,$$

那末，令 $N\to\infty$，我们就得到 $\|S_2^*(x)\|_2\leqslant A\|f(x)\|_2$. 由于狄里克莱核的积分 $\int_{-\pi}^{\pi}|D_{n(x)}(x)|dx$ 小于

$$\int_{|x|\leqslant\frac{1}{N}}AN\,dx+\int_{\frac{1}{N}<|x|<\pi}A|x|^{-1}dx\leqslant A+A\log N,$$

并且存在 $\phi(x)$ 适合 $2\pi\|\phi(x)\|_2=1$ 和

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{\lambda(x)}\phi(x)S_{n(x)}(x)dx=2\pi\|\sqrt{\lambda(x)}S_{n(x)}(x)\|_2$$

(利用许瓦兹的不等式成为等式的条件)，所以写着

$$\sqrt{\lambda(x)}\,\phi(x)=\psi(x),$$

我们见到

$$\begin{aligned}0<\int_{-\pi}^{\pi}S_{n(x)}(x)\psi(x)\,dx&=\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)D_{n(x)}(x-t)dt\right\}dx\\&=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)D_{n(x)}(x-t)\,dx\right\}\\&\leqslant 2\|f(t)\|_2\cdot\left\|\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)D_{n(x)}(x-t)\,dx\right\|_2.\end{aligned}$$

我们要证末了这个因子小于一个绝对常数，现在考虑它的平方：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)D_{n(x)}(x-t)dx\right\}\cdot\left\{\int_{-\pi}^{\pi}\psi(y)D_{n(y)}(y-t)dy\right\}dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\psi(y)\left\{\int_{-\pi}^{\pi}D_{n(x)}(x-t)D_{n(y)}(y-t)dt\right\}dx\,dy\\&=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\psi(y)D_{n(x,y)}(x-y)dx\,dy\end{aligned}$$

$$(n(x,\ y)=\min(n(x),\ n(y))),$$

利用 $\frac{1}{2}|uv|\leqslant\frac{1}{4}(u^2+v^2)$，上记的积分不大于

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\psi^2(x)\,|D_{n(x,y)}(x-y)|\,dx\,dy\\&\quad+\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\psi^2(y)\,|D_{n(x,y)}(x-y)|\,dx\,dy\\&\leqslant\frac{2}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\psi^2(x)A\log n(x)dx\\&=\frac{A}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\phi^2(x)dx=2A.\end{aligned}$$

我们证明了 $\|S_2^*(x)\|_2\leqslant A\|f(x)\|_2$. 由是可知 $S_2^*(x)$ 几乎处处是有限的，或是

$$S_n(x,\ f)\doteq O(\sqrt{\log n}).$$

这里的 O 可以改进为 o. 事实上,

$$\limsup_{n\to 0}\left|\frac{S_n(x, f)}{\sqrt{\log n}}\right| \leqslant \sup_{n\geqslant 2}\left|\frac{S_n(x, f)}{\sqrt{\log n}}\right|;$$

置左端为 $S_{2*}(x)$, 则从 $S_{2*}(x)\leqslant S_2^*(x)$ 得到 $\|S_{2*}(x)\|_2\leqslant A\|f(x)\|_2$. 但是假如从 $f(x)$ 减去一个三角多项式 $t_m(x)$, 我们见到 $f(x)-t_m(x)$ 的 $S_{2*}(x)$ 与 $f(x)$ 的 $S_{2*}(x)$ 相同, 因此 $\|S_{2*}(x)\|_2=0$, $S_{2*}(x)$ 几乎处处等于 0; $S_n(x; f)\doteq o(\sqrt{\log n})$.

由是, 当 $p=2$ 时, 成立着 $\|S_p^*(x)\|_p\leqslant A_p\|f(x)\|_p$. 假如 f 属于 $L_\infty(0, 2\pi)$, 比方说 $|f(x)|\leqslant 1$, 那末由于 $|S_n(x, f)|\leqslant A\log n$ $(n>1)$, 所以成立着

$$\|S_\infty^*(x)\|_\infty\leqslant A\|f(x)\|_\infty\leqslant A,$$

这里 $S_\infty^*(x)=\sup\limits_{n>1}|S_n(x, f)/\log n|$.

要证 $\|S_p^*(x)\|_p\leqslant A_p\|f(x)\|$ 当 $1<p<2$ 时成立, 我们还要引入关于线性运算的"凸性定理", 这个定理的建立, 依赖于复变函数论的福拉葛曼(Phragmén)和林特勒夫(Lindelöf)的定理: 设 $f(z)$ $(z=x+iy)$ 在闭的带域 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ 上是有界的而且是连续的, 在带域的内部是正则的. 在两边 $x=\alpha$ 和 $x=\beta$ 上, 假如 $|f(z)|\leqslant M$, 那末此关系在带域的内部也成立. 如果域内有一点 $z_0=x_0+iy_0$ $(\alpha<x_0<\beta)$ 能使 $|f(z_0)|=M$, 那末 $f(z)$ 是一个常数, 从福拉葛曼和林特勒夫的定理, 我们可以导出下述"三线定理": 设在闭的带域 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ 上的连续函数 $f(z)$ 在带域 $\alpha<x<\beta$ 上是正则的, 则当

$$|f(\alpha+iy)|\leqslant M_1,\quad |f(\beta+iy)|\leqslant M_2$$

时, 成立着 $|f(z)|\leqslant M_1^{\frac{\beta-x}{\beta-\alpha}}M_2^{\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}}$, 这里 $z=x+iy$, $\alpha<x<\beta$. 假如等式成立, 那末 $f(z)\equiv M_1^{\frac{\beta-z}{\beta-\alpha}}M_2^{\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}}$. 事实上, 函数

$$F(z)=f(z)M_1^{-\frac{\beta-z}{\beta-\alpha}}M_2^{-\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}}$$

当 $x=\alpha$ 以及 $x=\beta$ 时, $|F(z)|\leqslant 1$.

现设空间 R 中定义着 μ 测度, 就是说, 当 $E\subset R$ 时, $\mu(E)$ 可以存在(也可能不存在). 我们对于 μ 可测函数 f, 定义

$$\|f\|_{p,\mu}=\left(\int_R |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \quad (p>0).$$

简写$\|f\|_p=\|f\|_{p,\mu}$. 只取有限个数值的函数f, 称为R上的一个阶梯函数. 设S是R上一切阶梯函数所成之集, 适合$\|g\|_{\frac{p}{p-1}}=1$的S中一切函数成一函数族S_1. 现在证明

引理 设$p\geqslant 1$, 则

$$\|f\|_p=\sup_{g\in S_1}\left|\int_R fg\,d\mu\right|.$$

【证明】 由赫耳窦(Hölder)不等式,

$$\left|\int_R fg\,d\mu\right|\leqslant\left(\int|f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

函数

$$g_0=|f|^{p-1}\,\overline{\operatorname{sgn} f}\left(\int|f|^p d\mu\right)^{-\frac{p-1}{p}}$$

$$\left[\text{这里 } \operatorname{sgn} f=\frac{f}{|f|}\,(f\neq 0),\ \operatorname{sgn} 0=0\right]$$

适合$\|g_0\|_{\frac{p}{p-1}}=1$以及$\left|\int_R fg_0\,d\mu\right|=\left(\int_R|f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$. 证毕.

设两个空间R_1与R_2中, 分别定义着μ和ν测度, R_1空间上的函数f, 由线性运算Tf映照到R_2中的函数h: $h=Tf$. 线性运算的意义是: 当α_1和α_2为复数时, 等式

$$T(\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2)=\alpha_1 T(f_1)+\alpha_2 T(f_2)$$

对于R_1上的任何两个函数f_1与f_2成立. 设$q\geqslant 1$, $p\geqslant 1$. 假如

$$\|h\|_{q\nu}\leqslant M\|f\|_{p\mu}$$

对于$h=T(f)$常成立, 那末我们称T是(p, q)型的. 满足上式的最小常数M, 称为T的范数. 现在叙述关于线性运算的

凸性定理 [M. 黎斯, G. O. 讨林(Thorin)][*] 设R_1, R_2分别是具有μ, ν测度定义的有度空间. 对于R_1中一切阶梯函数, 定义着线

---

[*] 详见讨林在隆特(Lund)大学的学位论文(1948), 表题是"凸性定理, 拓广了黎斯和阿达马的定理并有应用" 1～57.

性运算 T. 设 $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ 都是[0, 1]中的数,假如 T 是 $\left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\beta_1}\right)$ 型也是 $\left(\frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\beta_2}\right)$ 型,那末当 $\alpha=(1-t)\alpha_1+t\alpha_2$, $\beta=(1-t)\beta_1+t\beta_2$, $0<t<1$ 时, T 也是 $\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right)$ 型. 如果

$$\|Tf\|_{\frac{1}{\beta_1}}\leqslant M_1\|f\|_{\frac{1}{\alpha_1}}, \quad \|Tf\|_{\frac{1}{\beta_2}}\leqslant M_2\|f\|_{\frac{1}{\alpha_2}},$$

那末

$$\|Tf\|_{\frac{1}{\beta}}\leqslant M_1^{1-t}M_2^t\|f\|_{\frac{1}{\alpha}}.$$

【证明】 固定 t, 设 R_2 上的阶梯函数 g 适合 $\|g\|_{\frac{1}{1-\beta}}=1$ 的全体为 S_1, 那末

$$\|Tf\|_{\frac{1}{\beta}}=\sup_{g\in S_1}\left|\iint_{R_2} Tf\cdot g\,d\nu\right|.$$

假设 $\|f\|_{\frac{1}{\alpha}}=1$, 对于一定的 f 和 g, 置 $I=\int_{R_2} Tf\cdot g\,d\nu$. 置

$$f=|f|e^{iu}, \quad g=|g|e^{iv},$$

引入函数 $F_z=|f|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha}}e^{iu}\ (\alpha>0)$, $G_z=|g|^{(1-\beta(z))/(1-\beta)}e^{iv}\ (\beta<1)$,

$$\Phi(z)=\int_{R_2} TF_z\cdot G_z\,d\nu,$$

我们见到 $\Phi(t)=I$. 阶梯函数 f 的值 $c_1, c_2, \cdots$ 是两两相异的, 写着 $c_j=|c_j|e^{iu_j}$, 设在 $E_j\subset R_1$ 上, f 取值 c_j, 又设 χ_j 是 E_j 的特征函数. 我们见到

$$F_z=\sum e^{iu_j}|c_j|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha}}\chi_j.$$

同样可以写出 G_z, 由于 $TF_z=\sum e^{iu_j}|c_j|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha}}T\chi_j$, 所以 $\Phi(z)$ 的形式是有限个指数函数 $a^z\,(a>0)$ 的线性组合, 系数都是常数, 从而 $\Phi(z)$ 在闭的带域 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上是有界的.

设 z 是一纯虚数, 则

$$|\Phi(z)|\leqslant\|TF_z\|_{\frac{1}{\beta_1}}\cdot\|G_z\|_{\frac{1}{1-\beta_1}}\leqslant M_1\|F_z\|_{\frac{1}{\alpha_1}}\cdot\|G_z\|_{\frac{1}{1-\beta_1}},$$

最后两个因子, 分别等于

$$\left\||f|^{\frac{\alpha_1}{\alpha}}\right\|_{\frac{1}{\alpha_1}}=\|f\|_{\frac{1}{\alpha}}^{\frac{\alpha_1}{\alpha}}=1, \quad \left\||g|^{\frac{1-\beta_1}{1-\beta}}\right\|_{\frac{1}{1-\beta_1}}=1,$$

从而 $|\Phi(z)|\leqslant M_1(x=0)$. 同样, 当 $x=1$ 时, $|\Phi(z)|\leqslant M_2$. 由三线定理,

$$|I|=|\Phi(t)|\leqslant M_1^{1-t}M_2^t,$$

从而 $\|Tf\|_{\frac{1}{\beta}}=\sup\limits_g|I|$ 满足 $\|Tf\|_{\frac{1}{\beta}}\leqslant M_1^{1-t}M_2^t\|f\|_{\frac{1}{\alpha}}$. 证明完毕.

定理 5 设 $1<p<2$, 则当 $f(x)\in L_p(0, 2\pi)$ 时,

$$S_n(x, f)\doteq o\{(\log n)^{\frac{1}{p}}\},$$

并且函数

$$S_p^*(x)=\sup_{n>1}\left|S_n(x, f)(\log n)^{-\frac{1}{p}}\right|$$

满足 $\|S_p^*(x)\|_p\leqslant A_p\|f(x)\|_p$, 假如 $p>2$, 那末函数

$$S_p^*(x)=\sup_{n>1}\left|S_n(x, f)(\log n)^{-\frac{p-1}{p}}\right|$$

满足 $\|S_p^*(x)\|_p\leqslant A\|f(x)\|_p$, A 是绝对常数.

【证明】 当 $p\geqslant 2$ 时,

$$S_p^*(x)=\sup_{n>1}\left|S_n(x, f)(\log n)^{-\frac{p-1}{p}}\right|$$

之能满足 $\|S_p^*(x)\|_p\leqslant A\|f(x)\|_p$, 是可以利用凸性定理明白的. 事实上, 后者当 $p=2$ 时成立(定理 4), 当 $p=+\infty$ 时也成立; $|f(x)|\leqslant 1$ 的话有绝对常数 A 适合 $|S_n(x)|\leqslant A\log n\ (n>1)$.

由是, 线性运算

$$g=Tf=S_{n(x)}(x, f)/\log n(x)\quad (1<n(x)\leqslant N)$$

关于 $d\mu=\log n(x)dx$ 的范数 $\|g\|_q$, 当 $q=2$ 以及 $q=\infty$ 时, 满足

$$\left\{\int_0^{2\pi}|g(x)|^q\log n(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{q}}\leqslant A_q\left(\int_0^{2\pi}|f(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

设 $A=\max(A_2, A_\infty)$, 则由线性运算的凸性定理, 上式当 $2<q<\infty$ 时也成立, 由是我们证得 $\|S_p^*(x)\|\leqslant A\|f(x)\|_p(2\leqslant p\leqslant\infty)$, 但是还有 $n(x)\leqslant N$ 的限制. 令 $N\to\infty$, 则无限制地成立着这个结果.

我们还要证明: 当 $1<p<2$ 时,

$$S_p^*(x)=\sup_{n>1}\left|S_n(x, f)(\log n)^{-\frac{1}{p}}\right|$$

适合 $\|S_p^*(x)\|_p\leqslant A_p\|f(x)\|_p$，并且 $S_n(x,f)=o((\log n)^{\frac{1}{p}})$.

首先对于幂级数来引入相应的定理. 设 $\tilde{f}$ 是 f 的共轭函数，则 $F=f+i\tilde{f}$ 的 $\mathfrak{S}[F]$ 是一幂级数. 我们将建立下述两事：

(i) 凸性定理对于幂级数成立.

(ii) $\|S_1^*(x;F)\|_1\leqslant A\|F(x)\|_1$.

这里利用(i)和(ii)完成定理5的证明. 对于幂级数 F 来说，关系 $\|S_p^*(x,F)\|_p\leqslant A_p\|F(x)\|_p$ 当 $p=1$ 时成立((ii))，当 $p=2$ 时也成立. 由幂级数的凸性定理，我们证明此关系当 $1\leqslant p\leqslant 2$ 时成立：由于

$$\|S_p^*(x;f)\|_p\leqslant\|S_p^*(x;F)\|_p\leqslant A_p\|F(x)\|_p\quad(p>1),$$

$$\|F(x)\|_p\leqslant\|f\|_p+\|\tilde{f}_p\|_p\leqslant B_p\|f\|_p\ (\text{第三章}\ \S 6\ \text{引理}\ 1),$$

所以 $\|S_p^*(x;f)\|_p\leqslant A_pB_p\|f\|_p$.

现在建立关于

幂级数的凸性定理 设 $\alpha_1>0$, $\alpha_2>0$, $0\leqslant\beta_1\leqslant 1$, $0\leqslant\beta_2\leqslant 1$. 设线性运算 TP 对于一切多项式 $P(z)$ 有意义. 假如

$$(*)\qquad \|TP\|_{\frac{1}{\beta_1}}\leqslant M_1\|P\|_{\frac{1}{\alpha_1}},\quad \|TP\|_{\frac{1}{\beta_2}}\leqslant M_2\|P\|_{\frac{1}{\alpha_2}},$$

那末当 $0<t<1$, $\alpha=\alpha_1(1-t)+\alpha_2 t$, $\beta=\beta_1(1-t)+\beta_2 t$ 时，成立着

$$(\dagger)\qquad \|TP\|_{\frac{1}{\beta}}\leqslant K_{\alpha_1,\alpha_2}M_1^{1-t}M_2^t\|P\|_{\frac{1}{\alpha}}.$$

并且当 $F(z)\in H^{\frac{1}{\alpha}}$——$\int_0^{2\pi}|F(re^{i\theta})|^{\frac{1}{\alpha}}d\theta=O(1)\ (r\to 1)$——时，

$$\|TF\|_{\frac{1}{\beta}}\leqslant K_{\alpha_1,\alpha_2}M_1^{1-t}M_2^t\|F\|_{\frac{1}{\alpha}}.$$

【证明】 从(*)我们可以拓广 TF 使之对于 $H^{\frac{1}{\alpha_1}}$ 以及 $H^{\frac{1}{\alpha_2}}$ 中的任一 F 有意义：当 $F\in H^{\frac{1}{\alpha_j}}$ 时，$\|TF\|_{\frac{1}{\beta_j}}\leqslant M_j\|F\|_{\frac{1}{\alpha_j}}$ $(j=1,2)$. 假如 $F\in H^{\frac{1}{\alpha_1}}\cdot H^{\frac{1}{\alpha_2}}$，那末 TF 具有唯一的意义：事实上，当 $\alpha_1\leqslant\alpha_2$ 时，$H^{\frac{1}{\alpha_1}}\subseteq H^{\frac{1}{\alpha_2}}$. 假如 $F\in H^{\frac{1}{\alpha_1}}$，那末存在 $\{P_n\}$ 适合 $\|F-P_n\|_{\frac{1}{\alpha_1}}\to 0$，从而 $\|F-P_n\|_{\frac{1}{\alpha_2}}\to 0$，由是

$$\|T(P_n-F)\|_{\frac{1}{\beta_j}}\to 0\quad(j=1,2),$$

$\{TP_n\}$中必有子列 $\{TP_{n_j}\}$概敛，不管 $j=1$ 或是 2, TF 是它的极限，所以 TF 的意义是唯一的.

设正整数 $n>\alpha_2\geqslant\alpha_1$. 设 $g_1, \cdots, g_n$ 是$[0, 2\pi]$ 上的复数值的阶梯函数,则得 $|z|<1$ 上的解析函数

$$F_j(z)<\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}g_j(t)dt \quad (j=1, 2, \cdots, n).$$

以 $T[F_1F_2\cdots F_n]$ 为多重线性运算 $T^*[g_1, \cdots, g_n]$ 的值:

$$T^*[g_1, g_2, \cdots, g_n]=T[F_1F_2\cdots F_n].$$

我们知道函数

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}f(t)dt$$

属于 $H^p(p>1)$ 的充要条件是 $f\in L_p(0, 2\pi)$. 当 $f\in L_p$ 时, $\|F\|_p\leqslant A_p\|f\|_p$. 由于 $F_j\in H^{\frac{n}{\alpha_1}}$, 所以利用赫耳窦不等式, 我们得到 $F_1F_2\cdots F_n\in H^{\frac{1}{\alpha_1}}$. 从而

$$\begin{aligned}\|T^*[g_1, g_2, \cdots, g_n]\|_{\frac{1}{\beta_1}}&\leqslant M_1\|F_1F_2\cdots F_n\|_{\frac{1}{\alpha_1}}\\&\leqslant M_1\|F_1\|_{\frac{n}{\alpha_1}}\cdot\|F_2\|_{\frac{n}{\alpha_1}}\cdots\|F_n\|_{\frac{n}{\alpha_1}}\\&\leqslant M_1A^n_{\frac{n}{\alpha_1}}\|g_1\|_{\frac{n}{\alpha_1}}\cdot\|g_2\|_{\frac{n}{\alpha_1}}\cdots\|g_n\|_{\frac{n}{\alpha_1}}.\end{aligned}$$

同样, $\|T^*[g_1, g_2, \cdots, g_n]\|_{\frac{1}{\beta_2}}\leqslant M_2A^n_{\frac{n}{\alpha_2}}\|g_1\|_{\frac{n}{\alpha_2}}\cdot\|g_2\|_{\frac{n}{\alpha_2}}\cdots\|g_n\|_{\frac{n}{\alpha_2}}$. 由是,对于一切阶梯函数 $g_1, g_2, \cdots, g_n$, 多重线性运算 $T^*(g_1, g_2, \cdots, g_n)$ 有一定意义; T^* 是$\left(\frac{n}{\alpha_1}, \frac{n}{\alpha_1}, \cdots, \frac{n}{\alpha_1}; \frac{1}{\beta_1}\right)$型,也是$\left(\frac{n}{\alpha_2}, \frac{n}{\alpha_2}, \cdots, \frac{n}{\alpha_2}; \frac{1}{\beta_2}\right)$型. 一般地说,当 $T[f_1, f_2, \cdots, f_n]$ 同时是$\left(\frac{1}{\alpha_1'}, \frac{1}{\alpha_2'}, \cdots, \frac{1}{\alpha_n'}; \frac{1}{\beta'}\right)$和$\left(\frac{1}{\alpha_1''}, \frac{1}{\alpha_2''}, \cdots, \frac{1}{\alpha_n''}; \frac{1}{\beta''}\right)$两种型态时, $0\leqslant\alpha_j'\leqslant1$, $0\leqslant\beta_j'\leqslant1$, $0\leqslant\alpha_j''\leqslant1$, $0\leqslant\beta_j''\leqslant1$ 的话, $T(f_1, \cdots, f_n)$也属于$\left(\frac{1}{\alpha_1}, \cdots, \frac{1}{\alpha_n}; \frac{1}{\beta}\right)$型,这里

$$\alpha_j=(1-t)\alpha_j'+t\alpha_j'', \quad \beta=(1-t)\beta'+t\beta'' \quad (0<t<1; j=1, 2, \cdots, n)$$

并且成立着$\|T[f_1, \cdots, f_n]\|_{\frac{1}{\beta}}\leqslant M_1^{1-t}M_2^t\|f_1\|_{\frac{1}{\alpha_1}}\cdots\|f_n\|_{\frac{1}{\alpha_n}}$. 假如

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n>0,$$

那末 $T(f_1, \cdots, f_n)$连续延拓到 $L^{\frac{1}{\alpha_1},\mu_1}\times\cdots\times L^{\frac{1}{\alpha_n},\mu_n}$, 这里 $L^{p,\mu}(E)$表示 $\int_E|f|^p d\mu<\infty$ 的一切函数 f. 这个多重线性运算的凸性定理的证明, 类似于单重线性运算 $T[f]$的凸性定理的证明, 这里不详述.

我们见到 $T^*[g_1,\cdots, g_n]$的意义可以拓广到 $L^{\frac{n}{\alpha_2}}\times L^{\frac{n}{\alpha_2}}\times\cdots\times L^{\frac{n}{\alpha_1}}$ 而保持不等式

$$\|T^*[g_1, g_2, \cdots, g_n]\|_{\frac{1}{\beta}}\leqslant(A^{1-t}_{n/\alpha_1}\cdot A^t_{n/\alpha_2})^n M_1^{1-t}M_2^t\prod_{j=1}^n\|g_j\|_{\frac{n}{\alpha}}.$$

但是, 当 $g_j\in L^{\frac{n}{\alpha_2}}(j=1, 2, \cdots, n)$时, $F_j(z)\in H^{\frac{n}{\alpha_2}}$; 从而 $F_1F_2\cdots F_n\in H^{\frac{1}{\alpha_2}}$, $T(F_1\cdots F_n)$有了意义. 这样, 我们可以定义

$$T^*[g_1, g_2, \cdots, g_n]=T[F_1F_2\cdots F_n].$$

事实上, 当 $g_j\in H^{\frac{n}{\alpha_2}}$ 时, 有阶梯函数列 $\{g_j^{(m)}\}$ 适合于

$$\|g_j^{(m)}-g_j\|_{\frac{n}{\alpha_2}}=o(1),$$

从而

$$\|T^*(g_1, \cdots, g_n)-T^*(g_1^{(m)}, \cdots, g_n^{(m)})\|_{\frac{1}{\beta_2}}\to 0\quad(m\to\infty).$$

事实上, 上式左端不大于

$$\begin{aligned}&\|T[g_1, \cdots, g_n]-T[g_1^{(m)}, g_2, \cdots, g_n]\|_{\frac{1}{\beta_2}}\\&+\|T[g_1^{(m)}, g_2, \cdots, g_n]-T[g_1^{(m)}, g_2^{(m)}, \cdots, g_n]\|_{\frac{1}{\beta}}\\&+\cdots+\|T[g_1^{(m)}, g_2^{(m)}, \cdots, g_{n-1}^{(m)}, g_n]\\&-T[g_1^{(m)}, g_2^{(m)}, \cdots, g_n^{(m)}]\|_{\frac{1}{\beta}},\end{aligned}$$

其中各项都是 $o(1)$. 另一方面, 从

$$F_j(z)-F_j^{(m)}(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}(g_j(t)-g_j^{(m)}(t))dt$$

得到

$$\|F_j(z)-F_j^{(m)}(z)\|_{\frac{n}{\alpha_2}}=o(1),$$

$$\|F_j^{(m)}\|_{\frac{n}{\alpha_2}}\leqslant A_{\frac{n}{\alpha_2}}\|g_j^{(m)}\|_{\frac{n}{\alpha_2}}=O(1).$$

由是可知

$$\|T[F_1F_2\cdots F_n]-T[F_1^{(m)}F_2^{(m)}\cdots F_n^{(m)}]\|_{\frac{1}{\beta_1}}=o(1).$$

结合到上面 $T^*(g_1, \cdots, g_n)$ 的逼近关系，我们得到

$$T^*(g_1, g_2, \cdots, g_n)=T[F_1F_2F_3\cdots F_n].$$

这样，我们见到 $\|T^*(g_1, g_2, \cdots, g_n)\|_{\frac{1}{\beta}}$ 的估计，当 $g_j\in L^{\frac{n}{\alpha}}$ 时，具有前述的上限

$$(A^{1-t}_{\frac{n}{\alpha_1}}\ A^t_{\frac{n}{\alpha_2}})^n\prod_{j=1}^n\|g_j\|_{\frac{n}{\alpha}},$$

这里 $\alpha_1\leqslant\alpha\leqslant\alpha_2$.

任一多项式 $P(z)$ 在 $|z|<1$ 上可以分解为勃拉许克(Blaschke)乘积 $B(z)$ 和一个没有零点的函数 $G(z)$ 的乘积：

$$P(z)=B(z)G(z)\quad(|z|<1).$$

写着

$$F_1=BG^{\frac{1}{n}},\quad F_j=G^{\frac{1}{n}}\quad(j=2, \cdots, n),$$

我们见到 $P(z)=F_1F_2\cdots F_n$. 我们常设 $G(0)=1$, 我们也不妨假设 $P(0)$ 是实数，因此 $B(0)$ 是一实数，那末 $F_j(0)$ 都是实数. $F_j(z)$ ($|z|<1$)是有界，实数 $F_j(0)$ 等于

$$\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}g_j(t)dt\right]_{z=0}\quad(g_j(t)\in L^{\frac{n}{\alpha}}),$$

从而

$$F_j(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}g_j(t)dt$$

中的 $g_j(t)$ 是实值函数. 由是

$$T^*[g_1, \cdots, g_n]=T[F_1F_2\cdots F_n],$$

$$\|TP\|_{\frac{1}{\beta}}=\|T[F_1F_2\cdots F_n]\|_{\frac{1}{\beta}}=\|T^*[g_1, \cdots, g_n]\|_{\frac{1}{\beta}}$$

$$\leqslant(A^{1-t}_{\frac{n}{\alpha_1}}A^t_{\frac{n}{\alpha_2}})^n M_1^{1-t}M_2^t\prod_{j=1}^n\|g_j\|_{\frac{n}{\alpha}}.$$

最后的乘积不大于

$$\prod_j\left\{\int_0^{2\pi}|F_j(e^{it})|^{\frac{n}{\alpha}}dt\right\}^{\frac{\alpha}{n}}=\prod_{j=1}^n\left\{\int_0^{2\pi}|G(e^{it})|^{\frac{n}{\alpha}}dt\right\}^{\frac{\alpha}{n}}=(2\pi)^\alpha\|P\|_{\frac{1}{\alpha}}.$$

置 $K=(2\pi)^{\alpha}\max\{A^{n}_{\frac{n}{\alpha_1}},\ A^{n}_{\frac{n}{\alpha_2}}\}$，就得到$\|TP\|_{\frac{1}{\beta}}\leqslant KM_1^{1-t}M_2^t\|P\|_{\frac{1}{\alpha}}$.

要完成定理5的证明，还要对于幂级数 $F(z)=\sum\limits_0^\infty c_nz^n(|z|<1)$ 建立如下的不等式：

$$\|S_n^*(x;\ F)\|_1\leqslant A\|F(z)\|_1.$$

现在我们来证明这个不等式. 设 $B(z)$ 是 $F(z)$ 的勃拉许克乘积，$F(z)=B(z)G(z)$，那末 $G(z)\neq 0$ $(|z|<1)$. 假如 $B(z)\not\equiv 1$，那末 $F(z)=G(z)+[B(z)-1]G(z)$ 的两项在$|z|<1$上都没有零点，因此，我们可以假设 $F(z)\neq 0(|z|<1)$ 来建立所要的不等式.

设
$$F(z)=G^2(z),\ G(z)\neq 0,\ G(z)=\sum d_nz^n,$$

$$\sigma_n^\alpha(z)\equiv\sigma_n^\alpha(z,\ G)=\sum_{\nu=0}^n(\alpha)_{n-\nu}d_\nu z^\nu/(\alpha)_n.$$

由于

$$\sigma_n^{\alpha-1}(z,\ G)-\sigma_n^\alpha(z,\ G)=\frac{1}{\alpha(\alpha)_n}\sum_{\nu=0}^n(\alpha-1)_{n-\nu}\nu\,d_\nu z^\nu,$$

所以——写着 $z=e^{i\theta}$——

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\sigma_n^{-\frac{1}{2}}(z)-\sigma_n^{\frac{1}{2}}(z)|^2d\theta$$

$$=\frac{4}{\left(\frac{1}{2}\right)_n^2}\sum_{\nu=0}^n\left(\nu\left(-\frac{1}{2}\right)_{n-\nu}\right)^2|d_\nu|^2$$

$$\leqslant A(n+1)^{-1}\sum_{\nu=0}^n|d_\nu\nu|^2(n-\nu+1)^{-1}.$$

设 $l_n=[\log(n+2)]^{-1}$，则因

$$\sum_{n=0}^\infty\frac{l_n}{(n+1)^2}\sum_{\nu=0}^n|\nu d_\nu|^2(n-\nu+1)^{-1}$$

$$=\sum_{\nu=1}^\infty\nu^2|d_\nu|^2\sum_{n=\nu}^\infty\frac{l_n}{(n+1)^2(n-\nu+1)}$$

$$\leqslant\sum_{\nu=1}^\infty\nu^2|d_\nu|^2\left\{l_\nu(\nu+1)^{-2}\sum_{n=\nu}^{2\nu}\frac{1}{n-\nu+1}+\sum_{n=2\nu+1}^\infty\frac{l_n}{n^3}\right\}$$

$$\leqslant A\sum_{\nu=1}^\infty|d_\nu|^2,$$

所以

$$\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\sigma_n^{-\frac{1}{2}}(e^{i\theta})-\sigma_n^{\frac{1}{2}}(e^{i\theta})|^2}{(n+1)\log(n+2)}d\theta\leqslant A\int_0^{2\pi}|G(e^{i\theta})|^2d\theta.$$

利用恒等式 $S_n^\alpha(z)=(\alpha)_n\sigma_n^\alpha(z)$，我们见到

$$|S_n(z;\ F)|=\left|\sum_{\nu=0}^{n}S_\nu^{-\frac{1}{2}}(z,\ G)S_{n-\nu}^{-\frac{1}{2}}(z,\ G)\right|\leqslant\sum_{\nu=0}^{n}|S_\nu^{-\frac{1}{2}}(z,\ G)|^2$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n}\left|\left(-\frac{1}{2}\right)_\nu\sigma_\nu^{-\frac{1}{2}}(z,\ G)\right|^2$$

$$\leqslant A\sum_{\nu=0}^{n}\frac{|\sigma_\nu^{-\frac{1}{2}}-\sigma_\nu^{\frac{1}{2}}|^2}{\nu+1}+A\sum_{\nu=0}^{n}\frac{|\sigma_\nu^{\frac{1}{2}}|^2}{\nu+1}.$$

置 $\phi^2(\theta)=\sum_0^\infty|\sigma_n^{-\frac{1}{2}}(e^{i\theta})-\sigma_n^{\frac{1}{2}}(e^{i\theta})|^2(n+1)^{-1}[\log(n+2)]^{-1}$，那末上式右端第一项不大于 $A\phi^2(\theta)\log(n+2)$．容易证明

$$\int_0^{2\pi}\left\{\sup_n|\sigma_n^{\frac{1}{2}}(e^{i\theta},\ G)|\right\}^2d\theta\leqslant A\int_0^{2\pi}|G(e^{i\theta})|^2d\theta,$$

由于

$$\sum_{\nu=0}^{n}\frac{|\sigma_\nu^{\frac{1}{2}}(e^{i\theta},\ G)|^2}{\nu+1}\leqslant[\sup|\sigma_n^{\frac{1}{2}}(e^{i\theta},\ G)|]^2\sum_0^n\frac{1}{\nu+1},$$

所以

$$\|S_n^*(e^{i\theta},\ F)\|_1\leqslant A\|S_n(e^{i\theta},\ F)[\log(n+2)]^{-1}\|_1$$

$$\leqslant A\|\phi^2(\theta)\|_1\leqslant A\|G^2\|_1\leqslant A\|F(x)\|_1.$$

证明完毕．

定理 5 的注 当 $f(x)\in L(0,\ 2\pi)$时，$S_n(x;\ f)\doteq o(\log n)$虽成立，但是函数

$$S_1^*(x)=\sup_{n>1}|S_n(x;\ f)/\log n|$$

未必属于 $L(0,\ 2\pi)$．

事实上，当 x 是 f 的一个勒贝格点时，容易证明

$$S_n(x,\ f)=o(\log n).$$

另一方面，设

$$\lambda_n=1/\log\log n\quad(n>2),\quad\lambda_0=\lambda_1=1,$$

则

$$f(x)=\frac{1}{2}\lambda_0+\sum_1^\infty\lambda_n\cos nx$$

的部分和

$$S_n(x)=\sum_{0}^{n-2}(\nu+1)\Delta^2\lambda_\nu K_\nu(x)+n\Delta\lambda_{n-1}K_{n-1}(x)+\lambda_n D_n(x)$$

$$\geqslant\lambda_n D_n(x)\geqslant\frac{1}{\log\log n}\frac{\sin nx}{x}+o(1).$$

当 $n=\left[\frac{\pi}{2x}\right]$ 时,

$$\frac{S_n(x)}{\log\frac{1}{x}}\geqslant\frac{1}{x\log\frac{1}{x}\log\log\frac{1}{x}}+o(1)\in L\left(0,\ \frac{1}{2}\right).$$

3. $L_p(0,\ 2\pi)$中的幂级数与其相关联的正值函数[*)]

假如幂级数 $F(z)=\sum_0^\infty c_n z^n(z=re^{i\theta})$的收敛半径是1, 那末级数 $\sum_0^\infty c_n e^{in\theta}$ 在适当情况下, 是一个勒贝格-富理埃级数. 设$\{n_k\}$是一个自然数列, 当 $n_{k+1}/n_k>\alpha>1$ 对于一切 k 成立时, 称$\{n_k\}$是一个跃进的数列; 假如 $n_{k+1}/n_k=O(1)$, 那末称$\{n_k\}$是一个不飞跃的数列. 显然, 跃进的数列也可以是不飞跃的. 当$\{n_k\}$是不飞跃而跃进的时候, 我们定义

$$\Delta_0=c_0,\ \Delta_k(\theta)=c_{n_{k-1}+1}e^{i(n_{k-1}+1)\theta}+\cdots+c_{n_k}e^{in_k\theta}\quad(k>0).$$

当 $\sum c_\nu e^{i\nu\theta}\in L_p(0,\ 2\pi)\ (p>1)$时, 我们将证函数

$$\gamma(\theta)\equiv\gamma(\theta,\ F)=\left(\sum_0^\infty|\Delta_k(\theta)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

的存在. 记 $\sum c_\nu e^{i\nu\theta}$ 的部分和以及$(C,\ 1)$平均分别为 $S_n(\theta)$和 $\sigma_n(\theta)$,

$$\gamma_1(\theta)\equiv\gamma_1(\theta,\ F)=\left(\sum_{k=1}^\infty|S_{n_k}(\theta)-\sigma_{n_k}(\theta)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\sum_{k=1}^\infty\frac{|S'_{n_k}(\theta)|^2}{(1+n_k)^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

函数 $\gamma_1(\theta)$ 在适当的情况下存在, 当 $\gamma_1(\theta)$存在且 $\sum c_n e^{in\theta}$ 是 $f(\theta)$的富理埃级数时, 我们见到

$$S_{n_k}(\theta)-\sigma_{n_k}(\theta)\to 0,\quad \sigma_{n_k}(\theta)\to f(\theta),$$

---

*) 参阅齐革蒙特的《三角级数论》第十五章.

因此 $S_{n_k}(\theta)\to f(\theta)$，假如 $\{n_k\}=\{1, 2, 3, \cdots\}$，那末当 $\sum|c_n|^2<\infty$ 时，函数

$$\gamma_2(\theta)\equiv\gamma_2(\theta, F)=\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{|S_\nu(\theta)-\sigma_\nu(\theta)|^2}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}$$

存在(除开一个零集)．事实上，由于

$$\begin{aligned}&\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2\nu\pi}\int_0^{2\pi}|S_\nu(\theta)-\sigma_\nu(\theta)|^2d\theta\\&=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu(\nu+1)^2}\sum_{k=1}^{\nu}k^2|c_k|^2\\&=\sum_{k=1}^{\infty}k^2|c_k|^2\sum_{\nu=k}^{\infty}\frac{1}{\nu(\nu+1)^2}\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2<\infty,\end{aligned}$$

所以从富弼尼的定理，$\gamma_2(\theta)$ 几乎处处存在．

本节的主要定理如下：

定理 设 $1<p<\infty$，$F(z)=\sum_0^\infty c_\nu z^\nu$ 在 $|z|<1$ 上是正则的，假如

$$n_{k+1}/n_k>\alpha>1,$$

$$f(\theta)=F(e^{i\theta})=\lim_{r\to1-0}F(re^{i\theta})\in L_p(0, 2\pi),$$

那末存在如下的正数 C_p, C'_p, $C_{p,\alpha}$, $C'_{p,\alpha}$：

$$\begin{aligned}&C_p\|f(\theta)\|_p\leqslant\|\gamma_2(\theta)\|_p\leqslant C'_p\|f(\theta)\|_p,\\&C_{p,\alpha}\|f(\theta)\|_p\leqslant\|\gamma_1(\theta)\|_p\leqslant C'_{p,\alpha}\|f(\theta)\|_p,\\&C_{p,\alpha}\|f(\theta)\|_p\leqslant\|\gamma(\theta)\|_p\leqslant C'_{p,\alpha}\|f(\theta)\|_p;\end{aligned}$$

对于 $C_p\|f\|_p\leqslant\|\gamma_2\|_p$ 和 $C_{p,\alpha}\|f\|_p\leqslant\|\gamma_1\|_p$ 的成立还要添加条件 $c_0=F(0)=0$．这里

$$\|f\|_p^p=\int_0^{2\pi}|f(\theta)|^p d\theta.$$

引理 1 设 $1\leqslant p<\infty$．当 $\varphi\in L^p(a, b)$ 时，有线性算子 T 使

$$T(\varphi)=\psi\quad(\psi=\psi(y),\ a'\leqslant y\leqslant b'),$$

φ 和 ψ 都是实值函数，记

$$\|\varphi\|_p^p=\int_a^b|\varphi|^p dx,\quad \|\psi\|_p^p=\int_{a'}^{b'}|\psi|^p dy,$$

假如 $\|\psi\|_p\leqslant M\|\varphi\|_p$($M$ 与 φ 无关系)，$\psi_j=T(\varphi_j)$，那末

$$\|\sqrt{\psi_1^2+\psi_2^2+\cdots+\psi_n^2}\|_p\leqslant M\|\sqrt{\varphi_1^2+\varphi_2^2+\cdots+\varphi_n^2}\|_p.$$

【证明】 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 n 维欧几里得空间中的一组方向角，则 $(\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cdots, \cos\alpha_n)$ 是 n 维单位球 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ 上的一点. 假如 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ 都是实值函数，那末向量 $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ 与半径 $(\cos\alpha_1, \cdots, \cos\alpha_n)$ 形成一角 δ. 又设 $(\psi_1, \cdots, \psi_n)$ 与 $(\cos\alpha_1, \cdots, \cos\alpha_n)$ 之间的角为 δ', 则

$$\varphi_1\cos\alpha_1+\cdots+\varphi_n\cos\alpha_n=\Phi\cos\delta,$$

$$\psi_1\cos\alpha_1+\cdots+\psi_n\cos\alpha_n=\Psi\cos\delta',$$

这里 $\Phi^2=\varphi_1^2+\cdots+\varphi_n^2$, $\Psi^2=\psi_1^2+\cdots+\psi_n^2$.

由于 $\sum\psi_\nu\cos\alpha_\nu=T(\sum\varphi_\nu\cos\alpha_\nu)$, 所以

$$\int_{a'}^{b'}\left|\sum\psi_\nu\cos\alpha_\nu\right|^p dy\leqslant M^p\int_a^b\left|\sum\varphi_\nu\cos\alpha_\nu\right|^p dx.$$

两边在 $x_1^2+\cdots+x_n^2=1$ 上积分，而交换积分的次序，就得到

$$\int_{a'}^{b'}|\Psi|^p\int_{\sum x_j^2=1}|\cos\delta'|^p\,d\sigma\,dy\leqslant M^p\int_a^b|\Phi|^p\int_{\sum x_j^2=1}|\cos\delta|^p\,d\sigma\,dx$$

由于 $\int|\cos\delta'|^p d\sigma=\int|\cos\delta|^p d\sigma$, 所以

$$\int_a^b|\Psi|^p dy\leqslant M^p\int_a^b|\Phi|^p dx.$$

乘 $\dfrac{1}{p}$ 次方，就得所要的结果. 引理 1 证毕.

系 1 当 ϕ_j 取复数值时，引理 1 中的不等式仍成立.

【证明】 设 $\phi_j=\phi_j'+i\phi_j''$, $\psi_j'=T\phi_j'$, $\psi_j''=T\phi_j''$, 则

$$|\phi_j|^2=\phi_j'^2+\phi_j''^2,\quad |\psi_j|^2=\psi_j'^2+\psi_j''^2,$$

由是即知 $\|\sqrt{|\psi_1|^2+\cdots+|\psi_n|^2}\|_p\leqslant M\|\sqrt{|\phi_1|^2+|\phi_2|^2+\cdots+|\phi_n|^2}\|$ 成立.

系 2 设 $\bar{f}_j$ 是 f_j 的共轭函数，$f_j\in L_p(1<p<\infty)$, 则

$$\|\sqrt{|\bar{f}_1|^2+\cdots+|\bar{f}_n|^2}\|_p\leqslant A_p\|\sqrt{|f_1|^2+\cdots+|f_n|^2}\|_p.$$

引理 2 设 $f_1, f_2, \cdots, f_N$ 都是 $L_p(0, 2\pi)$ 中的周期函数，$1<p<\infty$. 写着 $S_n(f_j)=S_{j,n}$, 那末当 $n_1, \cdots, n_j, \cdots$ 是自然数时，

$$I^{\frac{1}{p}} = \| \sqrt{S_{1n_1}^2 + S_{2n_2}^2 + \cdots + S_{Nn_N}^2} \|_p$$
$$\leqslant A_p \| \sqrt{|f_1|^2 + |f_2|^2 + \cdots + |f_N|^2} \|_p.$$

【证明】 将 $S_n(f, x)$的末项乘以 $\frac{1}{2}$ 后，改写为 $S_n^*(f, x)$，那末

$$S_n^*(f, x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin n(t+x)\cos nx - \cos n(t+x)\sin nx}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}} dt.$$

简写 $f(x)\cos nx$ 和 $f(x)\sin nx$ 分别为 $g_n(x)$ 和 $h_n(x)$，那末

$$S_n^*(f, x) = \tilde{g}_n(x)\sin nx - \tilde{h}_n(x)\cos nx,$$
$$S_n^*(f, x) - f(x) = -\tilde{g}_n(x)\cos nx - \tilde{h}_n(x)\sin nx.$$

由是记 $S_{j,n}$ 的末项的一半为 $\alpha_{j,n}$，则

$$\alpha_{j,n}(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_j(t)\cos n(t-\theta)\, dt,$$
$$S_{j,n}(\theta) = \tilde{g}_{j,n}(\theta)\sin n\theta - \tilde{h}_{j,n}\cos n\theta + \alpha_{j,n}(\theta).$$

简写 g_{j,n_j}, h_{j,n_j}, α_{j,n_j} 为 g_j, h_j, α_j，那末从

$$|S_{j,n}| \leqslant |\tilde{g}_j| + |\tilde{h}_j| + |\alpha_j|,$$
$$(\sum |S_{j,n_j}|^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant (\sum |\tilde{g}_j|^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum |\tilde{h}_j|^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum |\alpha_j|^2)^{\frac{1}{2}},$$

得到

$$I \leqslant 3^{p-1}\left\{\int_0^{2\pi} (\sum |\tilde{g}_j|^2)^{\frac{p}{2}} d\theta + \int_0^{2\pi} (\sum |\tilde{h}_j|^2)^{\frac{p}{2}} d\theta + \int_0^{2\pi} (\sum |\alpha_j|^2)^{\frac{p}{2}} d\theta\right\}.$$

由是从引理 1 的系 2 得到

$$\int_0^{2\pi} (\sum |\tilde{g}_j|^2)^{\frac{p}{2}} d\theta \leqslant A_p^p \int_0^{2\pi} (\sum |f_j|^2)^{\frac{p}{2}} d\theta.$$

对于 $\tilde{h}_j$ 可得同样的不等式．由于

$$|\alpha_j(\theta)|^2 \leqslant \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_j(t)|\, dt\right)^2,$$

所以利用敏可夫斯基不等式，我们得到

$$\int_0^{2\pi} (\sum |\alpha_j(\theta)|^2)^{\frac{p}{2}} d\theta \leqslant \int_0^{2\pi} (\sum |f_j(\theta)|^2)^{\frac{p}{2}} d\theta.$$

总结起来,

$$I\leqslant 3^{p-1}(2A_p^1+1)\int_0^{2\pi}(\sum|f_j(\theta)|^2)^{\frac{p}{2}}d\theta$$

$$\leqslant A_p^p\int_0^{2\pi}(\sum|f_j(\theta)|^2)^{\frac{p}{2}}d\theta.$$

引理 2 证毕.

$S_n(\theta)=\sum_0^n c_\nu e^{i\theta\nu}$ 的话,我们写着 $S_n(\rho,\theta)=\sum_0^n c_\nu\rho^\nu e^{i\nu\theta}$. 下述引理中,就有这种写法.

引理 3 设 $f_1, f_2, \cdots, f_N$ 都是 $L^p(0, 2\pi)\ (1<p<\infty)$ 中的周期函数, $0\leqslant\rho_j<1$. 那末

$$\int_0^{2\pi}\left(\sum_{j=1}^N|S_{j,n_j}(\rho_j,\theta)|^2\right)^{\frac{p}{2}}d\theta\leqslant A_p^p\int_0^{2\pi}\left(\sum_{j=1}^N|f_j(\theta)|^2\right)^{\frac{p}{2}}d\theta.$$

当区间 δ_j 落在 $(\rho_j, 1)$ 中时,上式左端的积分 I 不大于

$$A_p^p\int_0^{2\pi}\left(\sum_{j=1}^N\frac{1}{|\delta_j|}\int_{\delta_j}|f_j(\rho,\theta)|^2d\rho\right)^{\frac{p}{2}}d\theta.$$

【证明】 对于任一凸函数 $\phi(x)\ (a<x<b)$, $x_j\in(a, b)$ 的话, 成立着颜善不等式

$$\phi\left(\frac{p_1x_1+\cdots+p_nx_n}{p_1+\cdots+p_n}\right)\leqslant\frac{p_1\phi(x_1)+\cdots+p_n\phi(x_n)}{p_1+\cdots+p_n}\quad(p_j>0).$$

因此

$$|S_{j,n_j}(\rho_j,\theta)|^2=|(1-\rho_j)\sum_{\nu=0}^{n_j-1}S_{j,\nu}(\theta)\rho_j^\nu+S_{j,n_j}(\theta)\rho_j^{n_j}|^2$$

$$\leqslant(1-\rho_j)\sum_{\nu=0}^{n_j-1}|S_{j,\nu}(\theta)|^2\rho_j^\nu+|S_{j,n_j}(\theta)|^2\rho_j^{n_j}.$$

结合引理 2, 我们得到

$$I\leqslant A_p^p(\|\sqrt{|f_1|^2+\cdots+|f_N|^2}\|_p)^p.$$

这是引理 3 的第一部分.

当 δ_j 不含有 $\rho=1$ 的一点时,取 $\rho_j'\in(\rho_j, 1)$, 从上面的不等式得到

$$I\leqslant A_p^p\|\sqrt{|f(\rho_1',\theta)|^2+\cdots+|f(\rho_j',\theta)|^2}\|_p^p.$$

将 $\delta_j m$ 等分, 设所得小区间的左端顺次为 $\rho_j^1, \rho_j^2, \cdots, \rho_j^{(m)}$. 然后将 I

中的每一项 $|S_{j,n_j}(\rho_j, \theta)|^2$ 代以m个 $\frac{1}{m}|S_{j,n_j}(\rho_j, \theta)|^2$，右方的相应项 $|f(\rho_j', \theta)|^2$ 代以 $m^{-1}\sum_{i=1}^{m}|f_j(\rho_j^{(i)}, \theta)|^2$. 最后令 $m\to\infty$，就获得引理中最后的结果. 引理 3 证毕.

现在应用引理 3 来证明定理的三个(右端)不等式.

单位圆$|z|<1$上的正则函数$F(z)$，联系着单位圆周$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$上的实函数

$$g(\theta)=g(\theta, F)=\left\{\int_0^1(1-r)|F'(re^{i\theta})|^2dr\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

我们称$g(\theta)$为$F(z)$的立脱尔伍德与配赖的函数. 下面我们要建立不等式$\|g\|_p\leqslant A_p\|f\|_p$，这里 $f(\theta)\doteq\lim\limits_{r\to 1-0}F(re^{i\theta})$. 因此，要证定理中的 $\|\gamma_2\|_p\leqslant C_p'\|f\|_p$，我们只须证明

$$\|\gamma_2\|_p\leqslant C_p'\|g\|_p.$$

由于

$$S_n(\theta)-\sigma_n(\theta)=-i\frac{S_n'(\theta)}{n+1}=-\frac{i}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}i\nu c_\nu e^{i\nu\theta}\rho^\nu\cdot\rho^{-\nu},$$

$$S_n'(\theta)=\rho^{-n}S_n'(\rho, \theta)-(1-\rho)\sum_{\nu=0}^{n-1}\rho^{-1-\nu}S_\nu'(\rho, \theta),$$

所以

$$|S_n'(\theta)|^2\leqslant 2\left\{\rho^{-2n}|S_n'(\rho, \theta)|^2+(1-\rho)^2\left(\sum_{\nu=0}^{n-1}\rho^{-1-\nu}|S_\nu'(\rho, \theta)|\right)^2\right\}$$

$$\leqslant 2\left\{\rho^{-2n}|S_n'(\rho, \theta)|^2+\frac{1-\rho}{\rho^n}\sum_{\nu=0}^{n-1}\rho^{-1-\nu}|S_\nu'(\rho, \theta)|^2\right\}.$$

设 $\rho=\rho_n=1-\frac{1}{n+1}$，$\delta_n=(\rho_n, \rho_{n+1})$，则当$0\leqslant\nu\leqslant n$时，$\rho_n^\nu>\frac{1}{e}$. 由$\gamma_2(\theta)$的定义，从引理 3 得到

$$\|\gamma_2\|_p^p\leqslant 2^{\frac{p}{2}}\int_0^{2\pi}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|S_n'(\rho_n, \theta)|^2}{n^3\rho_n^{2n}}\right.$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\rho_n}{n^3\rho_n^n}\sum_{\nu=0}^{n-1}\rho_n^{-1-\nu}|S_\nu'(\rho_n, \theta)|^2\right\}^{\frac{p}{2}}d\theta$$

$$\leqslant(\sqrt{2}eA_p)^p\int_0^{2\pi}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3|\delta_n|}\int_{\delta_n}\left|\frac{d}{d\theta}F(\rho e^{i\theta})\right|^2d\rho\right.$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{1}{|\delta_n|}\int_{\delta_n}\left|\frac{dF(\rho e^{i\theta})}{d\theta}\right|^2 d\rho\Bigg\}^{\frac{p}{2}} d\theta$$

$$\leqslant(\sqrt{2}\,e\,A_p)^p\int_0^{2\pi}\Bigg\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2)(n+2)^2}{n^3}$$

$$\times\int_{\delta_n}(1-\rho)\,|F'(\rho e^{i\theta})|^2 d\rho\Bigg\}^{\frac{p}{2}} d\theta$$

$$\leqslant(10e\,A_p)^p\int_0^{2\pi}g^p(\theta)d\theta.$$

从而得到 $\|\gamma_2\|_p\leqslant C'_p\|g\|_p$.

其次证明 $\|\gamma_1\|_p\leqslant C'_{p,\alpha}\|f\|_p$. 由于 $n_{k+1}/n_k\geqslant\alpha>1$, 所以

$$\frac{n_{k+1}+1}{n_k+1}\geqslant\frac{\alpha n_k+1}{n_k+1}\geqslant\frac{\alpha+1}{2}>1.$$

置 $\alpha'=\dfrac{1+\alpha}{2}$, $\rho_k=1-\dfrac{1}{n_k+1}$, $\delta_k=\left(\rho_k,\ 1-\dfrac{1}{\alpha'(n_k+1)}\right)$, 我们见到 $\delta_k\cdot\delta_{k+1}=0$,

$$\|\gamma_1\|_p^p\leqslant(\sqrt{2}\,e)^p\int_0^{2\pi}\Bigg\{\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg[n_k^{-2}|S'_{n_k}(\rho_k,\ \theta)|^2$$

$$+\,n_k^{-2}\sum_{\nu=0}^{n_k-1}|S'_\nu(\rho_k,\ \theta)|^2\Bigg]\Bigg\}^{\frac{p}{2}} d\theta$$

$$\leqslant(\sqrt{2}\,e\,A_p)^p\int_0^{2\pi}\Bigg\{2\sum_{k=1}^{\infty}n_k^{-2}\frac{1}{|\delta_k|}\int_{\delta_k}\left|\frac{dF(\rho e^{i\theta})}{d\theta}\right|^2 d\rho\Bigg\}^{\frac{p}{2}} d\theta$$

$$\leqslant(\sqrt{2}\,e\,A_p)^p\int_0^{2\pi}\Bigg\{\frac{\alpha'^2}{\alpha'-1}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{n_k+1}{n_k}\right)^2$$

$$\times\int_{\delta_k}(1-\rho)\,|F'(\rho e^{i\theta})|^2 d\rho\Bigg\}^{\frac{p}{2}} d\theta.$$

由是

$$\|\gamma_1\|_p\leqslant\frac{4e\alpha' A_p}{\sqrt{\alpha'-1}}\|g\|_p.$$

证明也归结于建立不等式 $\|g\|_p=O(\|f\|_p)$.

现在证明 $\|\gamma\|_p\leqslant C'_{p,\alpha}\|f\|_p$. 暂设跃进数列$\{n_k\}$是不飞跃的——

$$\frac{n_{k+1}}{n_k}\geqslant\alpha>1,\quad \frac{n_{k+1}}{n_k}=O(1).$$

由于

$$\sum_{m+1}^{n} i\nu c_\nu e^{i\nu\theta}\frac{1}{\nu}=-\frac{S'_m}{m+1}+\frac{S'_n}{n+1}+\sum_{m+1}^{n}\frac{S'_\nu}{\nu(\nu+1)},$$

所以当 $m=n_{k-1}$, $n=n_k$ 时,

$$|\Delta_k|^2\leqslant 3\left\{\left|\frac{S'_m}{n_{k-1}+1}\right|^2+\left|\frac{S'_n}{n_k+1}\right|^2+\left|\sum_{n_{k-1}+1}^{n_k}\frac{S'_\nu}{\nu(\nu+1)}\right|^2\right\},$$

假设 $F(0)=c_0=0$, 那末

$$\gamma^2=\sum_1^\infty|\Delta_k|^2\leqslant 6\gamma_1^2+3\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{n_{k-1}+1}^{n_k}\frac{S'_\nu}{\nu(\nu+1)}\right|^2\equiv 6\gamma_1^2+3\gamma_3^2,$$

这里定义了 γ_3, 我们见到 $\gamma_3\geqslant 0$. γ_3 中的第一重和不大于

$$\frac{1}{(n_{k-1}+1)^4}\left(\sum_{n_{k-1}+1}^{n_k}|S'_\nu|\right)^2\leqslant\frac{n_k}{(n_{k-1}+1)^4}\sum_{n_{k-1}+1}^{n_k}|S'_\nu|^2$$

$$\leqslant\frac{\beta^4}{n_k^3}\sum_{n_{k-1}+1}^{n_k}|S'_\nu|^2,$$

常数 β 的存在是由于 $\{n_k\}$ 的不飞跃. 由是

$$\|\gamma_3\|_p^p\leqslant\beta^{2p}\int_0^{2\pi}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}n_k^{-3}\sum_{n_{k-1}+1}^{n_k}|S'_\nu(\theta)|^2\right\}^{\frac{p}{2}}d\theta$$

$$\leqslant(\sqrt{2}\beta^2 e)^p\int_0^{2\pi}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}n_k^{-3}\left[\sum_{\nu=n_{k-1}+1}^{n_k}\left(|S'_\nu(\rho_k,\theta)|^2\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+n_k^{-1}\sum_{\mu=0}^{\nu-1}|S'_\mu(\rho_k,\theta)|^2\right)\right]\right\}^{\frac{p}{2}}d\theta.$$

由引理 3 的最后的结论, 上式右端中的 $S'_\mu(\rho_k,\theta)$ 可代以

$$\frac{A_p^2}{|\delta_k|}\int_{\delta_k}|F'(\rho e^{i\theta})|^2 d\rho.$$

利用前面对于 $\|\gamma_1\|_p^p$ 的计算, 我们见到

$$\|\gamma_3\|_p^p\leqslant(2\beta^2 A_p)^p\int_0^{2\pi}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(n_k^2|\delta_k|)^{-1}\int_{\delta_k}|F'(\rho e^{i\theta})|^2 d\rho\right\}^{\frac{p}{2}}d\theta.$$

置 $\alpha'=\frac{1}{2}(1+\alpha)$, 得到 $\|\gamma_3\|_p\leqslant 4\beta^2 e\alpha' A_p(\alpha'-1)^{-\frac{1}{2}}\|g\|_p$. 由是证明归结到建立 $\|g\|_p=O(\|f\|_p)$ 以及说明 $\|\gamma_3\|_p=O(\|g\|_p)$ 中的 O 无关于 β——就是说无关于 $\{n_k\}$ 的不飞跃.

定理中左端三个不等式的证明, 需要下面的

引理 4 存在绝对常数 A 适合于 $g(\theta)\leqslant A\gamma_2(\theta)$.

【证明】 写着 $S'_\nu = S'_\nu(\theta)$, $\rho_n = 1-\frac{1}{n}$, 则因

$$|F'(\rho e^{i\theta})| = (1-\rho)\left|\sum_1^\infty S'_\nu \rho^{\nu-1}\right|,$$

$$g^2(\theta) = \sum_{n=1}^\infty \int_{\rho_n}^{\rho_{n+1}} (1-\rho)\,|F'(\rho e^{i\theta})|^2 d\rho$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^\infty n^{-3}(1-\rho_n)^2\left(\sum_1^\infty |S'_\nu|\,\rho_{n+1}^{\nu-1}\right)^2 \leqslant 2P+2Q,$$

这里

$$P = \sum_{n=1}^\infty n^{-5}\left(\sum_{\nu=1}^n |S'_\nu|\,\rho_{n+1}^{\nu-1}\right)^2$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^\infty n^{-5}\left(\sum_{\nu=1}^n |S'_\nu|^2 \sum_1^n 1^2\right) \leqslant A\sum_{\nu=1}^\infty \nu^{-3}|S'_\nu|^2,$$

$$Q = \sum_{n=1}^\infty n^{-5}\left(\sum_{\nu=n+1}^\infty |S'_\nu|\,\rho_{n+1}^{\nu-1}\right)^2$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^\infty n^{-5}\left(\sum_{\nu=n+1}^\infty |S'_\nu|^2 \nu^{-4} \sum_{\nu=1}^\infty \nu^4 \rho_{n+1}^{2\nu-2}\right)$$

$$\leqslant A\sum_{n=1}^\infty n^{-5}(1-\rho_{n-1})^{-5}\sum_{\nu=n}^\infty |S'_\nu|^2\nu^{-4}$$

$$= A\sum_{\nu=1}^\infty |S'_\nu|^2\nu^{-3}.$$

从而 $g^2(\theta) \leqslant A\gamma_2^2(\theta)$. 引理证毕.

利用引理 4, 我们就能证得定理中左端三个不等式的两个. 但是这还要结合到基本不等式 $\|f\|_p \geqslant B_p\|g\|_p$ $(c_0=0)$. 由是我们见到

$$\|\gamma_2\|_p \geqslant A_p\|f\|_p$$

成立. 其次, 我们见到

$$\|\gamma_2\|_p^p = \int_0^{2\pi}\left\{\sum_{k=1}^\infty \sum_{\nu=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{|S'_\nu|^2}{\nu(\nu+1)^2}\right\}^{\frac{p}{2}} d\theta$$

$$\leqslant A_p^p \int_0^{2\pi}\left\{\sum_{k=1}^\infty |S'_{n_k}|^2 \sum_{n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{\nu(\nu+1)^2}\right\}^{\frac{p}{2}} d\theta$$

$$\leqslant A_p^p \int_0^{2\pi}\left\{\sum_{k=1}^\infty |S'_{n_k}|^2 \frac{n_k}{(n_{k-1}+1)^2}\right\}^{\frac{p}{2}} d\theta$$

$$\leqslant A_p^p \int_0^{2\pi}\left\{\sum_{k=1}^\infty |S'_{n_k}|^2 \frac{\beta^3}{(1+n_k)^2}\right\}^{\frac{p}{2}} d\theta = A_p^p \beta^{\frac{3}{2}p}\|\gamma_1\|_p^p.$$

从而

$$\|\gamma_2\|_p \leqslant A_{\beta, p}\|\gamma_1\|_p = O(\|f\|_p).$$

还有一个不等式$\|\gamma\|_p \geqslant C_{\alpha,p}\|f\|_p$的证明，应用到下述

引理 5 设$\{\lambda_\nu\}$和$\sum_{2^\nu}^{2^{\nu+1}} |\lambda_j - \lambda_{j+1}|$ $(\nu=0, 1, \cdots)$都是有界数列，则当

$$f(\theta) \sim \sum_0^\infty c_\nu e^{i\nu\theta} \in L_p(0, 2\pi) \quad (1<p<\infty)$$

时，$\sum c_\nu \lambda_\nu e^{i\nu\theta}$是$L_p(0, 2\pi)$中某一函数$h(\theta)$的富理埃级数，并且$\|h\|_p \leqslant A_p\|f\|_p$(马辛基维斯(J. Marcinkiewicz), 1938)。

【证明】 不妨假设$c_0=0$. 置

$$2^k - 1 = n_k,\ \Delta_{k,s} = \sum_{n_{k-1}+1}^{s} c_\nu e^{i\nu\theta},\ \Delta'_k = \sum_{n_{k-1}+1}^{n_k} \lambda_\nu c_\nu e^{i\nu\theta},$$

我们见到

$$\begin{aligned}\Delta'_k &= \sum_{s=n_{k-1}+1}^{n_k} \Delta_{k,s}(\lambda_s - \lambda_{s+1}) + \Delta_k \lambda_{n_k+1} \\ &= O\left(\sum_{n_{k-1}+1}^{n_k} |\Delta_{k,s}|^2 \cdot |\lambda_s - \lambda_{s+1}| + |\Delta_k|^2 \cdot |\lambda_{n_k+1}|\right).\end{aligned}$$

因此，利用引理 3，就获得

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=1}^\infty |\Delta'_k|^2\right)^{\frac{p}{2}} d\theta \\ &= O(1)\int_0^{2\pi} \left\{\sum_{k=1}^\infty |\Delta_k|^2 \left(\sum_{n_{k-1}+1}^{n_k} |\lambda_s - \lambda_{s+1}| + |\lambda_{n_k+1}|\right)\right\}^{\frac{p}{2}} d\theta \\ &= O(1)\int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=1}^\infty |\Delta_k|^2\right)^{\frac{p}{2}} d\theta.\end{aligned}$$

由于$2 \leqslant n_{k+1}/n_k \leqslant 3$，所以从前面所得的$\|\gamma\|_2 = O(\|f\|_p)$，可以导得所要的结果.

系 设$n_0=0$, $n_1=1$, $n_{k+1}/n_k > \alpha > 1$ $(k>0)$, $\varepsilon_k = \pm 1$，则当$f(\theta) \in L_p(0, 2\pi)$时，$\sum_0^\infty \varepsilon_k \Delta_k$是$L_p(0, 2\pi)$中某一函数$f_1(\theta)$的富理埃级数，并且满足

$$B_{\alpha,p}\|f\|_p \leqslant \|f_1\|_p \leqslant C_{\alpha,p}\|f\|_p \quad (B_{\alpha,p}>0).$$

【证明】 设$\lambda_0 = \varepsilon_0$. 当$n_{k-1} < j \leqslant n_k$时，设一切$\lambda_j$都是$\varepsilon_k$，那末

$\{\lambda_j\}$适合引理 5 的要求，从而$\|f_1\|_p\leqslant C_{\alpha,p}\|f\|_p$成立．另一方面，$f$与$f_1$的关系是“对称”的，因此我们又得$\|f\|_p\leqslant C_{\alpha,p}\|f_1\|_p$．证明完毕．

现在证明定理中还未证明的一个不等式：$\|\gamma\|_p\geqslant C_{\alpha,p}\|f\|_p$．

设$r_k(t)$是拉特马吼的函数，则当t不等于以 2 的乘幂为分母的分数时，从引理 5 的系得到

$$B_{\alpha,p}\|f\|_p\leqslant\|\sum r_k(t)\Delta_k(x)\|_p\leqslant C_{\alpha,p}\|f\|_p\quad(B_{\alpha,p}>0).$$

利用不等式(见下面的引理 7)

$$B_p\sqrt{\sum|a_k|^2}\leqslant\|\sum a_k r_k(t)\|_p\leqslant C_p\sqrt{\sum|a_k|^2}\quad(B_p>0),$$

我们得到

$$B_{\alpha,p}\|f\|_p\leqslant\left\|\sqrt{\sum|\Delta_k(x)|^2}\right\|_p\leqslant C_{\alpha,p}\|f\|_p.$$

我们获得了定理中的六个不等式．但是在证明的过程中，除开引理 7 的外，我们还利用了下述引理中的不等式：

引理 6 对于$|z|<1$中的正则函数$F(z)$，我们有境界函数

$$\lim_{r\to1-0}F(re^{i\theta})\doteq f(\theta)$$

和立脱尔伍德-配赖的函数

$$g(\theta)=g(\theta,\ F)=\left(\int_0^1(1-r)\,|F'(re^{i\theta})|^2\,dr\right)^{\frac{1}{2}}.$$

假如$\|F(re^{i\theta})\|_p\ (p>0)$对于$0\leqslant r<1$是均匀有界，那末

$$\|g(\theta)\|_p\leqslant C_p\|f(\theta)\|_p.$$

【证明】 我们不妨假设$F(z)$在$|z|\leqslant1$上具有正则性．事实上，定理当$g(\theta,\ F(Rz))\ (0<R<1)$时成立的话，则从

$$\|g(\theta,\ F(Rz))\|_p\leqslant C_p\|f(R\theta)\|_p$$

可得

$$\|g(\theta)\|_p\leqslant C_p\|f(\theta)\|_p\quad(R\to1).$$

当$p=2$时，我们见到$\frac{1}{2\pi}\|g^2(\theta)\|_2^2$等于

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1(1-\rho)\,|F'(\rho e^{i\theta})|^2\,d\rho\,d\theta=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^2|C_m|^2}{2m(2m-1)}$$
$$\leqslant\sum|C_m|^2.$$

从而$\|g(\theta)\|_2\leqslant\|f(\theta)\|_2$.

其次，我们证明：当 $\|g(\theta)\|_p \leqslant C_p\|f(\theta)\|_p$ 对于某一正数 p 成立时，由此可以导出此不等式对于小于 p 的正数 p_1 也成立．事实上，假如 $F(z)$ ($|z|<1$) 无零点，那末在 $|z|<1$ 上，存在正则函数 $F_1(z)$ 适合

$$F_1(z) = (F(z))^{\frac{p_1}{p}}.$$

从而

$$\begin{aligned} g^2(\theta) &= \left(\frac{p}{p_1}\right)^2 \int_0^1 (1-\rho)\,|F_1|^{\frac{p-p_1}{p_1}}\,|F_1'|^2 d\rho \\ &\leqslant \left(\frac{p}{p_1}\right)^2 g_1^2(\theta)\,[F_1^*(\theta)]^{\frac{2p-2}{p_1}}, \end{aligned}$$

这里

$$g_1(\theta) = g(\theta, F_1),\ F_1^*(\theta) = \sup_{\rho<1} |F_1(\rho e^{i\theta})|.$$

由是

$$\|g\|_{p_1} \leqslant \frac{p}{p_1} \| F_1^{*\,\frac{p-p_1}{p_1}} g_1\|_p \leqslant \frac{p}{p_1} \|F_1^*\|_p^{\frac{p-p_1}{p_1}} \|g_1\|_p.$$

假如 $\|F_1^*\|_p \leqslant C_p\|F_1\|_p$，那末从上式得到 $\|g\|_{p_1} \leqslant C'_{p_1}\|f\|_{p_1}$．假如 $F(z)$ ($|z|<1$) 有零点，那末它可以写成两个没有零点的正则函数的和，结果仍然得到 $\|g\|_{p_1} \leqslant C''_{p_1}\|f\|_{p_1}$．因此，当 $\|F_1^*\| \leqslant C_p\|F_1\|_p$ 时，$\|g\|_{p_1} \leqslant C_{p_1}\|f\|_{p_1}$ 当 $0<p_1\leqslant p$ 成立．

这样一来，我们不妨假设 $p\geqslant 4$ 来建立所要的不等式．我们见到

$$\|g\|_p^2 = \|g^2\|_{\frac{p}{2}} = \sup_{\xi} \int_0^{2\pi} g^2(\theta)\xi(\theta)d\theta \quad (\|\xi(\theta)\|_{\frac{p}{p-2}} \leqslant 1).$$

设 $\zeta(z)$ 是一代数多项式，$\zeta(e^{i\theta})$ 的实部是 $\xi(\theta)$ ——上式中的 $\xi(\theta)$ 可以专取三角多项式．简写 $\frac{p}{p-2} = p'$，$\gamma(\theta) = g(\theta, \xi)$．设 $\zeta(e^{i\theta})$ 的虚部当 $z=0$ 时，其值等于 0．那末存在常数 $B_{p'}$ ($B_{p'}$ 仅与 p' 有关系) 适合于

$$\|\zeta(e^{i\theta})\|_{p'} \leqslant B_{p'}\|\xi(\theta)\|_{p'} \leqslant B_{p'}.$$

由于 $\|g\|_p = O(\|f\|_p)$ 当 $0<p\leqslant 2$ 时成立，所以，$B = \sup\limits_{0<p\leqslant 2} B_{p'}$ 的话，

$$\|\gamma\|_{p'} \leqslant B\|\zeta(e^{i\theta})\|_{p'} \leqslant B.$$

上面的积分

$$\int_0^{2\pi} g^2(\theta)\xi(\theta)d\theta=\int_0^1(1-\rho)\int_0^{2\pi}|F'(\rho e^{i\theta})|^2\xi(\theta)d\theta\,d\rho$$

$$=2\int_0^1(1-\rho^2)\int_0^{2\pi}|F'(\rho^2e^{i\theta})|^2\xi(\theta)d\theta\cdot\rho d\rho$$

$$\leqslant 4\int_0^1\rho(1-\rho)\int_0^{2\pi}|F'(\rho^2e^{i\theta})|^2\xi(\theta)d\theta\,d\rho.$$

简写 $w(z)=|F'(z)|^2$. 利用普阿松积分的性质，我们见到：当 $0\leqslant\rho\leqslant 1$ 时，

$$w(\rho^2e^{i\theta})\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}w(\rho e^{iu})P(\rho,\ \theta-u)du,$$

$$\int_0^{2\pi}w(\rho^2e^{i\theta})\xi(\theta)d\theta$$

$$\leqslant\int_0^{2\pi}\xi(\theta)\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}w(\rho e^{iu})P(\rho,\ \theta-u)du\right\}d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}w(\rho e^{iu})\xi(\rho,\ u)du\quad(\xi(\rho,\ u)\text{是}\ \xi\ \text{的普阿松积分}).$$

由是得到

$$\int_0^{2\pi}g^2(\theta)\xi(\theta)d\theta\leqslant 4\int_0^1\rho(1-\rho)\int_0^{2\pi}|F'(\rho e^{i\theta})|^2\xi(\rho,\ \theta)d\theta\,d\rho.$$

现在证明 $4|F'|^2=\Delta(|F|^2)$. 这里 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 是拉普拉斯运算子. 假如 $x+iy=\rho e^{i\theta}$, 那末 $\Delta U=\frac{1}{\rho}(\rho U_\rho)_\rho+\frac{1}{\rho^2}U_{\theta\theta}$. 我们可以证明 $\Delta|F|^p=p^2|F|^{p-2}|F'|^2$, 当 $p=2$ 时，就是所要的等式. 于恒等式

$$\Delta(uv)=u\Delta v+v\Delta u+2\left(u_\rho v_\rho+\frac{1}{\rho^2}u_\theta v_\theta\right)$$

置 $u=|F|^2$, $v=\xi(\rho,\ \theta)$, 则因 $\Delta\xi=0$, 从上式得到

$$4|F'|^2\xi=\Delta(|F|^2\xi)-2|F^2|_\rho\xi_\rho+\frac{2}{\rho^2}|F^2|_\theta\xi_\theta,$$

这里 $\xi=\xi(\rho,\ \theta)$. 因此，

$$\int_0^{2\pi}g^2(\theta)\xi(\theta)d\theta\leqslant I_1+I_2,$$

$$I_1=\int_0^{2\pi}\int_0^1\rho(1-\rho)\Delta(|F|^2\xi)d\rho\,d\theta,$$

$$I_2=4\int_0^{2\pi}\int_0^1(1-\rho)|F|\left(|F_\rho||\xi_\rho|+\frac{1}{\rho^2}|F_\theta\xi_\theta|\right)d\rho\,d\theta.$$

将 I_1 施行分部积分；由于 $(|F|^2\xi)_{\theta\theta}$ 关于 θ 在 $(0, 2\pi)$ 上的积分等于 0，所以

$$
\begin{aligned}
I_1&=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 (1-\rho)\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}|F|^2\xi\right)d\rho\\
&=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 \rho\frac{\partial}{\partial\rho}(|F|^2\xi)d\rho\\
&=\int_0^{2\pi}\left\{|F(e^{i\theta})|^2\xi(\theta)-\int_0^1|F(\rho e^{i\theta})|^2\xi(\rho, \theta)d\rho\right\}d\theta\\
&\leqslant\int_0^{2\pi}|F(e^{i\theta})|^2\xi(\theta)d\theta\leqslant\|F(e^{i\theta})\|_p^2\cdot\|\xi(\theta)\|_{p'}\leqslant\|F(e^{i\theta})\|_p^2.
\end{aligned}
$$

注意到

$$|F|\leqslant F^*(\theta)=\sup_{\rho<1}|F(\rho e^{i\theta})|,$$

$$|F_\rho|=|F'|,\ \left|\frac{1}{\rho}F_\theta\right|=|F'|,\ |\xi_\rho|\leqslant|\zeta'|,$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
I_2&\leqslant 8\int_0^{2\pi}F^*(\theta)d\theta\int_0^1(1-\rho)|F'\zeta'|d\rho\\
&\leqslant 8\int_0^{2\pi}F^*(\theta)g(\theta)\gamma(\theta)d\theta\\
&\leqslant 8\|F^*\|_p\|g\|_p\|\gamma\|_{p'}.
\end{aligned}
$$

最后的 $\|\gamma\|_{p'}\leqslant 1$．将 I_1 与 I_2 相加，我们见到

$$\|g\|_p^2\leqslant B_p\|F(e^{i\theta})\|_p\cdot\|g\|_p+\|F(e^{i\theta})\|_p^2.$$

写着 $X=\|g\|_p/\|F(e^{i\theta})\|_p$，则得 $X^2\leqslant B_p+1$．从而 $X\leqslant B_p+1<2B_p$，

$$\|g\|_p\leqslant 2B_p\|f\|_p\quad(p\geqslant 4).$$

由是引理当 $0<p<4$ 时也成立，即对于一切正数 p 成立．

我们还要补充说明：当 $F(z)\in L_p(0, 2\pi)$ $(z=\rho e^{i\theta})$ 关于 $0<\rho<1$ 均匀地成立时，$\|F^*(\theta)\|_p\leqslant C_p\|F(e^{i\theta})\|_p$，这里 $F^*(\theta)=\sup\limits_{\rho<1}|F(\rho e^{i\theta})|$，$p>0$．这个结果，可以参阅齐革蒙特的《三角级数论》I 第四章 §7 的定理(7.5)．

引理 7　设 $\sum a_k r_k(t)$ $(\sum a_k^2<\infty)$ 是 $f(t)$ 的拉特马吼级数，那末当 $p>0$ 时，

$$B_p(\sqrt{\sum|a_k^2|})\leqslant\|f\|_p\leqslant C_p(\sqrt{\sum|a_k^2|})\quad(B_p>0).$$

【证明】 暂设 a_k 都是实数，p 是偶数：$p=2k$. 置

$$(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_j)=\frac{(\alpha_1+\cdots+\alpha_j)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_j!},$$

则

$$\int_0^1[a_0r_0(t)+\cdots+a_nr_n(t)]^{2k}\,dt$$

$$=\sum_{\substack{\alpha_1+\cdots+\alpha_j=2k\\0\leqslant m_1,\cdots,m_j\leqslant n}}(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_j)c_{m_1}^{\alpha_1}c_{m_2}^{\alpha_2}\cdots c_{m_j}^{\alpha_j}\int_0^1r_{m_1}^{\alpha_1}(t)\cdots r_{m_j}^{\alpha_j}(t)\,dt.$$

末尾的积分当 $\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_j$ 都是偶数时，等于1；否则是0. 由于

$$\sum_{\substack{\beta_1+\cdots+\beta_j=k\\0\leqslant m_1,\cdots,m_j\leqslant n}}(\beta_1,\ \cdots,\ \beta_j)c_{m_1}^{2\beta_1}c_{m_2}^{2\beta_2}\cdots c_{m_j}^{2\beta_j}=(c_1^2+c_2^2+\cdots+c_n^2)^k,$$

上记的积分不大于 $(c_1^2+c_2^2+\cdots+c_n^2)^k$ 与 c_{2k}^{2k} 的乘积，这里

$$c_{2k}^{2k}=\left\{\frac{(2\beta_1,\ \cdots,\ 2\beta_j)}{(\beta_1,\ \cdots,\ \beta_j)}=\frac{(k+1)(k+2)\cdots2k}{\pi(\beta_{i+1})\cdots2\beta_i}\right\}\text{的上界}$$

$$\leqslant\frac{(k+1)(k+2)\cdots2k}{2^k}\leqslant k^k,$$

所以

$$\left[\int_0^1[a_0r_0(t)+\cdots+a_nr_n(t)]^{2k}\,dt\right]^{\frac{1}{2k}}\leqslant\sqrt{k}\sqrt{c_1^2+c_2^2+\cdots+c_n^2}.$$

令 $n\to\infty$，我们见到 $\|f\|_{2k}\leqslant\sqrt{k}\,(\sum c_k^2)^{\frac{1}{2}}$ 对于一切自然数 k 成立，从而 $\|f\|\leqslant C_p\sqrt{\sum c_k^2}$ 当 $p>0$ 时成立.

还有一个不等式 $\sqrt{\sum c_k^2}\,(=\|f\|_2)\leqslant\|f\|_p$ 当 $p\geqslant2$ 时是明显的. 假如 $0<p<2$，那取正数 t 和 t' 适合于 $t+t'=1$ 和 $pt+4t'=2$，由赫耳窦不等式，

$$\|f\|_2^2=\|f^{pt+4t'}\|^2\leqslant\|f\|_p^{pt}\cdot\|f\|_4^{4t'}\leqslant\|f\|_p^{pt}\|f_2\|^{4t'}.$$

从而得到 $\|f\|_p\geqslant C_p'\sqrt{\sum c_k^2}$.

假如 c_k 中有复数，那末一般地写着 $c_k=c_k'+ic_k''$，$f=f_1+if_2$. 从而得到

$$\|f\|_p\leqslant\|f_1\|_p+\|f_2\|_p\leqslant B_p(\sqrt{\sum c_k'^2}+\sqrt{\sum c_k''^2})\leqslant2B_p\sqrt{\sum|c_k|^2},$$

$$\|f\|_p \geqslant \max(\|f_1\|_p,\ \|f_2\|_p)$$

$$\geqslant B'_p \max\left(\sqrt{\sum c_k'^2},\ \sqrt{\sum c_k''^2}\right) \geqslant \frac{1}{2} B'_p \sqrt{\sum |c_k|^2}.$$

引理 7 证明完毕.

4．偏差落在光滑模区间中的线性逼近

设 $f(x)\in C_{2\pi}$，$\|f\|=\max|f(x)|$，

$$\Delta_k^\delta f = \Delta_k^\delta f(x) = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} f(x+\nu\delta).$$

称 $\omega_k(h)=\omega_k(h;\ f)=\sup\limits_{0<\delta\leqslant h}\|\Delta_k^\delta f\|$ 为 $f(x)$ 为 k 阶光滑模. 又称 $(C_1^k\omega_k(h),\ C_2^k\omega_k(h))$ 为 $f(x)$ 的一个 k 阶光滑模区间，但 C_1^k 和 C_2^k 都是正数. 这里研究用怎样的 n 阶三角多项式 $T_n(x)$ 来逼近 $f(x)$，能使逼近偏差

$$\|f(x)-T_n(x)\|$$

落在一个 k 阶光滑模区间中的问题.

定理 1　设 $S_n(x)$ 是 $\mathfrak{S}[f,\ x]$ 的部分和，

$$\tau_{k,n}(x) = S_n(x) - \frac{1}{2^k}\Delta_k^{\frac{\pi}{n}} S_n(x),$$

则当 $f(x)\in C_{2\pi}$ 时，有正数 C_1^k 和 C_2^k 适合

$$C_1^k\omega_k\left(\frac{\pi}{n}\right) \leqslant \|f-\tau_{k,n}(f)\| \leqslant C_2^k\omega_k\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

这是脱利古勃(P. M. Тригуб)的定理，见苏联科学院科学通报数学之辑第 29 卷(1965).

【证明】　设 $\{S_n(x)\}$ 的费耶平均为

$$\sigma_n = \sigma_n(x) = \frac{1}{n+1}\{S_0(x)+\cdots+S_n(x)\},$$

则得洛各净斯基(Rogosinski)的等式

$$S_n\left(x+\frac{\alpha}{n}\right)+S_n\left(x-\frac{\alpha}{n}\right)$$

$$=2S_n(x)\cos\alpha + 2n\sigma_{n-1}\cdot\left[\cos\frac{(n-1)\alpha}{n}-\cos\alpha\right]$$

$$+2\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)\sigma_k\cdot\left[\cos\frac{k\alpha}{n}-2\frac{(k+1)\alpha}{n}+\cos\frac{(k+2)\alpha}{n}\right].$$

由于 $\|\sigma_n\|\leqslant\|f\|$，所以从上式得到

$$\left\|S_n\left(x+\frac{\alpha}{n}\right)+S_n\left(x-\frac{\alpha}{n}\right)-2S_n(x)\cos\alpha\right\|$$
$$\leqslant 2n\|f\|\frac{\alpha}{n}+2\|f\|\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)\frac{\alpha^2}{n^2}\leqslant(2\alpha+\alpha^2)\|f\|.$$

当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，我们见到

$$\left\|S_n(x)+S_n\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right\|=\left\|S_n\left(x-\frac{\pi}{2n}\right)+S_n\left(x+\frac{\pi}{2n}\right)\right\|\leqslant 6\|f\|.$$

因此，

$$\left\|S_n(x)+(-1)^{\nu+1}S_n\left(x+\frac{\nu\pi}{n}\right)\right\|$$
$$=\left\|\sum_{s=0}^{\nu-1}(-1)^s\left[S_n\left(x+\frac{s\pi}{n}\right)+S_n\left(x+\frac{s\pi}{n}+\frac{\pi}{n}\right)\right]\right\|$$
$$\leqslant 6\nu\|f\|.$$

由于

$$\tau_{k,n}(x)=2^{-k}\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}\left[S_n(x)+(-1)^{\nu+1}S_n\left(x+\frac{\nu\pi}{n}\right)\right],$$

所以 $\|\tau_{k,n}\|\leqslant 3k\|f\|$.

设 T_n 是达到最佳逼近 $E_n(f)$ 的多项式，那末

$$E_n(f)=\|f-T_n\|\leqslant C_k\omega_k\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

§1 定理 3 是对于 $k=1$ 而证的，在 $k>1$ 的情况，详见本节末尾引理.

从等式

$$f-T_n-\tau_{k,n}(f-T_n)-\frac{1}{2^k}\Delta_k^{\frac{\pi}{n}}(f-T_n)+\frac{1}{2^k}\Delta_k^{\frac{\pi}{n}}f=f-\tau_{k,n}(f)$$

得到

$$\|f-\tau_{k,n}(f)\|\leqslant(3k+2)E_n(f)+2^{-k}\|\Delta_k^{\frac{\pi}{n}}f\|$$
$$\leqslant[(3k+2)C_k+2^{-k}]\omega_k\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

以及

$$\frac{1}{2^k}\|\Delta_k^{\frac{\pi}{n}}f\|\leqslant(3k+2)E_n(f)+\|f-\tau_{k,n}\|\leqslant(3k+3)\|f-\tau_{k,n}(f)\|.$$

三角多项式 $T_n(x)$ 满足

$$\max_x |T_n'(x)| \leqslant \frac{n}{2\sin nh} \max_x |T_n(x+h) - T_n(x-h)|$$
$$\leqslant n \max_x |T_n(x)|,$$

这里 $0<h<\frac{\pi}{2n}$. 由数学归纳法, 我们得到

$$\max_x |T_n^{(k)}(x)| \leqslant \left(\frac{n}{2\sin nh}\right)^k \max_x |\Delta_k^{(h)} T_n(x)| \leqslant n^k \max_x |T_n(x)|.$$

由是

$$\omega_k\left(\frac{\pi}{n}\right) = \sup_{0<\delta<\frac{\pi}{n}} \|\Delta_k^\delta f\| = \sup_{0<\delta<\frac{\pi}{n}} \|\Delta_k^\delta T_n + \Delta_k^\delta (f-T_n)\|$$
$$\leqslant \sup_{\delta<\frac{\pi}{n}} \|T_n^{(k)}\| \delta^k + 2^k E_n(f)$$
$$\leqslant \frac{n^k}{\pi^k} \|\Delta^{\frac{\pi}{n}} T_n\| \left(\frac{\pi}{n}\right)^k + 2^k E_n(f).$$

但是 $\|\Delta^{\frac{\pi}{n}} T_n\| \leqslant 2^k E(f) + \|\Delta_k^{\frac{\pi}{n}} f\|$, 我们得到

$$\omega_k\left(\frac{\pi}{n}\right) \leqslant \pi^k[(3k+3)\|f-\tau_{k,n}\| + E_n(f)] + 2^k E_n(f)$$
$$\leqslant (3k\pi^k + 4\pi^k + 2^k)\|f-\tau_{k,n}\|.$$

证明完毕.

当 $k=1$ 时, 定理所述是

$$C_1\omega\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \|f-\tau_n\| \leqslant C_2\omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

这里

$$\tau_n(x) = \tau_{1,n}(x) = \frac{1}{2}\left\{S_n(x) + S_n\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right\}$$

是贝恩斯坦的和.

定理 2 设 $\tau_n(x)$ 是 $f(x) \equiv f(x+2\pi) \in L(0, 2\pi)$ 的贝恩斯坦的和、假如

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \tau_n(x)| dx = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

那末 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 是有界变差. 其逆亦真.

【证明】 当 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 是有界变差时,

$$\omega\left(\frac{1}{n};\ f\right)_{L_1}=O\left(\frac{1}{n}\right);$$

由定理 1,

$$\|f(x)-\tau_n(x)\|_{L_1}=O\left(\frac{1}{n}\right),$$

从而定理 2 中的等式成立.

从定理 1 的证明,我们见到:对于 $L^p(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 来说, 定理 1 也成立. 特别是,从所设的条件,我们断定

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+h)-f(x)|\,dx=O\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-\tau_{\left[\frac{1}{h}\right]}(x)|\,dx\right)$$

成立. 因此, $\omega(t;\ f)_L=O(t)\ (t>0)$. 现在要证 $f(x)$ 是一有界变差的函数. 作函数列

$$f_n(x)=n\int_0^{\frac{1}{n}}f(x+t)\,dt\quad(n=1,\ 2,\ \cdots).$$

设 $h>0$, 简写 $\int_{-\pi}^{\pi}$ 为 $\int$, 我们见到

$$\begin{aligned}\int|f_n(x+h)-f_n(x)|\,dx&=n\int\left|\int_0^{\frac{1}{n}}[f(x+t+h)-f(x+t)]\,dt\right|dx\\&\leqslant\int\int_0^{\frac{1}{n}}|f(x+t+h)-f(x+t)|\,dt\,dx\\&=n\int_0^{\frac{1}{n}}\int|f(x+t+h)-f(x+t)|\,dx\,dt.\end{aligned}$$

利用 $\omega(t;\ f)_L=O(t)$, 就得到

$$\int|f_n(x+h)-f_n(x)|\,dx=O(h).$$

设 $x_k<x_k+h_k<x_{k+1}\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$, 则

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m}|f_n(x_k+h_k)-f_n(x_k)|&\leqslant\sum_{k=1}^{m}\int_{x_k}^{x_k+h_k}|f_n'(x)|\,dx\leqslant\int|f_n'(x)|\,dx\\&\leqslant\varliminf_{h\to0}\int\left|\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}\right|dx=O(1),\end{aligned}$$

关于 n 均匀地成立. 令 $n\to\infty$, 则得

$$\sum_{k=1}^{m}|f(x_k+h_k)-f(x_k)|=O(1).$$

由是可知, $f(x)$ 是有界变差. 定理证毕.

定理 3 设周期函数 $f(x)$ 具有 $f^{(r)}(x)\in C_{2\pi}$, 则

$$\omega_k\left(\frac{\pi}{n};\ f^{(r)}\right)=O(\varepsilon_n)\quad(\varepsilon_n\to 0)$$

的充要条件是关于 m 和 n 均匀地成立着

$$\|f-\tau_{k,n}(f)-\tau_{r,m}(f)+\tau_{r,m}(\tau_{k,n})\|=O\left(\frac{\varepsilon_n}{m^r}\right).$$

【证明】 由于 $\tau_{k,n}^{(r)}(f)=\tau_{k,n}(f^{(r)})$, 所以从定理 1 得到

$$\|f-\tau_{k,n}-\tau_{r,m}(f-\tau_{k,n})\|\leqslant C_r\|f^{(r)}-\tau_{k,n}^{(r)}\|\left(\frac{\pi}{m}\right)^r$$

$$\leqslant C_{r,k}\left(\frac{\pi}{m}\right)^r\omega_k\left(\frac{\pi}{n};\ f^{(r)}\right).$$

这就证明了条件的必要性.

假如

$$\|f-\tau_{k,n}(f)-\tau_{r,m}(f-\tau_{k,n})\|\leqslant\frac{\varepsilon_n}{m^r},$$

那末仍由定理 1, 得到

$$\omega_r\left(\frac{\pi}{m};\ f-\tau_{k,n}\right)\leqslant\frac{1}{C_r'}\frac{\varepsilon_n}{m^r}.$$

一般地说: $\omega_k(t;f)\leqslant Ct^k$ 等价于 $\omega(t;\ f^{(k-1)})\leqslant Ct$ (k: 自然数). 因此从上式得到 $f^{(r-1)}(x)\in\mathrm{Lip}\,1$, 并且几乎处处成立着

$$|f^{(r)}(t)-\tau_{k,n}^{(r)}(t)|\leqslant\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\pi}{m}\right)^{-r}\omega\left(\frac{\pi}{m};\ f-\tau_{k,n}\right)\leqslant\varepsilon_n(C_r'\pi^r)^{-1}.$$

现在证明 $f^{(r)}(t)$ 到处存在. 我们见到

$$\left|\frac{1}{h_1}\int_0^{h_1}f^{(r)}(t+u)du-\frac{1}{h_2}\int_0^{h_2}f^{(r)}(t+u)du\right|$$

$$\leqslant\frac{2\varepsilon_n}{\pi^r C_r'}+\left|\frac{1}{h_1}\int_0^{h_1}\tau_{k,n}^{(r)}(t+u)du-\frac{1}{h_2}\int_0^{h_2}\tau_{k,n}^{(r)}(t+u)du\right|.$$

由于 $[0,\ h]$ 中有 h' 适合于

$$\int_0^{h'}\tau_{k,n}^{(r)}(t+u)\,du=\tau_{k,n}^{(r)}(t+h')\int_0^h du,$$

所以上式末项等于

$$\begin{aligned}|\tau_{k,n}^{(r)}(t+h_1')-\tau_{k,n}^{(r)}(t+h_2')| &\doteq |h_1'-h_2'|\cdot|\tau_{k,n}^{(r)}(t+h)|\\ &\leqslant(|h_1|+|h_2|)\|\tau_{k,n}^{(r)}\|.\end{aligned}$$

由是从

$$\left|\frac{f^{(r-1)}(t+h_1)-f^{(r-1)}(t)}{h_1}-\frac{f^{(r-1)}(t+h_2)-f^{(r-1)}(t)}{h_2}\right|$$

$$\leqslant(|h_1|+|h_2|)\|\tau_{k,n}^{(r)}\|+\frac{2\varepsilon_n}{\pi^r C_r'}$$

知 $f^{(r)}(t)$ 存在. 应用定理 1, $|f^{(r)}(t)-\tau_{k,n}^{(r)}(t)|\leqslant\varepsilon_n/C_r'\pi^r$ 包含着

$$\omega_k\left(\frac{\pi}{n};\,f^{(r)}\right)\leqslant\varepsilon_n/C_r'C_1^k\pi^r.$$

定理 3 证明完毕.

函数 f 属于 $C^{(r)}$ 的特征,可以用 $\tau_{r,n}$ 的逼近来实现:

定理 4 若 $f\in C^{(r)}(0,\ 2\pi)$, 则

$$f(x)-\tau_{r,n}(x)=\left(-\frac{\pi}{2n}\right)^r f^{(r)}(x)+o(n^{-r}).$$

假如有连续函数 $d(x)\in C_{2\pi}$ 均匀地满足

$$f(x)-\tau_{r,n}(x)=\frac{d(x)}{n^r}+o(n^{-r}),$$

那末 $f\in C^{(r)}$, 并且

$$f^{(r)}(x)=\left(-\frac{2}{\pi}\right)^r d(x).$$

【证明】 我们仍然要利用本节末尾的不等式

$$E_k(f)\leqslant C_k\omega\left(\frac{\pi}{n};\ f\right).$$

因此, 将

$$E_n(f)=o\left(\frac{1}{n^r}\right)$$

和

$$\Delta_r^{\frac{\pi}{n}}f(x)=-\left(\frac{\pi}{n}\right)^r f(x)+o\left(\frac{1}{n^r}\right)$$

结合到

$$(*)\qquad f(x)-\tau_{r,n}(x)=\frac{1}{2^r}\Delta_r^{\frac{\pi}{n}}f(x)+O(E_n(f)),$$

我们见到

$$f(x)-\tau_{r,n}(x)=\left(-\frac{\pi}{2n}\right)^r f^{(r)}(x)+o(n^{-r}).$$

今证其逆. 对于连续函数 $d(x)$, 有三角多项式 $T_n(x)$ 适合

$$d(x)-T_n(x)=o(1)\quad (n\to\infty).$$

从而由所设条件得到

$$E_n(f)\leqslant\left\|f-\tau_{r,n}-\frac{T_n}{n^r}\right\|=o(n^{-r}).$$

但是等式(*)是常成立的, 所以得到

$$\frac{1}{2^r}\Delta_r^{\frac{\pi}{n}}f(x)=\frac{d(x)}{n^r}+o(n^{-r}).$$

左端在[0, 2π]上的积分等于 0, 故

$$\int_0^{2\pi}d(x)\,dx=0.$$

假如

$$f_1^{(r)}(x)=\left(-\frac{2}{\pi}\right)^r d(x),$$

那末

$$\Delta_n^{\frac{\pi}{n}}f_1(x)=\left(-\frac{2}{\pi}\right)^r f_1^{(r)}(x)+o(n^{-r})=\frac{2^r d(x)}{n^r}+o(n^{-r}).$$

因此

$$\Delta_r^{\frac{\pi}{n}}(f-f_1)=o(n^{-r}),$$

由是可知 $f(x)-f_1(x)$ 是一常数. 从而

$$f^{(r)}(x)=f_1^{(r)}(x)=\left(-\frac{2}{\pi}\right)^r d(x).$$

定理证毕.

现在证明上面已经用过两次的

引理 1 对于周期函数 $f(x)\equiv f(x+2\pi)$ 的 n 阶最佳逼近的偏差 $E_n(f)$, 成立着

$$E_n(f)\leqslant C_k\omega_k\left(\frac{1}{n+1};\ f\right)\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots).$$

我们将从关于整函数逼近有界函数的定理(引理 2) 来导出上述结果.

设 $g(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu z^\nu$ 是一整函数，当 $\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{k!\,|C_k|}\leqslant\sigma$ 时，称 $g(z)$ 是一个级不高于 σ 的整函数. 设 $f(x)\,(-\infty<x<\infty)$ 是一函数，记级不高于 σ 的整函数为 $g_\sigma(x)$. 假如某一 $g_\sigma(x)\equiv g_\sigma(f;\ x)$ 能使

$$\|f(x)-g_\sigma(f;\ x)\|_c$$

取最小值，那末称

$$A_\sigma(f)=\|f(x)-g_\sigma(f;\ x)\|_c=\sup_{-\infty<x<\infty}|f(x)-g_\sigma(f;\ x)|$$

为 $\{g_\sigma(z)\}\equiv(\sigma)$ 对于 $f(x)$ 的最佳逼近的偏差.

引理 2 假如 $f(x)$ 在实轴 $(-\infty<x<\infty)$ 上是有界，那末对于任一自然数 k，有常数 C_k 适合于 $A_\sigma(f)\leqslant C_k\omega_k\left(\frac{1}{\sigma};\ f\right)$，$\omega_k(\delta;\ f)$ 是 f 的 k 阶光滑模*).

【证明】 固定自然数 k，取大于 $k+2$ 的偶数 $2r$，作整函数

$$g_\sigma(x)=\left(\frac{1}{x}\sin\frac{\sigma x}{2r}\right)^{2r}\quad(\sigma>0),$$

置

$$\gamma_{\sigma,r}=\int_{-\infty}^{\infty}g_\sigma(t)\,dt,$$

$$G_{\sigma,k}(u)=\sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{\nu-1}\frac{1}{\nu}\binom{k}{\nu}g_\sigma\left(\frac{u}{\nu}\right),$$

那末

$$\frac{1}{\gamma_{\sigma,r}}\int_{-\infty}^{\infty}G_{\sigma,k}(x-t)f(t)\,dt\equiv Q_\sigma(f,\ x)$$

是一个级不高于 σ 的整函数. 事实上，我们只要证明

$$F(z)=\frac{1}{\gamma_{\sigma,r}}\int_{-\infty}^{\infty}g_\sigma(z-t)f(t)\,dt$$

属于 (σ)，就知道 $Q_\sigma(f,\ x)\in(\sigma)$，现在，由于

$$c_k^{(n)}=\frac{1}{\gamma_{\sigma,r}}\int_{-n}^{n}g_\sigma^{(k)}(t)f(t)\,dt=O(\sigma^k),$$

所以整函数

---

*) 当 $\lim_{\delta\to0}\omega_k(\delta;\ f)=0$ 时，f 具有"光滑"的形态. 但是当 $\omega_k(\delta;\ f)\neq o(1)$ 时，我们也称 $\omega_k(\delta,\ f)$ 为 f 的光滑模.

$$\frac{1}{\gamma_{\sigma,r}}\int_{-n}^{n} g_\sigma(z-t)f(t)dt=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k^{(n)}}{k!}z^k \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

匀敛于整函数——$F(z)$. 从

$$|F(z)|\leqslant\frac{1}{\gamma_{\sigma,r}}\left\{\int_{|x-t|<1}|g_\sigma(z-t)f(t)|dt\right.$$

$$\left.+\int_{|x-t|>1}|g_\sigma(z-t)f(t)|dt\right\}$$

以及

$$g^{(k)}(x)=O(\sigma^k),\quad g(x+iy)=\sum\frac{O(\sigma^k)}{k!}(iy)^k=O(e^{\sigma|y|}),$$

我们见到

$$|F(z)|\leqslant\frac{e^{\sigma|y|}}{\gamma_{\sigma,r}}\left\{\int_{|x-t|<1}|f(t)|dt+\int_{|x-t|>1}\frac{|f(t)|}{|x-t|^{2r}}dt\right\}$$

$$\leqslant C_{\sigma,r}e^{\sigma|y|}.$$

从而 $F(z)\in(\sigma)$.

由于表达 $Q_\sigma(f;\ x)$ 的积分可以写成

$$\frac{1}{\gamma_{\sigma,r}}\int_{-\infty}^{\infty} g_\sigma(t)\sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{\nu-1}\binom{k}{\nu}f(x+\nu t)dt,$$

所以

$$|f(x)-Q_\sigma(f;\ x)|$$

$$\leqslant\frac{1}{\gamma_{\sigma,r}}\int_{-\infty}^{\infty} g_\sigma(t)\left|\sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{\nu-1}\binom{k}{\nu}f(x+\nu t)\right|dt$$

$$\leqslant\frac{1}{\gamma_{\sigma,r}}\int_{-\infty}^{\infty} g_\sigma(t)\omega_k(t;\ f)dt.$$

由于

$$\omega_k(t;\ f)=\omega_k\left(\frac{1}{\sigma}\cdot\sigma t;\ f\right)\leqslant\omega\left(\frac{1}{\sigma};\ f\right)(\sigma t+1)^k,$$

所以

$$|f(x)-Q_\sigma(f;\ x)|$$

$$\leqslant\frac{\sigma^k}{\gamma_{\sigma,r}}\omega\left(\frac{1}{\sigma};\ f\right)\int_{-\infty}^{\infty} g_\sigma(t)\left(t+\frac{1}{\sigma}\right)^k dt$$

$$\leqslant\omega_k\left(\frac{1}{\sigma};\ f\right)\left\{\frac{2^k}{\gamma_{\sigma,r}}\int_{-\frac{1}{\sigma}}^{\frac{1}{\sigma}} g_\sigma(t)dt+\frac{(2\sigma)^k}{\gamma_{\sigma,r}}\int_{|t|>\frac{1}{\sigma}} g_\sigma(t)t^k dt\right\}.$$

又因 $2r>k+2$，所以括弧中最后一项是 $O(1)$. 从而得到

$$A_\sigma(f)\leqslant \sup_{-\infty<x<\infty}|f(x)-Q_\sigma(f,x)|\leqslant C_k\omega\left(\frac{1}{\sigma};\ f\right).$$

【引理 1 的证明】 设 $f(x+2\pi)=f(x)$，则当 $f(x)$ 是有界时，

$$Q_\sigma(f;\ x+2\pi)\equiv Q_\sigma(f;\ x).$$

事实上，此结果可从下记的表达式明白：

$$Q_\sigma(f;\ x)=\frac{1}{\gamma_{\sigma,r}}\int_{-\infty}^{\infty}G_{\sigma,k}(x-t)f(t)dt$$

$$=\frac{1}{\gamma_{\sigma,r}}\int_{-\infty}^{\infty}G_{\sigma,k}(t)f(x-t)dt.$$

现在证明 $Q_\sigma(f;\ x)$ 是一个阶不高于 $[\sigma]$ 的三角多项式. 由于 $Q_\sigma(f;\ x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，它可以展成三角级数：

$$Q_\sigma(f;\ x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_1^\infty(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

这是一个整函数，它可以任意次逐项微分. 由是

$$n^{2r}(a_n^2+b_n^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|Q_\sigma^{(r)}(f;\ x)|^2dx\leqslant 2\sigma^{2r}\max_{-\infty<x<\infty}|Q_\sigma(f;x)|,$$

从而对于任一自然数 r，

$$a_n^2+b_n^2\leqslant 2n^{-2r}\sigma^{2r}\max|Q_\sigma(f;\ x)|.$$

这时必须：当 $n>[\sigma]$ 时，$a_n^2+b_n^2=0$. 因此

$$Q_\sigma(f;\ x)=\sum_{n=1}^{[\sigma]}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+\frac{1}{2}a_0,$$

$$\left|f(x)-\frac{a_0}{2}-\sum_1^{[\sigma]}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right|\leqslant C_k\omega_k\left(\frac{1}{\sigma};\ f\right).$$

这就建立着引理 1.

5. 几种古典求和法与最佳逼近

设 $\lambda_0(r),\ \lambda_1(r),\ \cdots$ 都是 $r\ (r\in E)$ 的函数，$\lambda_0(r)\equiv1$，当 $r\to r_0$ 时，一切 $\lambda_n(r)$ 都接近于 1. 写着

$$U_r(f;\ x,\ \lambda)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(r)(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

这里(a_n, b_n)是$f(x)$的富理埃系数. 假如$f\in L_p(0, 2\pi)$, $p\geqslant 1$, 在$L_p(0, 2\pi)$中,我们考虑用$U_r(f; x, \lambda)$逼近$f(x)$的逼近偏差

$$R_r(f; \lambda)_{L_p}=\|f(x)-U_r(f; x, \lambda)\|_{L_p},$$

这里

$$\|g(x)\|_{L_p}=\left(\int_0^{2\pi}|g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

当$p=\infty$时,

$$L_p(0, 2\pi)\equiv C_{2\pi},$$

$$\|g(x)\|_{L_\infty}=\|g(x)\|_C=\|g(x)\|=\max|g(x)|.$$

假如$\lambda_n(r)=r^n$, $E=(0, 1)$, 那末$U_r(f; x, \lambda)$是阿培尔-普阿松平均,写着$R_r(f; \lambda)=A(f, r^n)$. 我们仍然记

$$E_n(f)_{L_p}=\inf_{\alpha_\nu, \beta_\nu}\|f(x)-\sum_{\nu=0}^{n}(\alpha_\nu\cos\nu x+\beta_\nu\sin\nu x)\|_{L_p}.$$

定理 1 设$1<p<\infty$, $f\in L_p$, $\gamma=\min(p, 2)$, 则当$r\to 1-0$时,

$$A(f, r^n)\leqslant C_p(1-r)\left\{\sum_{n=0}^{\infty}r^n(n+1)^{\gamma-1}E_n^\gamma(f)_{L_p}\right\}^{\frac{1}{\gamma}}.$$

这是 M. Ф. 济曼的定理(ДАН, 1962).

【证明】 设$2^m\leqslant n=\left[\frac{1}{1-r}\right]<2^{m+1}$, 则$A(f, r^n)_{L_p}\leqslant\sigma_1+\sigma_2$, 这里

$$\sigma_1=\left\|\sum_{\nu=0}^{2^{m+1}-1}(1-r^\nu)A_\nu(x)\right\|_{L_p},$$

$$\sigma_2=\left\|\sum_{\nu=2^{m+1}}^{\infty}(1-r^\nu)A_\nu(x)\right\|_{L_p},$$

$f(x)\sim\sum_0^\infty A_\nu(x)$.

现在利用§3中的主要定理以及引理5来估计σ_2和σ_1. 当$\lambda_\nu=1-r^\nu$时,两个数列$\{\lambda_\nu\}$和$\sum_{2^\nu}^{2^{\nu+1}}|\lambda_j-\lambda_{j+1}|$ $(\nu=0, 1, \cdots)$都是有界,由上述的引理5, 我们见到

$$\sigma_2\leqslant A_p\left\|\sum_{\nu=2^{m+1}}^{\infty}A_\nu(x)\right\|_{L_p}\leqslant A_p'E_n(f)_{L_p}.$$

利用§3的主要定理,

$$\sigma_1 \leqslant A_p \left\| \left(\sum_{\nu=0}^{m} \left| \sum_{\mu=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} (1-r^\mu) A_\mu(x) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_p}.$$

由和差变换，右端平方内部的和等于

$$\sum_{\mu=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} \{S_\mu(f;\ x) - S_{\mu-1}(f;\ x)\}(r^{\mu+1} - r^\mu)$$
$$+ \{S_{2^{\nu+1}-1}(f;\ x) - S_{2^\nu-1}(f;\ x)\}(1 - r^{2^{\nu+1}}),$$

这里 $S_n(f;\ x) = A_0(x) + \cdots + A_n(x)$. 由是可知．当 $\gamma > 1$ 时，

$$\left\| \sum_{\mu=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} (1-r^\mu) A_\mu(x) \right\|_{L_p}^{\gamma} \leqslant A_p'(1-r)^\gamma \sum_{\mu=2^{\nu-1}}^{2^\nu-1} E_\mu^\gamma(f)_{L_p}.$$

假如 $1 < p \leqslant 2$, 那末

$$\sigma_1^p \leqslant A_p''^p \int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu=0}^{m} \left| \sum_{\mu=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} (1-r^\mu) A_\mu(x) \right|^2 \right)^{\frac{p}{2}} dx$$
$$\leqslant A_p''^p \sum_{\nu=0}^{m} \left\| \sum_{\mu=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} (1-r^\mu) A_\mu(x) \right\|_{L_p}^p$$
$$\leqslant A_p''^p (1-r)^p \left\{ \|A_1(x)\|_{L_p}^p + \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{\mu=2^{\nu-1}}^{2^\nu-1} \mu^{p-1} E_\mu^p(f)_{L_p} \right\}$$
$$\leqslant A_p''^p (1-r)^p \sum_{\mu=0}^{n} (1+\mu)^{p-1} E_\mu^p(f)_{L_p}.$$

当 $2 \leqslant p \leqslant \infty$ 时，由敏可夫斯基不等式，我们见到

$$\sigma_1 \leqslant A_p'' \left\{ \sum_{\nu=0}^{m} \left\| \sum_{\mu=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} (1-r^\mu) A_\mu(x) \right\|_{L_p}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant A_p' A_p'' (1-r) \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1) E_\nu^2(f)_{L_p} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

结合关于 σ_2 的不等式以及关于 σ_1 的两个结果，我们得到

$$A(f,\ r^n)_{L_p} \leqslant A_p^*(1-r) \left\{ \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{1}{1-r}\right]} (\nu+1)^{\gamma-1} E_\nu^\gamma(f)_{L_p} \right\}^{\frac{1}{\gamma}} + A_p^* E_n(f)_{L_p}$$
$$\leqslant A_p^*(1-r) \left\{ \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{1}{1-r}\right]} (1+\nu)^{\gamma-1} E_\nu^\gamma(f)_{L_p} \right\}^{\frac{1}{\gamma}}$$
$$\leqslant A_p^*(1-r) \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} r^\nu (1+\nu)^{\gamma-1} E_\nu^\gamma(f)_{L_p} \right\}^{\frac{1}{\gamma}}.$$

定理 1 证明完毕.

定理 2 设$\{\lambda_\nu(r)\}$是一三角阵

$$1=\lambda_0(r),\ \lambda_1(r),\ \cdots,\ \lambda_\gamma(r)\quad (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots),$$

$$L_r=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left|\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{r}\lambda_\nu(r)\cos\nu\theta\right|d\theta,$$

$$\gamma(\mu,\ r)=\int_0^\pi\left|\frac{1-\lambda_\mu(r)}{2}+\sum_{\nu=1}^{\mu-1}(1-\lambda_{\mu-\nu}(r))\cos\nu\theta\right|d\theta,\qquad \mu\leqslant r,$$

则当$f(x)\in L_p(1\leqslant p\leqslant\infty)$($L_\infty$中的$f$是有界函数)时,

$$R_r(f;\ \lambda)_{L_p}\leqslant C\Big\{(1+L_r)E_r(f)_{L_p}+\gamma(r;\ r)E_{2^m}(f)_{L_p}$$

$$+\sum_{\nu=0}^{m-1}\gamma(2^{\nu+1};\ r)E_{2^\nu-1}(f)_{L_p}\Big\},$$

这里$2^m\leqslant r<2^{m+1}$, C是与f, r, p无关的数.

【证明】 将$\gamma(n,\ r)$中函数写成$F_n(r,\ \theta)$:

$$\gamma(n,\ r)=\int_0^\pi|F_n(r,\ \theta)|d\theta.$$

又设 $T_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n}{}'(\alpha_\nu\cos\nu x+\beta_\nu\sin\nu x)$, 则

$$\sum_{\nu=1}^{n}{}'(1-\lambda_\nu(r))(\alpha_\nu\cos\nu x+\beta_\nu\sin\nu x)$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}T_n(x+\theta)\cos n\theta F_n(r,\ \theta)d\theta.$$

事实上,上式左端等于

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}T_n(x+\theta)\sum_{\nu=1}^{n}(1-\lambda_\nu(r))\cos\nu\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}T_n(x+\theta)\Big\{\sum_{\nu=1}^{n}(1-\lambda_\nu(r))\cos\nu\theta$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n-1}(1-\lambda_\nu(r))\cos(2n-\nu)\theta\Big\}\cdot d\theta$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}T_n(x+\theta)\cos n\theta\Big\{\frac{1-\lambda_n(r)}{2}$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n-1}(1-\lambda_\nu(r))\cos(n-\nu)\theta\Big\}\,d\theta.$$

现设$T_n(x)$是"最佳逼近"的多项式;

$$E_n(f)_{L_p}=\|f(x)-T_n(x)\|_{L_p}\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots).$$

设 $0\leqslant k\leqslant \nu\leqslant r$，置

$$\rho_k(\nu;\ r,\ x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}T_k(x+\theta)\sum_{\mu=1}^{\nu}(1-\lambda_\mu(r))\cos\nu\theta\,d\theta,$$

则 $\rho_0(2;\ r,\ x)=0$. 当 $\nu>k$ 时，$\rho_k(\nu;\ r,\ x)=\rho_k(k;\ r,\ x)$. 显然地

$$R_r(T_r;\ \lambda)_{L_p}=\|\rho_r(r;\ r,\ x)\|_{L_p}.$$

当 $2^m\leqslant r<2^{m+1}$ 时，上式左端 $R_r(T_r;\ \lambda)_{L_p}$ 不大于

$$\begin{aligned}&\|\rho_2(2;\ r,\ x)-\rho_0(z;\ r,\ x)\|_{L_p}\\&+\sum_{\mu=1}^{m-1}\|\rho_{2^{\mu+1}}(2^{\mu+1};\ r,\ x)-\rho_{2^\mu}(2^{\mu+1};\ r,\ x)\|_{L_p}\\&+\|\rho_r(r;\ r,\ x)-\rho_{2^m}(r;\ r,\ x)\|_{L_p}.\end{aligned}$$

其中第 μ 项等于

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{T_{2^{\mu+1}}(x+\theta)-T_{2^\mu}(x+\theta)\}\sum_{l=1}^{2^{\mu+1}}(1-\lambda_l(r))\cos l\theta\right\|_{L_p}\\&=\left\|\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\{T_{2^{\mu+1}}(x+\theta)-T_{2^\mu}(x+\theta)\}\cos 2^{\mu+1}\theta F_{2^{\mu+1}}(r;\ \theta)d\theta\right\|_{L_p}\\&=O(1)\gamma(2^{\mu+1};\ r)E_{2^\mu}(f)_{L_p}.\end{aligned}$$

从而得到

$$\begin{aligned}R_r(T_r;\ \lambda)_{L_p}\leqslant C\Big\{&\gamma(2,\ r)E_0(f)_{L_p}\\&+\sum_{\mu=1}^{m-1}\gamma(2^{\mu+1};\ r)E_{2^\mu}(f)_{L_p}+\gamma(r,\ r)E_{2^m}(f)_{L_p}\Big\}.\end{aligned}$$

由是，定理的证明归结到建立不等式

$$R_r(f;\ \lambda)_{L_p}\leqslant\|f(x)-T_r(x)\|_{L_p}(1+L_r)+R_r(T_r;\ \lambda)_{L_p}.$$

这个式子的左端不大于

$$\begin{aligned}&\|f-T_r\|_{L_p}+\left\|\sum_{\nu=0}^{r}\lambda_\nu A_\nu(x)-\sum_0^r(\alpha_\nu\cos\nu x+\beta_\nu\sin\nu x)\lambda_\nu\right\|_{L_p}\\&\qquad+\left\|\sum_{\nu=0}^{r}\lambda_\nu(\alpha_\nu\cos\nu x+\beta_\nu\sin\nu x)-T_r\right\|_{L_p}\\&=\|f-T_r\|_{L_p}+\left\|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{f(x+\theta)-T_r(x+\theta)\}\right.\\&\qquad\left.\cdot\left\{\frac{1}{2}+\lambda_\nu\cos\nu\theta\right\}d\theta\right\|_{L_p}+R_r(T_r;\ \lambda)_{L_p},\end{aligned}$$

这里 $\lambda_\nu=\lambda_\nu(r)$, $A_\nu=A_\nu(x)$. 证明完毕.

现在再用费耶的部分和的算术平均来逼近连续函数.

定理 3 假如 $f(x)\in C_{2\pi}$, 那末对于 $|f(x)-\sigma_{n-1}(f, x)|$ 的最大值

$$\rho_n(f)=\|f-\sigma_{n-1}(f)\|,$$

有绝对常数 B 适合

$$\rho_n(f)\leqslant\frac{B}{n}(E_1(f)+\cdots+E_n(f))\quad(n=1, 2, \cdots).$$

这是斯捷切金的定理(见苏联科学院数学研究所的丛书 LXII).

【证明】 对于正整数 n, 有整数 p 如下:

$$2^p\leqslant n<2^{p+1}.$$

由是

$$\begin{aligned}\sigma_{n-1}(f)&=\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1}S_\nu(f)\\&=\frac{1}{n}\left\{S_0(f)+\sum_{\mu=1}^{p-1}\sum_{2^{\mu-1}}^{2^\mu-1}S_\nu(f)+\sum_{\nu=2^{p-1}}^{n-1}S_\nu(f)\right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f-\sigma_{n-1}(f)=\frac{1}{n}\bigg\{&(f-S_0(f))+\sum_{\mu=1}^{p-1}\sum_{2^{\mu-1}}^{2^\mu-1}(f-S_\nu(f))\\&+\sum_{\nu=2^{p-1}}^{n-1}(f-S_\nu(f))\bigg\}.\end{aligned}$$

利用伐赖-普山的记法

$$\sigma_{nm}(x, f)=\frac{1}{m+1}\sum_{\nu=n-m}^{n}S_\nu(x, f)\quad(0\leqslant m\leqslant n),$$

以及他的不等式

$$\|f-\sigma_{nm}(f)\|\leqslant 2\,\frac{n+1}{m+1}\,E_{n-m+1}(f),$$

我们从

$$\begin{aligned}f-\sigma_{n-1}(f)=\frac{1}{n}\bigg\{&(f-\sigma_{00}(f))+\sum_{\mu=1}^{p-1}2^{\mu-1}(f-\sigma_{2^\mu-1,\ 2^{\mu-1}-1}(f))\\&+(n-2^{p-1})\cdot(f-\sigma_{n-1,\,n-2^{p-1}-1}(f))\bigg\}\end{aligned}$$

得到

$$\rho_n(f)\leqslant\frac{2}{n}\Big\{E_1+\sum_{\mu=1}^{p-1}(2^\mu+2^{\mu-1}-1)E_{2^{\mu-1}}(f)$$
$$+(2n-2^{p-1}-1)E_{n-2^{p-1}}(f)\Big\}$$
$$\leqslant\frac{2}{n}\Big\{3E_1(f)+6\sum_{\mu=2}^{p-1}\sum_{\nu=2^{\mu-1}+1}^{2^{\mu-1}}E_\nu(f)$$
$$+6\sum_{\nu=2^{p-1}+1}^{n}E_\nu(f)\Big\}\leqslant\frac{12}{n}\sum_{\nu=1}^{n}E_\nu(f).$$

我们还要证明伐赖-普山的不等式. 记 $E=E_{n-m+1}(f)$, 设 T 是适合 $\|f-T\|$ 的最大值为 E 的 $n-m$ 阶三角多项式, 则因 $|f-T|\leqslant E$, 所以 $f-T$ 的一切费耶平均的绝对值都不大于 E.

假如 S_ν 与 σ_ν 分别表示阶数不高于 $n-m$ 的三角多项式 t 的部分和以及费耶平均, 那末恒等式

$$(n+1)\sigma_n=S_0+S_1+\cdots+S_{n-m-1}+(S_{n-m}+\cdots+S_n)$$

的末项等于 $(m+1)t$, 从而得到

$$t-\frac{(n+1)\sigma_n-(n-m)\sigma_{n-m-1}}{m+1}=0.$$

将 t, σ_n, σ_{n-m} 分别代以 T, $\sigma_n(f)$, $\sigma_{n-m}(f)$, 其所产生的误差决不超过

$$E+\frac{(n+1)E+(n-m)E}{m+1}=\frac{2n+2}{m+1}E,$$

由是得到所要的不等式. 证明完毕.

定理 4 假如 $f(x)\in L_p(0,2\pi)$, 那末当 $1\leqslant p<\infty$ 时,

$$\|f-\sigma_{n-1}(f)\|_p\leqslant\frac{B_p}{n}(E_1(f)_p+\cdots+E_n(f)_p).$$

证明与定理 3 的证明相同.

定理 5 设 $f\in C_{2\pi}$, f 的连续性模是 $\omega(\delta)$, 则有绝对常数 B' 适合

$$\|f-\sigma_{n-1}(f)\|\leqslant\frac{B'}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\omega\Big(\frac{1}{\nu}\Big).$$

【证明】 由于

$$\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^4=(n+2[(n-1)\cos t+(n-2)\cos 2t+\cdots$$
$$+\cos(n-1)t])^2$$

是一个阶数为 $2n-2$ 的三角多项式，它在 $(-\pi,\ \pi)$ 上的积分等于

$$\pi\left[2n^2+4\sum_{k=1}^{n-1}(n-1)^2\right]=\frac{(n-1)n(2n+1)}{6},$$

所以

$$U_n(x)=\frac{3}{2\pi n(2n^2+1)}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+u)\left(\frac{\sin\frac{nu}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^4du$$

也是一个 $2n-2$ 阶的三角多项式．从而得到

$$U_n(x)-f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)\}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4dt.$$

由于

$$|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|<2\omega(2t),$$

$$\omega(2t)=\omega\left(2nt\cdot\frac{1}{n}\right)\leqslant(2nt+1)\,\omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

所以

$$\begin{aligned}|U_n(x)-f(x)|&\leqslant\omega\left(\frac{1}{n}\right)\left\{1+\frac{12}{\pi(2n^2+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4dt\right\}\\&<\omega\left(\frac{1}{n}\right)\left\{1+\frac{12}{\pi(2n^2+1)}\ \frac{\pi^2n^2}{4}\right\}\\&\leqslant\left(1+\frac{3\pi}{2}\right)\omega\left(\frac{1}{n}\right)<6\omega\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

至于上式中的积分之所以小于 $\frac{\pi^2n^2}{4}$，可以从

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4dt<n^4\int_0^{\frac{\pi}{2n}}tdt+\frac{\pi^4}{16}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{t^3}$$

明白．由是

$$|U_n(x)-f(x)|<6\omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

因此

$$E_{2n-2}(f)\leqslant6\omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

由是可知

$$E_n(f)\leqslant12\,\omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

将此结果与定理3相结合,就得到

$$\|f-\sigma_{n-1}(f)\| \leqslant \frac{12B}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \omega\left(\frac{1}{\nu}\right).$$

证明完毕.

附注 $E_n(f) \leqslant 12\omega\left(f;\ \frac{1}{n}\right)$ 是爵克松 (D. Jackson) 的定理, 另一方面,王兴华(杭大学报第一卷)证明

$$\|f-\sigma_n(f)\| \leqslant \frac{3}{2}\omega\left(\frac{1+\log n}{2n}\pi\right),$$

$\frac{3}{2}$ 是最佳的因子.

定理 6 设 $F=\{F_n\}$, $F_n \downarrow 0$. 记适合 $E_n(f) \leqslant F_n$ 的一切连续函数成函数族 $C(F)$,

$$\rho_n(C(F)) = \sup_{f\in C(F)} \rho_n(f).$$

那末

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} F_\nu \leqslant \rho_n[C(F)] \leqslant \frac{B_1}{n}\sum_{1}^{n} F_\nu.$$

【证明】 由定理3, 当 $f \in C(F)$ 时,

$$\rho_n(f) \leqslant \frac{B}{n}(E_1(f)+\cdots+E_n(f)) \leqslant \frac{B}{n}(F_1+\cdots+F_n).$$

因此,

$$\rho_n[C(F)] \leqslant \frac{B}{n}(F_1+\cdots+F_n).$$

我们还要证明

$$\rho_n(C(F)) \geqslant \frac{1}{n}(F_1+\cdots+F_n).$$

事实上, $C(F)$ 中有 $f_1(x)$ 适合于

$$\rho_n(f_1) = \frac{1}{n}(F_1+\cdots+F_n) \quad (n=1,\ 2,\ \cdots).$$

设 $a_n \geqslant 0$, $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n < \infty$, $f(x) = \sum a_n \cos nx$. 很明显,

$$E_n(f) \leqslant \|f-s_{n-1}(f)\| \leqslant \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu \quad (n=1,\ 2,\ \cdots).$$

从而

$$\rho_n(f)=\frac{1}{n}\left\|\sum_{\nu=0}^{n-1}(f-s_\nu(f))\right\|\leqslant\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1}\|f-s_\nu(f)\|$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1}\sum_{\mu=\nu+1}^{\infty}a_\mu=\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\nu a_\nu+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}a_\nu.$$

另一方面,

$$\rho_n(f)\geqslant f(0)-\sigma_{n-1}(0,f)=\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu-\sum_{\nu=1}^{n-1}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)a_\nu$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\nu a_\nu+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}a_\nu.$$

总的说来,

$$\rho_n(f)=\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\nu a_\nu+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}a_\nu\quad(n=1,2,\cdots).$$

对于函数$f_1(x)=\sum_1^{\infty}(F_n-F_{n+1})\cos nx$来说, $E_n(f)\leqslant F_n$,

$$\rho_n(f_1)=\frac{1}{n}(F_1+\cdots+F_n).$$

定理证明完毕.

6. 适合$\int_0^{2\pi}\varphi(t)dt=0$的$\varphi(t)$所产生的瓦伊耳函数

设$\omega(\delta)$是一连续模,

$$0\leqslant\omega(\delta')-\omega(\delta)\leqslant\omega(\delta'-\delta)\quad(0\leqslant\delta<\delta').$$

当

$$r\geqslant0,\quad\varphi(t+2\pi)\equiv\varphi(t),$$

$$\omega(\varphi,\delta)\leqslant M\omega(\delta),\quad\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)dt=0$$

时,称

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^r\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)\cos\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt$$

是由$\varphi(t)$所产生的**瓦伊耳**(Weyl)**函数**,简记$f\in MW_\beta^rH[\omega]$.

假如

$$\omega_2(t,f^{(r)})=\sup_{h<\delta}|f^{(r)}(x+h)+f^{(r)}(x-h)-2f^{(r)}(x)|\leqslant M\omega(t),$$

$$\omega(\lambda t)\leqslant(\lambda+1)\omega(t)\quad(\lambda>0)$$

那末我们说 $f(x)$ 属于 $MW_\beta^r H_2(\omega)$. 当 $\varphi(x)\in MH_2(\omega)$ 时,

$$f(x)\in MW_\beta^r H_2(\omega).$$

下面是叶菲莫夫的定理(1960,苏联科学通报,数学之辑第24卷):

定理 1 设 $f(x)\in W_\beta^{(r)}H_2(\omega)\ (r>0)$,

$$\int_0^{\frac{1}{n}}\omega(t)t^{-1}dt=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

则 $f(x)-S_n(f,x)$ 等于

$$R_n(f,x)=f(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)\sum_{k=1}^{n}k^{-r}\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt$$

$$=\frac{1}{(n+1)^r}r_{n,\beta}(\varphi,x)+O\left(n^{-r}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

这里

$$r_{n,\beta}(\varphi,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{\varphi(x)-\varphi(x+t)\}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}}dt.$$

【证明】 简写

$$s_k(t)=\sin\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)t+\frac{\beta\pi}{2}\right],$$

我们见到

$$\pi R_n(f,x)=-\sum_{k=n}^{\infty}(k+1)^{-r}\int_{-\pi}^{\pi}\{\varphi(x+t)-\varphi(x)\}\frac{s_k(t)-s_{k-1}(t)}{2\sin\frac{t}{2}}dt$$

$$=\sum_{k=n+1}^{\infty}\Delta(k^{-r})\int_{-\pi}^{\pi}\{\varphi(x+t)-\varphi(x)\}\frac{s_k(t)}{2\sin\frac{t}{2}}dt$$

$$-(n+1)^{-r}\int_{-\pi}^{\pi}\{\varphi(x+t)-\varphi(x)\}\frac{s_n(t)}{2\sin\frac{t}{2}}dt.$$

末项是 $r_{n,\beta}(\varphi,x)$. 写着

$$F_k(t)=2\cos\frac{\beta\pi}{2}\sin^2\frac{k+1}{2}t+\sin\frac{\beta\pi}{2}\sin(k+1)t,$$

我们见到

$$s_k(t)=\frac{F_k(t)-F_{k-1}(t)}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

由是上式右方第一项的和可以写成

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\Delta(k^{-r})\int_{-\pi}^{\pi}[\varphi(x+t)-\varphi(x)]\frac{F_k(t)dt}{4\sin^2\frac{t}{2}}$$

$$-\sum_{k=n}^{\infty}\Delta((k+1)^{-r})\int_{-\pi}^{\pi}[\varphi(x+t)-\varphi(x)]\frac{F_k(t)dt}{4\sin^2\frac{t}{2}}$$

$$=\sum_{k=n+1}^{\infty}\Delta^2(k^{-r})\int_{-\pi}^{\pi}[\varphi(x+t)-\varphi(x)]\frac{F_k(t)dt}{4\sin^2\frac{t}{2}}$$

$$-\Delta((n+1)^{-r})\int_{-\pi}^{\pi}(\varphi(x+t)-\varphi(x))\frac{F_n(t)}{4\sin^2\frac{t}{2}}dt$$

$$=\sum_{k=n+1}^{\infty}\Delta^2(k^{-r})\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\varphi(x)-\varphi(x+t)}{4\sin^2\frac{t}{2}}(F_n(t)-F_k(t))dt$$

$$=\cos\frac{\beta\pi}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\Delta^2(k^{-r})$$

$$\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\varphi(x)-\varphi(x+t)}{4\sin^2\frac{t}{2}}\left[\sin^2\frac{n+1}{2}t-\sin^2\frac{k+1}{2}t\right]dt$$

$$+\sin\frac{\beta\pi}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\Delta^2(k^{-r})$$

$$\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\varphi(x)-\varphi(x+t)}{4\sin^2\frac{t}{2}}\left[\sin(n+1)\frac{t}{2}-\sin\frac{k+1}{2}t\right]dt.$$

将右端第一第二两项的和分别记做Σ_1与Σ_2. 我们只要证明

$$\Sigma_1=O\left(n^{-r}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right),\quad \Sigma_2=O\left(n^{r}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

就好了. 要证明第一个等式, 首先建立

引理 1 设$\varphi(x)\in C_{2\pi}$, 则φ的费耶平均$\sigma_{n-1}(\varphi,x)$与$\varphi(x)$的差

$$\varphi(x)-\sigma_{n-1}(\varphi,x)=\frac{1}{2\pi}\int_a^{\infty}\Delta^2_{\frac{2t}{n}}\varphi(x)\frac{dt}{t^2}+O\left(\omega_2\left(\varphi,\frac{1}{n}\right)\right),$$

这里

$$a>0,\ \Delta^2_{\frac{2t}{n}}\varphi(x)=\varphi\left(x+\frac{2t}{n}\right)+\varphi\left(x-\frac{2t}{n}\right)-2\varphi(x).$$

利用 $1/\sin^2 t=\sum(t-k\pi)^{-2}$, 我们得到

$$\begin{aligned}
&\sigma_{n-1}(\varphi,\ x)-\varphi(x)\\
&=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\Delta^2_{2t}\varphi(x)\sin^2 nt\sum_{-\infty}^{\infty}(t+k\pi)^{-2}dt\\
&=\frac{1}{n\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Delta^2_{2t}\varphi(x)\left(\frac{\sin nt}{t}\right)^2dt\\
&=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\infty}\Delta^2_{2t}\varphi(x)\left(\frac{\sin nt}{t}\right)^2dt\\
&=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\Delta^2_{2t}\varphi(x)\left(\frac{\sin nt}{t}\right)^2dt\\
&\quad+\frac{1}{n\pi}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\infty}\Delta^2_{2t}\varphi(x)\frac{1-\cos 2nt}{2t^2}dt\\
&=\frac{1}{2n\pi}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\infty}\Delta^2_{2t}\varphi(x)\frac{dt}{t^2}+\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\Delta^2_{2t}\varphi(x)\left(\frac{\sin nt}{t}\right)^2dt\\
&\quad-\frac{1}{2n\pi}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\infty}\Delta^2_{2t}\varphi(x)\frac{\cos 2nt}{t^2}dt\\
&=\frac{1}{2n\pi}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\infty}\Delta^2_{2t}\varphi(x)\frac{dt}{t^2}+I_1-I_2,
\end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned}
|I_1|&\leqslant\frac{1}{n\pi}\omega_2\left(\varphi,\ \frac{\pi}{n}\right)n^2\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2dt\\
&\leqslant\frac{1}{2}(\pi+1)^2\omega_2\left(\varphi,\ \frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

设 $T_{n-1}(x)$ 是适合

$$E_n(f)=\inf\|\varphi(x)-T_{n-1}(x)\|=\|\varphi(x)-T_{n-1}(x)\|$$

的三角多项式, 则

$$\begin{aligned}
I_2&=\frac{1}{2n\pi}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\infty}\Delta_{2t}^2\varphi(x)\frac{\cos 2nt}{t^2}dt\\
&=\frac{1}{2n\pi}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\infty}\Delta_{2t}^2T_{n-1}(x)\frac{\cos 2nt}{t^2}dt\\
&\quad+\omega_2\left(\varphi,\ \frac{1}{n}\right)O\left(\frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\infty}\frac{dt}{t^2}\right)\\
&=I_2'+O\left(\omega_2\left(\varphi,\ \frac{1}{n}\right)\right),
\end{aligned}$$

第一项I_2'可以写成

$$\begin{aligned}
I_2'&=\frac{1}{2n\pi}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\infty}\frac{\Delta_{2t}^2T_{n-1}(x)}{t^2}d\left(\frac{\sin 2nt}{2n}\right)\\
&=\frac{1}{4\pi n^2}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\infty}\frac{d}{dt}\left(\frac{\Delta_{2t}^2T_{n-1}(x)}{t^2}\right)d\,\frac{\cos 2nt}{2n}\\
&=\frac{-1}{8\pi n^3}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\infty}\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\Delta_{2t}^2T_{n-1}(x)}{t^2}\right]\cos 2nt\,dt\\
&\quad+\frac{1}{2\pi^3n}\,\frac{d}{dt}\,\Delta_{2t}^2T_{n-1}(x)\Big|_{t=\frac{\pi}{2n}}^{\infty}-\frac{2}{\pi^4}\,\Delta_{\frac{\pi}{n}}^2\,T_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

记右端第一项为I_2''，那末

$$I_2'=I_2''+O\left(\omega_2\left(\varphi,\ \frac{1}{n}\right)\right),\quad I_2=I_2''+O\left(\omega_2\left(\varphi,\ \frac{1}{n}\right)\right).$$

事实上，右端第三项的绝对值小于

$$\frac{2}{\pi^4}\,\omega_2\left(T_{n-1},\ \frac{1}{n}\right)\leqslant C\omega_2\left(\varphi,\ \frac{1}{n}\right).$$

又因

$$\|T_{n-1}''(x)\|\leqslant Cn^2\omega\left(\varphi,\ \frac{1}{n}\right),$$

所以右端第二项的绝对值小于

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi^3n}\left|2\left[T_{n-1}'\left(x+\frac{\pi}{n}\right)-T_n'\left(x-\frac{\pi}{n}\right)\right]\right|\\
&\quad=\frac{1}{2\pi^3n}\,\frac{4\pi}{n}\left|\,T_n''\left(x+\frac{\theta\pi}{n}\right)\right|\leqslant C\omega_2\left(\varphi,\ \frac{1}{n}\right),
\end{aligned}$$

这里$|\theta|<1$. 下面的θ_1, …的绝对值也都小于1, 简写T_{n-1}为T, 则

$$\Delta_{2t}^2 T(x)=t^2 T''(x+2\theta,\ t),$$

$$\frac{d}{dt}\Delta_{2t}^2 T(x)=8tT''(x+2\theta_2 t),$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\Delta_{2t}^2 T(x)=4[T''(x+2t)+T''(x-2t)].$$

由是

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\Delta_{2t}^2 T(x)}{t^2}\right]\\
&=\frac{1}{t^2}\frac{d^2}{dt^2}\Delta_{2t}^2 T(x)-\frac{4}{t^3}\frac{d}{dt}\Delta_{2t}^2 T(x)+\frac{6}{t^4}\Delta_{2t}^2 T(x)\\
&=\frac{1}{t^2}\left|4[T''(x+2t)+T''(x-2t)-32T''(x+2\theta_1 t)+6T''(x+2\theta_2 t)\right|\\
&=O\left(\frac{n^2}{t^2}\omega_2\left(\varphi,\ \frac{1}{n}\right)\right).
\end{aligned}$$

从而

$$I_2''=O\left(\frac{1}{n^3}\right)\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\infty}\frac{n^2}{t^2}\omega_2\left(\varphi,\ \frac{1}{n}\right)dt=O\left(\omega_2\left(\varphi,\ \frac{1}{n}\right)\right),$$

$$I_2=O\left(\omega_2\left(\varphi,\ \frac{1}{n}\right)\right),$$

总结起来, 我们得到

$$\sigma_{n-1}(\varphi,\ x)-\varphi(x)=\frac{1}{2\pi n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\infty}\Delta_{2t}^2\varphi(x)t^{-2}dt+O\left(\omega_2\left(\varphi,\ \frac{1}{n}\right)\right).$$

另一方面, 当$|t|\leqslant\max\left(\frac{a\pi}{n},\ \frac{\pi}{2n}\right)$时,

$$\sup_t|\Delta_{2t}^2\varphi(x)|\text{是}O\left(\omega_2\left(\varphi,\ \frac{1}{n}\right)\right).$$

从而, 当$a>0$时,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2\pi n}\int_{\frac{a}{n}}^{\frac{\pi}{2n}}\frac{\Delta_{2t}^2\varphi(x)}{t^2}dt\right|&=O\left(\frac{1}{n}\omega_2\left(\varphi,\ \frac{1}{n}\right)\right)\\
&=O\left(\omega_2\left(\varphi,\ \frac{1}{n}\right)\right),
\end{aligned}$$

$$\sigma_{n-1}(\varphi, x)-\varphi(x)=\frac{1}{2\pi n}\int_{\frac{a}{n}}^{\infty}\Delta_{2t}^2\varphi(x)t^{-2}dt+O\left(\omega_2\left(\varphi, \frac{1}{n}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_a^{\infty}\Delta_{2t/n}^2\varphi(x)t^{-2}dt+O\left(\omega_2\left(\varphi, \frac{1}{n}\right)\right).$$

引理1证毕.

现在估计Σ_1. $\frac{1}{\pi}\Sigma_1$中的第k项是

$$\Delta^2(k^{-r})\{(n+1)[\varphi(x)-\sigma_n(\varphi, x)]-(k+1)[\varphi(x)-\sigma_k(\varphi, x)]\}.$$

由于

$$\varphi(x)-\sigma_k(\varphi, x)=-\frac{1}{\pi(k+1)}\int_{\frac{1}{k+1}}^{\infty}\Delta_t^2\varphi(x)\frac{dt}{t^2}+O\left(\omega_2\left(\varphi, \frac{1}{k}\right)\right),$$

所以由引理1, 写着$\omega_2(\varphi, t)=\omega(t)$, 我们见到

$$\frac{1}{\pi}\Sigma_1=\sum_{k=n+1}^{\infty}\Delta^2(k^{-r})\left\{-\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\infty}\Delta_t^2\varphi(x)\frac{dt}{t^2}+O(n)\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{k+1}}^{\infty}\Delta_t^2\varphi(x)\frac{dt}{t^2}+O(k)\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{k=n+1}^{\infty}\Delta^2(k^{-r})\left\{\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{n+1}}\Delta_t^2\varphi(x)\frac{dt}{t^2}+O(k)\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$=O\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}k^{-r-2}\cdot k\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)=O\left(n^{-r}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

其次估计Σ_2, 其中的积分是

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{\varphi(x)-\varphi(x+t)\}\frac{\sin(k+1)t}{4\sin^2\frac{t}{2}}dt$$

$$=(k+1)\{\tilde{\varphi}(x)-\tilde{\sigma}_k(\varphi, x)\}.$$

估计是靠着

引理2　设$\varphi(x)\in H_2(\omega)$, 则当$a$是方程

$$\int_0^u\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}$$

的最小正根$u=a$时,

$$\tilde{\varphi}(x)-\tilde{\sigma}_{n-1}(\varphi, x)$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^a\left\{\varphi\left(x-\frac{t}{n}\right)-\varphi\left(x+\frac{t}{n}\right)\right\}\frac{\sin t}{t^2}dt+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

设 $a=a_1$, $a_\nu(\nu=1, 2, \cdots)$都适合

$$\int_0^{a_\nu}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2},$$

而以 a_1 为最小. 我们见到

$$\tilde{\varphi}(x)-\tilde{\sigma}_{n-1}(\varphi, x)$$
$$=\frac{1}{4n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{\varphi(x)-\varphi(x+t)\}\frac{\sin nt}{\sin^2\frac{t}{2}}dt$$
$$=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\infty}\{\varphi(x-t)-\varphi(x+t)\}\frac{\sin nt}{t^2}dt$$
$$=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{a}{n}}\{\varphi(x-t)-\varphi(x+t)\}\frac{\sin nt}{t^2}dt+\frac{1}{n\pi}\sum_{k=1}^{\infty}I_k,$$

这里

$$I_k=\int_{\frac{a_k}{n}}^{\frac{a_{k+1}}{n}}\psi(t)\frac{\sin nt}{t^2}dt,\ \psi(t)\equiv\psi_x(t)=\varphi(x-t)-\varphi(x+t),$$
$$\psi(t)\in 2H_2(\omega),\ \psi(0)=0.$$

设 C_k 只与 k 有关系，那末 t 的函数 $\psi_k(t)=\psi(t)+C_kt$ 在 $t=0$ 等于 0:

$$\psi_k(0)=0.$$

由于

$$I_k=\int_{\frac{a_k}{n}}^{\frac{a_{k+1}}{n}}(\psi(t)+C_kt)\frac{\sin nt}{t^2}dt,$$

所以我们可以选取如下的 C_k: $\psi_k\left(\frac{a_{k+1}}{n}\right)=0$. 又因 $\psi(t)\in 2H_2(\omega)$, 从 $\psi_k(0)=\psi_k\left(\frac{a_{k+1}}{n}\right)$ 可以得到(证明见下)

$$\psi_k(t)=O\left(\log\frac{2a_{k+1}}{nt}\right)\omega(t),$$

从而

$$\psi_k\left(\frac{a_{k+1}}{n}-t\right)=O\left(\log\frac{2a_{k+1}}{n\left(\frac{a_{k+1}}{n}-t\right)}\omega\left(\frac{a_{k+1}}{n}-t\right)\right).$$

因此，

$$I_k=O\left(\int_{a_k/n}^{a_{k+1}/n}\log\frac{2a_{k+1}}{n\left(\frac{a_{k+1}}{n}-t\right)}\omega\left(\frac{a_{k+1}}{n}-t\right)\frac{dt}{t^2}\right)$$

$$=O\left(\int_0^{(a_{k+1}-a_k)/n}\log\frac{2a_{k+1}}{nt}\omega(t)\frac{n^2}{a_k^2}dt\right)$$

$$=O\left(\frac{n^2}{a_k^2}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\int_0^{\frac{a_{k+1}-a_k}{n}}t\log\frac{2a_{k+1}}{nt}dt\right)$$

$$=O\left(\frac{n}{a_k^2}\omega\left(\frac{1}{n}\right)(a_{k+1}-a_k)\log\frac{2a_{k+1}}{a_{k+1}-a_k}\right)$$

$$=O\left(\frac{n}{k^2}\log(1+k)\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

$$\frac{1}{n\pi}\sum_{k=1}^{\infty}I_k=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

引理证明的完成，还要估计$\psi_k(t)$. 由于

$$\omega(\lambda h)\leqslant(\lambda+1)\omega(h)\ (\lambda>0),$$

$$|\psi_k(t+h)+\psi_k(t-h)-2\psi_k(t)|\leqslant\omega(h),$$

所以

$$2\psi_k(t)-\psi_k(2t)\leqslant\omega(t),$$

$$2\psi_k\left(\frac{a_{k+1}}{2^\nu n}\right)-\psi_k\left(\frac{a_{k+1}}{2^{\nu-1}n}\right)\leqslant\omega\left(\frac{a_{k+1}}{2^\nu n}\right).$$

利用$\psi_k\left(\frac{a_{k+1}}{n}\right)=0$，我们见到

$$2^m\psi_k\left(\frac{a_{k+1}}{2^m n}\right)\leqslant\sum_{\mu=1}^{m}2^{\mu-1}\omega\left(\frac{a_{k+1}}{2^\mu n}\right)=\sum_{\mu=1}^{m}2^{\mu-1}\omega\left(\frac{a_{k+1}2^{m-\mu}}{2^m n}\right)$$

$$\leqslant\omega\left(\frac{a_{k+1}}{2^m n}\right)\sum_{\mu=1}^{m}(2^{m-1}+2^{\mu-1}),$$

$$\psi_k\left(\frac{a_{k+1}}{2^m n}\right)\leqslant\frac{m}{2}\omega\left(\frac{a_{k+1}}{2^m n}\right)+O\left(\omega\left(\frac{a_{k+1}}{2^m n}\right)\right).$$

简写$d=\frac{1}{n}a_{k+1}$，作多边形（折线）函数$\Sigma(t)$，使

$$\Sigma\left(\frac{d}{2^m}\right)=\psi_k\left(\frac{d}{2^m}\right)$$

当 $m=0, 1, \cdots$ 时成立. 置

$$I_m=\left[\frac{d}{2^{m+1}}, \frac{d}{2^m}\right].$$

由于

$$|\Delta_h^2(\psi_k(t)-\Sigma(t))|=|\Delta_h^2\psi_k(t)|\leqslant\omega(h)=O\left(\omega\left(\frac{d}{2^m}\right)\right)$$

当 $t\pm h\in I_n$, $0<h\leqslant\frac{d}{2^{m+1}}$ 时,成立,所以

$$\Delta_h^2(\psi_k(t)-\Sigma(t))=O\left(\omega\left(\frac{d}{2^m}\right)\right)=O(\omega(t))$$

在 I_m 上成立. 这就是说: 当 $t\in I_m$ 时, $\psi_k(t)=\Sigma(t)+O(\omega(t))$. 由于 $\Sigma(t)$ 在 I_m 上表示一个直线段,所以当 $t\in I_m$ 时,

$$\begin{aligned}|\Sigma(x)|\leqslant&\frac{2^{m+1}}{d}\left\{\left|\psi_k\left(\frac{d}{2^m}\right)\right|\right.\\&\left.+\left|\psi_k\left(\frac{d}{2^{m+1}}\right)\right|\right\}\frac{d}{2^{m+1}}+\left|\psi_k\left(\frac{d}{2^{m+1}}\right)\right|\\&\leqslant\frac{Cm}{2}\omega\left(\frac{d}{2^m}\right)+O\left(\omega\left(\frac{d}{2^m}\right)\right).\end{aligned}$$

另一方面, 从 $\frac{d}{2^{m+1}}<t\leqslant\frac{d}{2^m}$ 得到

$$\log\frac{d}{2^{m+1}}<\log t\leqslant\log\frac{d}{2^m},$$

从而

$$m\leqslant\frac{1}{\log 2}\log\frac{d}{t},$$

$$\begin{aligned}|\Sigma(x)|&\leqslant\frac{C}{2\log 2}\log\frac{d}{t}\omega\left(\frac{d}{2^m}\right)+O\left(\omega\left(\frac{d}{2^m}\right)\right)\\&=O\left(\log\frac{2d}{t}\omega(t)\right),\end{aligned}$$

$$\psi_k(t)=O\left(\log\frac{2a_{k+1}}{nt}\right)\omega(t).$$

引理 2 证毕.

利用引理 2, 我们得到

$$\frac{1}{\pi}\Sigma_2=\sum_{k=n+1}^{\infty}\Delta^2(k^{-r})\{(n+1)[\tilde{\varphi}(x)-\tilde{\sigma}_n(\varphi,x)]$$

$$-(k+1)[\tilde{\varphi}(x)-\tilde{\sigma}_k(\varphi,x)]\}$$

$$=\sum_{k=n+1}^{\infty}\Delta^2(k^{-r})\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{a}{n+1}}[\varphi(x-t)-\varphi(x+t)]\frac{\sin(n+1)t}{t^2}dt\right.$$

$$+O\left(n\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{a}{k+1}}[\varphi(x-t)-\varphi(x+t)]$$

$$\left.\cdot\frac{\sin(k+1)t}{t^2}dt+O\left(k\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{k=n+1}^{\infty}\Delta^2(-k^{-r})\left\{\int_0^{\frac{a}{n+1}}\varphi_1(t)\frac{\sin(n+1)t}{t^2}dt\right.$$

$$\left.-\int_0^{\frac{a}{k+1}}\varphi_1(t)\frac{\sin(k+1)t}{t^2}dt\right\}+O\left(n^{-r}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

这里

$$\varphi_1(t)=\varphi(x-t)-\varphi(x+t),$$

$$\varphi_1(t)\in 2H_2(\omega),\quad \varphi_1(0)=\varphi_1(\pi)=0.$$

写着

$$\varphi_1(t)=\psi(t)+\frac{n+1}{a}\varphi_1\left(\frac{a}{n+1}\right)t,$$

则

$$\psi(0)=\psi\left(\frac{a}{n+1}\right)=0,$$

$$I_k\equiv\int_0^{\frac{a}{n+1}}\varphi_1(t)\frac{\sin(n+1)t}{t^2}dt-\int_0^{\frac{a}{k+1}}\varphi_1(t)\frac{\sin(k+1)t}{t^2}dt$$

$$=\int_0^{\frac{a}{n+1}}\psi(t)\frac{\sin(n+1)t}{t^2}dt-\int_0^{\frac{a}{k+1}}\psi(t)\frac{\sin(k+1)t}{t^2}dt.$$

由是，若能证得

$$\psi(t)=O\left(t\int_t^{\frac{2a}{n+1}}\frac{\omega(u)}{u^2}du\right),$$

那末有常数 C 适合

$$|I_k| \leqslant C\int_0^{\frac{a}{n+1}} t\left(\int_t^{\frac{2a}{n+1}} \frac{\omega(u)}{u^2}\,du\right)\frac{(n+1)t}{t^2}\,dt$$

$$+C\int_0^{\frac{a}{k+1}} t\left(\int_t^{\frac{2a}{n+1}} \frac{\omega(u)}{u^2}\,du\right)\frac{(k+1)t}{t^2}\,dt$$

$$\leqslant 2(k+1)\,C\int_0^{\frac{2a}{n+1}} \frac{\omega(u)}{u}\,du = O\left(k\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

从而

$$\frac{1}{\pi}\Sigma_2 = \frac{1}{\pi}\sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta^2(k^{-r})I_k = O(n^{-r})\omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

因此，定理 1 的证明，用下述引理 3 可以完成.

引理 3 设 $\psi(t)$ 是 $H_2(\omega)$ 中的一个函数与 t 的一次式的和，则当 $\psi(0)=\psi(d)=0$ 时，

$$\psi(t) = O\left(t\int_t^{2d} \frac{\omega(u)}{u^2}\,du\right) \quad (0\leqslant t\leqslant d).$$

作以 $2d$ 为周期的周期偶函数 $\psi^*(t)$，在 $[0,\ d]$ 上，$\psi^*(t)=\psi(t)$，我们见到

$$\psi^*(u+t)+\psi^*(u-t)-2\psi^*(t) = O(\omega_2(\psi,\ t)),$$

$$\psi^*(t) = O(\omega_2(\psi,\ 2d)).$$

设 $\frac{1}{m+1}<t\leqslant\frac{1}{m}$，$T_m(t)$ 是 $\psi^*(t)$ 是最佳逼近的 m 阶多项式，则

$$\psi^*(0)-\psi^*(-t) = T_m(0)-T_m(-t)+O\left(\omega_2\left(\psi^*,\ \frac{1}{m}\right)\right)$$

$$= -tT_m'(\theta t)+O\left(\omega_2\left(\psi^*,\ \frac{1}{m}\right)\right) \quad (|\theta|<1).$$

由于

$$\psi^*(0)=0,\ \ \omega\left(\frac{1}{m}\right)=O(\omega(t)),$$

所以从

$$\psi^*(t)+\psi^*(-t)-2\psi^*(0) = O(\omega_2(\psi,\ t))$$

得到

$$\psi^*(t) = -tT_m'(\theta t)+O\left(\omega\left(\frac{1}{m}\right)\right)+O(\omega(t))$$

$$= -tT_m'(\theta t)+O(\omega(t)).$$

利用

$$\|\psi^*(t)-T_m(t)\|=O\left(\omega_2\left(\psi^*,\ \frac{1}{m}\right)\right)$$

含有

$$\|T'_m(t)\|=O\left(\sum_{\nu=1}^{m}\omega_2\left(\psi^*,\ \frac{1}{\nu}\right)\right)$$

的事实(斯捷切金的定理),我们从上式得到

$$\psi^*(t)=O\left(t\sum_{\nu=1}^{m}\omega_2\left(\psi^*,\ \frac{1}{\nu}\right)\right)+O(\omega(t)).$$

设整数n_0适合$\frac{1}{n_0+1}<d\leqslant\frac{1}{n_0}$,则当$\nu\leqslant n_0$时,

$$\omega_2\left(\psi^*,\ \frac{1}{\nu}\right)=O(\omega_2(\psi,\ 2d)),$$

$$t\sum_{\nu=1}^{n_0}\omega_2\left(\psi^*,\ \frac{1}{\nu}\right)=O(t\omega_2(\psi^*,\ 2d)n_0)=O\left(\frac{t}{d}\omega(2d)\right)$$

$$=O\left(\frac{t}{d}\omega(t)\ \frac{2d+t}{t}\right)=O(\omega(t)).$$

因此,当$0\leqslant t\leqslant d$时,

$$\psi^*(t)=\psi(t)=O\left(\omega(t)+t\sum_{\nu=n_0+1}^{n}\omega_2\left(\psi^*,\ \frac{1}{\nu}\right)\right)$$

$$=O\left(\omega(t)+t\int_{n_0}^{n}\omega_2\left(\psi,\ \frac{1}{u}\right)du\right)$$

$$=O\left(\omega(t)+t\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n_0}}\frac{\omega(u)}{u^2}du\right)$$

$$=O\left(\omega(t)+t\int_{t}^{2d}\frac{\omega(u)}{u^2}du\right).$$

另一方面,$\varepsilon=\frac{1}{2}(2d-t)$的话,$t\int_t^{2d}\omega(u)u^{-2}du$不小于

$$t\int_t^{t+\varepsilon}\omega(u)u^{-2}du\geqslant t\omega(t)\frac{\varepsilon}{t(t+\varepsilon)}=\omega(t)\frac{2d-t}{2d+t}\geqslant\omega(t)\frac{1}{3}.$$

从而$\omega(t)=O\left(t\int_t^{2d}\omega(u)u^{-2}du\right)$,由是

$$\psi(t)=O\left(\omega(t)+t\int_t^{2d}\omega(u)u^{-2}du\right)=O\left(t\int_t^{2d}\omega(u)u^{-2}du\right).$$

证明完毕.

现在探求 $r_{n,\beta}(\varphi, x)$ 的性质.

定理 2 设 $f(x)\in W_{\beta}^{(0)}H_2(\omega)$, 则

$$r_{n,\beta}(\varphi, x)$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\sin t\,\frac{dt}{t^2}+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

证明须用下述引理.

引理 4 固定正整数, 当 $g(x)\in H_2(\omega)$ 时, 记 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\cos nx\,dx$ 的绝对值的上界为 $C_2^{(n)}(\omega)$, 那末

$$C_2^{(n)}(\omega)=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

【证明】 由阿耳泽拉(Arzelà)的定理(见泛函分析的书), 存在 $g(t)\equiv g(t+2\pi)$ 适合于

$$C_2^{(n)}(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\cos nx\,dx,\quad g(x)\in H_2(\omega).$$

函数

$$g_*(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}g\left(x+\frac{2k\pi}{n}\right)$$

属于 $H_2(\omega)$, 事实上,

$$\|\Delta_h^2 g_*(x)\|\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\|\Delta_h^2 g(x)\|\leqslant\omega(h).$$

由于

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g_*(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g\left(x+\frac{2k\pi}{n}\right)\cos nx\,dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\cos nx\,dx=C_2^{(n)}(\omega),$$
$$g_*\left(x+\frac{2\pi}{n}\right)=g_*(x),$$

所以

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g_*(x)\cos nx\,dx=\frac{n}{\pi}\int_{0}^{\frac{2\pi}{n}}g_*(x)\cos nx\,dx=C_2^{(n)}(\omega).$$

由是, $C_2^{(n)}(\omega)$ 等于

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_*(x)\cos x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[g_*\left(\frac{x}{n}\right)-g_*(0)\right]\cos x\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Delta^2_{\frac{x}{n}}g_*(0)\cos x\,dx$$

$$\leqslant\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

引理 4 证毕.

【定理 2 的证明】 积分 $r_{n,\beta}(\varphi,x)$ 可以写成下列两项的和:

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\frac{\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\sin t}{\sin^2\frac{t}{2}}dt$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\cos\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt.$$

末项由引理 4, 是 $O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$. 由于

$$\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}}=4\sum(2k\pi+t)^{-2},$$

所以

$$r_{n,\beta}(\varphi,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\sin t\frac{dt}{t^2}+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\cdot\left\{\cos\left(\overline{n-1}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right.$$

$$\left.-\cos\left(\overline{n+1}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right\}\frac{1}{t^2}+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cos\frac{\beta\pi}{2}\int_0^{\infty}\Delta_t^2\varphi(x)\{\cos(n+1)t-\cos(n-1)t\}\frac{dt}{t^2}$$

$$+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)+\frac{1}{2\pi}\sin\frac{\beta\pi}{2}\int_0^{\infty}[\varphi(x+t)-\varphi(x-t)]$$

$$\cdot\{\sin(n+1)t-\sin(n-1)t\}\frac{dt}{t^2}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cos\frac{\beta\pi}{2}\left\{\int_0^{\pi}+\int_{\pi}^{\infty}\right\}+\frac{1}{2\pi}\sin\frac{\beta\pi}{2}\left\{\int_0^{\pi}+\int_{\pi}^{\infty}\right\}$$

$$+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

从引理 2 的证明，由于 $\varphi(x-t)-\varphi(x+t)$ 属于 $2H_2(\omega)$，当 $t=0$ 和 $t=\pi$ 时，其值等于 0，所以有常数 C 使得

$$\int_{\pi}^{\frac{a_{n_0}}{n+1}}[\varphi(x-t)-\varphi(x+t)]\sin(n+1)t\frac{dt}{t^2}$$
$$\leqslant C\int_{\pi}^{\frac{a_{n_0}}{n+1}}\log\frac{2\pi}{t}\,\omega(t)\frac{dt}{t^2}$$
$$=O\left(\frac{1}{n}\right)\omega(\pi)=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

这里 a_{n_0} 是适合

$$\frac{a_{n_0-1}}{n+1}<\pi\leqslant\frac{a_{n_0}}{n+1}\quad 与\quad \int_0^{a_{n_0}}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}$$

的数．并且

$$\int_{\pi}^{\frac{a_{n_0}}{n-1}}[\varphi(x-t)-\varphi(x+t)]\sin(n+1)t\,\frac{dt}{t^2}=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

事实上，π 与 $\dfrac{a_{n_0}}{n\pm1}$ 的差是 $O\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

为了估计

$$\int_{\frac{a_{n_0}}{n\pm1}}^{\infty}[\varphi(x+t)-\varphi(x-t)]\sin(n\pm1)t\frac{dt}{t^2}$$

以及

$$\int_{\pi}^{\infty}\Delta_t^2\varphi(x)\cos(n\pm1)t\frac{dt}{t^2},$$

我们建立两个引理.

引理 5 设 $\varphi(x)\in H_2(\omega)$，则当 $\varphi(0)=0$ 时，均匀地(对于 φ)成立着

$$J_n\equiv\int_{\frac{a_{n_0}}{n-1}}^{\infty}\varphi(t)\sin(n-1)t\,\frac{dt}{t^2}$$
$$-\int_{\frac{a_{n_0}}{n+1}}^{\infty}\varphi(t)\sin(n+1)t\frac{dt}{t^2}=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

【证明】 先将 J_n 写成

$$\sum_{k=n_0}^{\infty}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\left\{(n-1)\,\varphi\left(\frac{t}{n-1}\right)-(n+1)\,\varphi\left(\frac{t}{n+1}\right)\right\}\frac{\sin t}{t^2}\,dt.$$

又将{…}中的式子改写为

$$\left[(n-1)\varphi\left(\frac{t}{n-1}\right)-(n+1)\varphi\left(\frac{t}{n+1}\right)\right]$$
$$-\left[(n-1)\varphi\left(\frac{a_k-1}{n-1}\right)-(n+1)\varphi\left(\frac{a_k-1}{n+1}\right)\right]$$
$$+\left[(n-1)\varphi\left(\frac{a_k-1}{n-1}\right)-(n+1)\varphi\left(\frac{a_k-1}{n+1}\right)\right].$$

第三项当a_k适合$\frac{a_k-1}{n+1}>2\pi$时，是$O\left(nk\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$：事实上，此时

$$\varphi\left(\frac{a_k-1}{n+1}\right)=O(\omega(2\pi))=O\left(n\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$
$$\varphi\left(\frac{a_k-1}{n-1}\right)=O\left(n\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right),\quad n=O(k).$$

从而

$$(n-1)\varphi\left(\frac{a_k-1}{n-1}\right)-(n+1)\varphi\left(\frac{a_k-1}{n+1}\right)=O\left(nk\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

当$\frac{a_k-1}{n+1}>2\pi$时成立．我们下面将证此结果当$k\geqslant n_0$时都成立*)．这样一来，我们得到

$$\sum_{k=n_0}^{\infty}\left[(n-1)\varphi\left(\frac{a_k-1}{n-1}\right)-(n+1)\varphi\left(\frac{a_k-1}{n+1}\right)\right]\int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{\sin t}{t^2}dt$$
$$=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

从而$J_n=J_n^*+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$，这里

$$J_n^*=\sum_{k=n_0}^{\infty}\int_0^{a_{k+1}-a_k}\left\{(n-1)\left[\varphi\left(\frac{a_k+t}{n-1}\right)-\varphi\left(\frac{a_k-1}{n-1}\right)\right]\right.$$
$$\left.-(n+1)\left[\varphi\left(\frac{a_k+t}{n+1}\right)-\varphi\left(\frac{a_k-1}{n+1}\right)\right]\right\}\frac{\sin(a_k+t)}{(a_k+t)^2}dt.$$

将{ }内的式子写成$(k,t)_1+(n+1)(k,t)_2$，J_n^*写成

$$J_n^*=\Sigma_1+(n+1)\Sigma_2;$$

---

*) 下面将证(引理6)：假如$h(x)\in H_2(\omega)$，$h(0)=0$，$0<x_1<x_2<\pi$，那末

$$\frac{1}{x_1}h(x_1)-\frac{1}{x_2}h(x_2)=O\left(\frac{1}{x_2}\omega(x_2)\right)+O\left(\int_{2x_1}^{2x_2}\omega(x)\frac{dx}{x^2}\right).$$

$$\Sigma_1=\sum_{k=n_0}^{\infty}\int_0^{a_{k+1}-a_k}(k,\ t)_1\frac{\sin(a_k+t)}{(a_k+t)^2}dt,$$

$$\Sigma_2=\sum_{k=n_0}^{\infty}\int_0^{a_{k+1}-a_k}(k,\ t)_2\frac{\sin(a_k+t)}{(a_k+t)^2}dt,$$

$$(k,\ t)_1=(n-1)\Big[\varphi\Big(\frac{a_k+t}{n-1}\Big)-\varphi\Big(\frac{a_k-1}{n-1}\Big)\Big]$$

$$-(n+1)\Big[\varphi\Big(\frac{a_k-1}{n-1}+\frac{t+1}{n+1}\Big)-\varphi\Big(\frac{a_k-1}{n-1}\Big)\Big],$$

$$(k,\ t)_2=\Big[\varphi\Big(\frac{a_k-1}{n-1}+\frac{t+1}{n+1}\Big)-\varphi\Big(\frac{a_k-1}{n-1}\Big)\Big]$$

$$-\Big[\varphi\Big(\frac{a_k-1}{n+1}+\frac{t+1}{n+1}\Big)-\varphi\Big(\frac{a_k-1}{n+1}\Big)\Big].$$

由于，当 $0\leqslant t\leqslant a_{k+1}-a_k$ 时，$(k,\ t)_1$ 可以写成

$$(t+1)\Big\{\frac{1}{(t+1)/(n-1)}\Big[\varphi\Big(\frac{a_k-1}{n-1}+\frac{t+1}{n-1}\Big)-\varphi\Big(\frac{a_k-1}{n-1}\Big)\Big]$$

$$-\frac{1}{(t+1)/(n+1)}\Big[\varphi\Big(\frac{a_k-1}{n-1}+\frac{t+1}{n+1}\Big)-\varphi\Big(\frac{a_k-1}{n-1}\Big)\Big]\Big\},$$

所以利用下面引理 6,

$$(k,\ t)_1=O(t+1)\Big[\frac{1}{(t+1)/(n-1)}\omega\Big(\frac{t+1}{n-1}\Big)+\int_{2\frac{t+1}{n+1}}^{2\frac{t+1}{n-1}}\frac{\omega_2(x)}{x^2}dx\Big]$$

$$=O(n)\omega\Big(\frac{1}{n}\Big)+O(n+1)\omega\Big(\frac{1}{n-1}\Big)=O\Big(n\omega\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big).$$

从而得到

$$\Sigma_1=O\Big(\sum_{k=n_0}^{\infty}n\omega\Big(\frac{1}{n}\Big)k^{-2}\Big)=O\Big(\omega\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big).$$

为了估计 Σ_2，我们证明：当 $t\geqslant1$ 时

$$\varphi\Big(\frac{t}{n}\Big)=t\varphi\Big(\frac{1}{n}\Big)+O\Big(\omega\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big).$$

设 $\gamma\geqslant1$，则将积分

$$I=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{a}{n}}\varphi(u)\frac{\sin nu-n\sin u}{u^2}du\quad\Big(\int_0^a\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}\Big)$$

中的 $\varphi(u)$ 写成

$$\varphi(u)-\frac{n}{\gamma}\varphi\left(\frac{\gamma}{n}\right)+\frac{n}{\gamma}\varphi\left(\frac{\gamma}{n}\right),$$

我们见到

$$I=\frac{1}{\pi\gamma}\varphi\left(\frac{\gamma}{n}\right)\left[\frac{\pi}{2}-n\int_0^{\frac{a}{n}}[1+O(u^2)]du\right]$$

$$+O\left(\frac{1}{n}\right)\int_0^{\frac{a}{n}}u\int_u^{\frac{2\gamma}{n}}\frac{\omega(v)}{v^2}dv\frac{(nu)^3}{u^2}du$$

$$=\frac{1}{n\gamma}\varphi\left(\frac{\gamma}{n}\right)\left(\frac{\pi}{2}-a\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\varphi\left(\frac{\gamma}{n}\right)\right)+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{n\gamma}\varphi\left(\frac{\gamma}{n}\right)\left(\frac{\pi}{2}-a\right)+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

置$\gamma=t$以及$\gamma=1$，我们得到所要的等式．从而

$$(k,\ t)_2=(t+1)\left\{\left[\varphi\left(\frac{a_k-1}{n-1}+\frac{1}{n+1}\right)-\varphi\left(\frac{a_k-1}{n+1}\right)\right]\right.$$

$$\left.-\left[\varphi\left(\frac{a_k-1}{n+1}+\frac{t+1}{n+1}\right)-\varphi\left(\frac{a_k-1}{n-1}\right)\right]\right\}+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

我们不妨假设

$$\varphi\left(\frac{a_k-1}{n+1}\right)=\varphi\left(\frac{a_k-1}{n-1}\right)=0,$$

否则的话，取适当的b_k，c_k，考虑$\varphi(t)+b_kt+c_k$(代$\varphi(t)$)好了．从这个条件，我们见到

$$\varphi\left(\frac{a_k-1}{n-1}+\frac{1}{n+1}\right)-\varphi\left(\frac{a_k-1}{n-1}\right)=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)\log\frac{2k}{n},$$

$$\varphi\left(\frac{a_k-1}{n+1}+\frac{1}{n+1}\right)-\varphi\left(\frac{a_k-1}{n+1}\right)=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)\log\frac{2k}{n}.$$

由是，有常数C适合于

$$\Sigma_2\leqslant C\sum_{k=n_0}^{\infty}\int_0^{a_{k+1}-a_k}\frac{1}{a_k^2}(k,\ t)_2\,dt$$

$$\leqslant C\sum_{k=n_0}^{\infty}\int_0^{a_{k+1}-a_k}\left\{(t+1)\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\log\frac{2k}{n}+\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right\}\frac{dt}{a_k^2}$$

$$=O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left[-\frac{1}{t}\log\frac{2k}{n}-\frac{1}{t}\right]_{n_0}^{\infty}=O\left(\frac{1}{n_0}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

因此

$$(n+1)\Sigma_2=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

$$J_n^*=\Sigma_1+(n+1)\Sigma_2=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right),\quad J_n=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

引理5的证明,还要用引理6来完成.

引理6 设 $h(x)\in H_2(\omega)$, $h(0)=0$, 则当 $0<x_1<x_2<\pi$ 时,

$$\frac{1}{x_1}h(x_1)-\frac{1}{x_2}h(x_2)=O\left(\frac{1}{x_2}\right)\omega(x_2)+O\left(\int_{2x_1}^{2x_2}\omega(x)\frac{dx}{x^2}\right).$$

【证明】 设 a 是方程

$$\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}$$

的最小正根, $\eta>0$, 记

$$I_\eta=\frac{1}{\pi}\int_0^\eta h(t)\left\{\sin\frac{at}{\eta}-\frac{a}{\eta}\sin t\right\}\frac{dt}{t^2},$$

那末

$$I_\eta=\frac{1}{\pi}\int_0^\eta\left[h(t)-\frac{1}{\eta}h(\eta)t\right]\left[\sin\frac{at}{\eta}-\frac{a}{\eta}\sin t\right]\frac{dt}{t^2}$$

$$+\frac{h(\eta)}{\pi\eta}\int_0^\eta\left[\sin\frac{at}{\eta}-\frac{a}{\eta}\sin t\right]\frac{dt}{t}.$$

由引理3,

$$h(t)-\frac{1}{\eta}h(\eta)t=O(t)\int_t^{2\eta}\omega(u)u^{-2}du,$$

上式末尾的积分等于

$$\frac{\pi}{2}-\frac{a}{\eta}(\eta+O(\eta^3)).$$

因此,

$$I_\eta=O(1)\int_0^\eta t\int_t^{2\eta}\omega(u)u^{-2}du\frac{(at)^3}{\eta^3t^3}dt+O(\eta h(\eta))$$

$$+\frac{h(\eta)}{\eta}\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{\pi}\right).$$

由于

$$\eta h(\eta)=\eta[h(\eta)-h(0)]=O\left(\eta^2\int_\eta^{4\pi}\omega(u)u^{-2}du\right)=O(\omega(\eta)),$$

所以

$$I_\eta=\frac{h(\eta)}{\eta}\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{\pi}\right)+O\left(\frac{1}{\eta}\right)\omega(\eta),$$

因此,

$$\left[\frac{1}{x_1}h(x_1)-\frac{1}{x_2}h(x_2)\right]\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{\pi}\right)$$
$$=I_{x_1}-I_{x_2}+O\left(\frac{1}{x_1}\,\omega(x_1)\right)+O\left(\frac{1}{x_2}\,\omega(x_2)\right).$$

积分之差$I_{x_1}-I_{x_2}$可以写成

$$\frac{1}{\pi}\int_0^y\left[h(t)-\frac{1}{u}h(u)t\right](y,\ t)dt+\frac{h(u)}{\pi u}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{a}{y}(y+O(y^3))\right]$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_0^u\left[h(t)-\frac{h(u)}{u}t\right](u,\ t)dt+\frac{h(u)}{\pi u}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{a}{u}(u+O(u^3))\right],$$

这里$(y,\ t)=\left[\sin\frac{at}{y}-\frac{a}{y}\sin t\right]\Big/t^2$. 因此,

$$I_{x_1}-I_{x_2}=O\left(\int_0^{2x_1}t\int_t^{2x_1}\omega(v)v^{-2}dv\,\frac{(at)^3}{x_1^3t^2}dt\right)+O\left(\frac{x_1^2}{x_2}h(x_2)\right)$$
$$+O\left(\int_0^{2x_2}t\int_t^{2x_2}\omega(v)v^{-2}dv\,\frac{(at)^3}{x_2^3t^2}dt\right)+O\left(\frac{x_2^2}{x_2}h(x_2)\right)$$
$$=O(x_2h(x_2))+O\left(\frac{1}{x_2}\,\omega(x_2)\right)$$
$$+O\left(\frac{1}{x_1}\,\omega(x_1)\right)+\int_{2x_1}^{2x_2}\omega(v)v^{-2}dv.$$

最后的积分不小于

$$\omega(x_1)\left(\frac{1}{2x_1}-\frac{1}{2x_2}\right)\geqslant\frac{1}{2x_1}\,\omega(x_1)-\frac{1}{2x_2}\,\omega(x_2).$$

从而得到

$$\left[\frac{1}{x_1}h(x_1)-\frac{1}{x_2}h(x_2)\right]\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{\pi}\right)$$
$$=O\left(\frac{1}{x_1}\,\omega(x_1)+\frac{1}{x_2}\,\omega(x_2)\right)+O\left(\int_{2x_1}^{2x_2}\omega(v)\,v^{-2}dv\right)$$
$$=O\left(\frac{1}{x_2}\,\omega(x_2)\right)+O\left(\int_{2x_1}^{2x_2}\omega(v)v^{-2}\,dv\right),$$

证明完毕.

总结引理5及其前述议论,我们得到

$$r_{n,\beta}(\varphi,\ x)=\frac{1}{2\pi}\cos\frac{\beta\pi}{2}\int_0^\infty \Delta_t^2\varphi(x)\{\cos(n+1)t-\cos(n-1)t\}\frac{dt}{t^2}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\sin\frac{\beta\pi}{2}\int_0^\pi\{\varphi(x-t)-\varphi(x+t)\}$$

$$\cdot\{\sin(n-1)t\sin(n+1)t\}\frac{dt}{t^2}+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

因此，我们还要证明第一个积分在$[\pi,\ \infty)$上的部分是$O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$. 设$T_n(x)$是$\varphi(x)$的$n$阶最佳逼近多项式，则

$$\Delta_t^2\varphi(x)=\Delta_t^2T_n(x)+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

由是

$$\int_\pi^\infty \Delta_t^2\varphi(x)[\cos(n-1)t-\cos(n+1)t]t^{-2}\,dt$$

$$=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)+\int_\pi^\infty \Delta_t^2T_n(x)[\cos(n-1)t-\cos(n+1)t]\frac{dt}{t^2}.$$

将末项施行两次分部积分，得到

$$\int_\pi^\infty \Delta^2\varphi(x)[\cos(n-1)t-\cos(n+1)t]t^{-2}\,dt$$

$$=O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)-\int_\pi^\infty\left[\frac{1}{t^2}(\Delta_t^2T_n(x))''-\frac{4}{t^3}(\Delta_t^2T_n(x))'+\frac{6}{t^4}\Delta_t^2T_n(x)\right]$$

$$\cdot\left[\frac{\cos(n-1)t}{(n-1)^2}-\frac{\cos(n+1)t}{(n+1)^2}\right]dt$$

$$=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)+O\left(\int_\pi^\infty\frac{n^2\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)}{t^3}\cdot\frac{1}{n^2}\,dt\right)=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

总结起来，我们得到

$$r_{n,\beta}(\varphi,\ x)=\frac{1}{2\pi}\cos\frac{\beta\pi}{2}\int_0^\pi \Delta_t^2\varphi(x)[\cos(n+1)t-\cos(n-1)t]\frac{dt}{t^2}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\sin\frac{\beta\pi}{2}\int_0^\pi[\varphi(x+t)-\varphi(x-t)]$$

$$\cdot[\sin(n+1)t-\sin(n-1)t]\frac{dt}{t^2}+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\cdot\left[\cos\left((n-1)t+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right.$$

$$\left.-\cos\left((n+1)t+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right]\frac{dt}{t^2}+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

定理 2 证明完毕.

在定理 2 的基础上，我们可以计算 $W_\beta^0 H_1(\omega)$ 中函数的"部分和"的逼近状态.

定理 3 设 $\int_0^t \omega(u)u^{-1}du=O(\omega(t))$，则

$$\mathscr{E}_{S_n}(W_\beta^0 H_1(\omega)) = \sup_{\varphi\in H_1(\omega)} \|r_{n,\beta}(\varphi,\ x)\|$$
$$=\frac{1}{\pi}\log n\, C_1^{(n)}(\omega) + O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

证明是需要修改定理 2 的结果成如下的形式:

引理 7 设 $f(x)\in W_\beta^0 H_2(\omega)$，$\int_0^t \omega(u)u^{-1}du=O(\omega(t))$，则

$$r_{n,\beta}(\varphi,\ x)=S_n^*+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

这里

$$2\pi S_n^*=\sum_{k=1}^{[n/2]-3}\frac{1}{k^2}\int_0^{2k\pi}\left\{\varphi\left(x-\frac{t}{n}-\frac{3+\beta'}{2n}\pi\right)\right.$$
$$\left.-\varphi\left(x+\frac{t}{n}+\frac{5-\beta'}{2n}\pi\right)\right\}\cos t\, dt,$$

$\beta'\in[0,\ 4]$，$\dfrac{\beta'-\beta}{4}$ 是一整数.

另外，我们的证明还依靠到下述

引理 8 设 k 是不大于 n 的正整数，则

$$\sup_{g\in H_2(\omega)}\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{2k\pi}{n}} g(x)\cos nx\, dx\right|$$
$$=\frac{k}{n}C_2^{(n)}(\omega)+O\left(\frac{\log k}{n}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

假如 $g\in\overline{H}_1(\omega)$，那末右端的 $C_2^{(n)}(\omega)$ 改为 $C_1^{(n)}(\omega)$，这是

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx\, dn\right|$$

的上界. 当 $g(x)\in H_i(\omega)$ $(i=1,\ 2)$ 时，假如有常数 a, b 使 $g(x)+ax+b$ 成一周期函数(周期是 2π)而属于 $H_i(\omega)$，那末 $g(x)\in\overline{H}_i(\omega)$.

首先证明定理 3. 利用引理 7 和引理 8, 我们见到

$$\sup_{\varphi\in H_1(\omega)}\|r_{n,\beta}(\varphi, x)\|\leqslant\|S_n^*\|+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{[n/2]-3}\frac{1}{k^2}\left\{2kC_1^{(n)}(\omega)+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)\log(k+1)\right\}$$

$$+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

从而

$$\mathscr{E}_{S_n}(W_\beta^{(0)}H_1(\omega))\leqslant\frac{\log n}{\pi}C_1^{(n)}(\omega)+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

其次估计上式左端的下界. 设 n 是一正整数, 作 $f(x)$ 如下:

$$f\left(x+\frac{2\pi}{n}\right)=f(x),\ f\left(\frac{4-\beta'}{2n}\right)=0,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f\left(\frac{t}{n}+\frac{5-\beta'}{2n}\pi\right)\cos t\,dt=-C_1^{(n)}(\omega).$$

以分点

$$-\pi,\ -\frac{2}{n}\left(\left[\frac{n}{2}\right]-3\right)\pi-\frac{4+\beta'}{2n}\pi,\quad -\frac{4+\beta'}{2n}\pi,$$

$$-\frac{2}{n},\quad -\frac{1}{n},\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \frac{8-\beta'}{2n}\pi,$$

$$\frac{2}{n}\left\{\left(\left[\frac{n}{2}\right]-3\right)+\frac{4-\beta'}{2n}\right\}\pi,\ \pi$$

将 $[-\pi, \pi]$ 顺次分成九个区间: $I_1, I_2, \cdots, I_9$, 其中 $I_5=\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$. 定义 $\psi_n(x)$, 使它在 I_1, I_3, I_7, I_9 上其值为 0; 在 I_8 和 I_2 上, 其值分别为 $f(x)$ 以及 $-f(x)$; 在 I_5 上,

$$\psi_n(x)=\gamma(x)\operatorname{sign}\sin\frac{\beta\pi}{2},$$

$$\psi_n(x)=\frac{\theta}{2}\omega\left(\frac{4}{n}+2x\right)\quad(x\in I_4),$$

$$\psi_n(x)=-\frac{\theta}{2}\omega\left(\frac{4}{n}-2x\right)\quad(x\in I_6).$$

这里的 $\gamma(x)$ 是 $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ 上的奇函数; 在 $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ 上,

$$\gamma(x)=-\frac{\theta}{2}\omega(2x),$$

当$x\pm h$落在$\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$时，$|\gamma(x\pm h)-\gamma(x)|\leqslant\omega(h)$. 由于

$$\omega(px)\leqslant p\omega(x) \quad (p>1),$$

所以，当$h\geqslant x$时，

$$|\gamma(x-h)-\gamma(x)|=\frac{\theta}{2}\omega(2x+2h)+\frac{\theta}{2}\omega(2|x|)\leqslant\frac{3}{2}\theta\omega(h).$$

由是可知$\frac{2}{3}\leqslant\theta\leqslant1$. 由于$\gamma(x)\in H_1(\omega)$，易于明白：$\psi_n(x)\in H_1(\omega)$.

对于ψ_n来说，我们见到$\pi r_n(\psi_n, 0)$等于

$$\sum_{k=1}^{[n/2]-3}\frac{1}{k^2 2\pi}\int_0^{2k\pi}\left[\psi_n\left(-\frac{t}{n}-\frac{3+\beta'}{2n}\pi\right)\right.$$
$$\left.-\psi_n\left(\frac{t}{n}+\frac{5-\beta'}{2n}\pi\right)\right]\cos t\,dt+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{[n/2]-3}\frac{1}{k^2 2\pi}\left\{\int_0^{4\pi}\left[\psi_n\left(-\frac{1}{n}-\frac{3+\beta'}{2n}\pi\right)\right.\right.$$
$$\left.-\psi_n\left(\frac{t}{n}+\frac{5-\beta'}{2n}\pi\right)\right]\cos t\,dt+\int_{-2k\pi}^{-4\pi}\psi_n\left(\frac{t}{n}-\frac{3+\beta'}{2n}\pi\right)\cos t\,dt$$
$$\left.-\int_{4\pi}^{2k\pi}\psi_n\left(\frac{t}{n}+\frac{5-\beta'}{2n}\pi\right)\cos t\,dt\right\}+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{[n/2]-3}\frac{1}{k^2}\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{4\pi}^{2k\pi}f\left(\frac{t}{n}+\frac{5-\beta'}{2n}\pi\right)\cos t\,dt\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2\pi}\int_{-2k\pi}^{-4\pi}f\left(\frac{t}{n}-\frac{3+\beta'}{n}\pi\right)\cos t\right\}+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{[n/2]-3}\frac{1}{2k^2}2(k-2)C_1^{(n)}(\omega)+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$=C_1^{(n)}(\omega)\log n+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

因此，

$$\mathscr{E}_{S_n}(W_\beta^0 H_1(\omega))\geqslant r_{n,\beta}(\psi_n, 0)=\frac{\log n}{\pi}C_1^{(n)}(\omega)+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

结合前面所得的“$\leqslant$”的结果，我们得到定理3中的等式。

定理3的证明，还要建立引理7和引理8之后来完成。

【引理7的证明】　写着

$$\int_{-\pi}^{\pi}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\sin t\,\frac{dt}{t^2}$$

$$=\int_{-\pi}^{-\frac{3+\beta}{2n}\pi}+\int_{-\frac{3+\beta}{2n}\pi}^{\frac{5-\beta}{2n}\pi}+\int_{\frac{5-\beta}{2n}}^{\pi}=J_1+J_2+J_3,$$

从定理 2 得到

$$\pi r_{n,\beta}(\varphi,\ x)=J_1+J_2+J_3+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

首先证明 $J_2=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$. 记

$$\frac{3+\beta}{2n}\pi=a,\qquad \frac{5-\beta}{2n}\pi=b,$$

$$(x,\ t,\ n)=\varphi(x)-\varphi(x+t)-nt\left(\varphi(x)-\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)\right),$$

我们见到

$$J_2=\int_{-a}^{b}(x,\ t,\ n)\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\sin t\,\frac{dt}{t^2}$$

$$+n\left(\varphi(x)-\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)\right)\int_{-a}^{b}\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\frac{\sin t}{t}\,dt.$$

由于 $b-a=O\left(\frac{1}{n}\right)$, 所以最后的积分等于

$$-\frac{\cos\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{n}\,\frac{\sin t}{t}\Bigg|_{-a}^{b}$$

$$+\frac{1}{n}\int_{-a}^{b}\cos\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{t}\right)dt=O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

我们知道: $H_2(\omega)$ 中的函数, 当 $[\sigma,\ d]$ 的两端的值等于 0 时, 它在 $(0,\ d]$ 上等于 $O\left(x\int_{x}^{2d}\omega(u)\,u^{-2}\,du\right)$. 因此

$$n\left(\varphi(x)-\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)\right)=n\,O(\log n)\,\omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

J_2 的末项等于 $O\left(\frac{\log n}{n^2}\right)\omega\left(\frac{1}{n}\right)$. 同理, 当 $\frac{-3-\beta}{2n}\pi\leqslant t\leqslant\frac{5-\beta}{2n}\pi$ 时,

$$\varphi(x)-\varphi(x+t)-nt\left[\varphi(x)-\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)\right]=O\left(|t|\int_{|t|}^{b}\omega(u)u^{-2}\,du\right).$$

由是

$$J_2=\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}(x,\ t,\ n)\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\sin t\,\frac{dt}{t^2}+O\left(\frac{\log n}{n^2}\right)\omega\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$+O\left(\int_{-a}^{-\frac{1}{n}}+\int_{\frac{1}{n}}^{b}|t|\int_{|t|}^{b}\omega(u)u^{-2}\,du\,\frac{|t|}{t^2}\,dt\right).$$

由于

$$a=O\left(\frac{1}{n}\right),\quad b=O\left(\frac{1}{n}\right),$$

所以上式末项是 $O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$. 我们得到

$$J_2=\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}(x,\ t,\ n)\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\sin t\,\frac{dt}{t^2}+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$=O\left(\int_0^{\frac{1}{n}}|x,\ t,\ n|\frac{dt}{t}\right)+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$=O\left(\int_0^{\frac{1}{n}}t\int_t^{\frac{1}{n}}\omega(u)u^{-2}\,du\,\frac{dt}{t}\right)+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

事实上，$\int_t^{\frac{1}{n}}\omega(u)u^{-2}\,du=O\left(\frac{1}{t}\int_0^{\frac{1}{n}}\omega(u)u^{-1}\,du\right)=O\left(n\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$, 所以上式中的二重积分等于 $O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

其次，我们讨论积分

$$J_3=\int_b^{\pi}(x,\ t,\ n)\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\sin t\,\frac{dt}{t^2}.$$

置 $n'=[n/2]-2$, $b+\frac{2n'\pi}{n}=\pi-\frac{c}{n}$,

$$J_3=\int_b^{\pi-\frac{c}{n}}+\int_{\pi-\frac{c}{n}}^{\pi}(x,\ t,\ n)\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\frac{\sin t}{t^2}\,dt=J_3'+J_3''.$$

由于

$$\frac{\sin t}{t^2}=\int_t^{\pi-\frac{c}{n}}\left(2\frac{\sin u}{u}-\cos u\right)\frac{du}{u^2}+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

所以

$$J_3'=\int_b^{\pi-\frac{c}{n}}\left\{\int_t^{\pi-\frac{c}{n}}\left(2\frac{\sin u}{u}-\cos u\right)\frac{du}{u^2}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$\cdot(x,\ t,\ n)\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt$$

$$=\int_b^{\pi-\frac{c}{n}}\left(2\frac{\sin u}{u}-\cos u\right)u^{-2}du\int_b^u(x,\ t,\ n)\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt$$

$$+O\left(\frac{1}{n}\right)\int_b^{\pi-\frac{c}{n}}(x,\ t,\ n)\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt,$$

末项是 $O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$，第一项的积分是

$$\sum_{k=0}^{n'-1}\int_{b+\frac{2k\pi}{n}}^{b+\frac{2(k+1)\pi}{n}}\left(2\frac{\sin u}{u^3}-\frac{\cos u}{u^2}\right)du\int_b^u(x,\ t,\ n)\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt$$

$$=\sum_{k=0}^{n'-1}\int_{b+\frac{2k\pi}{n}}^{b+\frac{2(k+1)\pi}{n}}\left(\frac{1}{u^2}+O(1)\right)du\left(\int_b^{b+\frac{2k\pi}{n}}\right.$$

$$\left.+\int_{b+\frac{2k\pi}{n}}^{u}(x,\ t,\ n)\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n'-1}\frac{n}{2\pi(k+2nb)(k+1+2nb)}\int_b^{b+\frac{2k\pi}{n}}(x,\ t,\ n)\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt$$

$$+\sum_{k=0}^{n'-1}\int_{b+\frac{2k\pi}{n}}^{b+\frac{2(k+1)\pi}{n}}\frac{du}{u^2}\int_{b+\frac{2k\pi}{n}}^{u}(x,\ t,\ n)\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt$$

$$+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

上式中的二重积分等于 $O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\frac{\log(k+1)}{(k+1)^2}\right)$，从而

$$\sum_{k=0}^{n'-1}\int_{b+\frac{2k\pi}{n}}^{b+\frac{2(k+1)\pi}{n}}\frac{du}{u^2}\int_{b+\frac{2k\pi}{n}}^{u}(x,\ t,\ n)\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

由是

$$J_3'=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n'-1}\frac{1}{k^2}\int_0^{2k\pi}\left[\varphi(x)-\varphi\left(x+\frac{t}{n}+\frac{5-\beta}{2n}\pi\right)\right]\cos t\,dt$$

$$+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

至于 J_3'', 其性质比较容易明白, 它是 $O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$. 因此,我们得到

$$J_3=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n'-1}\frac{1}{k^2}\int_0^{2k\pi}\left[\varphi(x)-\varphi\left(x+\frac{t}{n}+\frac{5-\beta}{2n}\pi\right)\right]\cos t\,dt$$

$$+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

最后处理 J_1', 它是区间 $\left[-\pi,\ -\frac{3+\beta}{2n}\pi\right]$ 上的一个积分. 置

$$\pi-\frac{3+\beta}{2n}\pi-\frac{2n'\pi}{n}=\frac{c'}{n},$$

我们见到

$$J_1'=O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)+\int_{-\pi+\frac{c'}{n}}^{-a}(x,\ t,\ n)\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\frac{\sin t}{t^2}dt$$

$$=O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)-\int_{-\pi+\frac{c'}{n}}^{-a}\left(2\frac{\sin u}{u}-\cos u\right)\frac{du}{u^2}$$

$$\cdot\int_u^{-a}(x,\ t,\ n)\sin\left(nt\frac{\beta\pi}{2}\right)dt$$

$$=-\sum_{k=1}^{n'-1}\int_{-a-\frac{2(k+1)\pi}{2}}^{-a-\frac{2k\pi}{2}}\left(2\frac{\sin u}{u}-\cos u\right)\frac{du}{u^2}$$

$$\cdot\left(\int_u^{-a-\frac{2k\pi}{n}}+\int_{-a-\frac{2k\pi}{n}}^{-a}\right)(x,\ t,\ n)\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt.$$

积分

$$\int_{-a-\frac{2k\pi}{n}}^{-a}(x,\ t,\ n)\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt$$

$$=\int_{-\frac{2k\pi}{n}}^{0}(x,\ t-a,\ n)\sin\left(nt-\frac{3+\beta}{2}\pi+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt$$

$$=-\int_{-\frac{2k\pi}{n}}^{0}(x,\ t-a,\ n)\cos nt\,dt.$$

$$=-\int_0^{\frac{2k\pi}{n}}(x,\ -t-a,\ n)\cos nt\,dt.$$

与前同样,我们得到

$$J_1'=-\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n'-1}\frac{1}{k^2}\int_0^{2k\pi}\left\{\varphi(x)-\varphi\left(x-\frac{t}{n}-\frac{3+\beta}{2n}\pi\right)\right\}\cos t\,dt$$

$$+O\left(\sum_{k=1}^{n'-1}\frac{\log(k+1)}{(k+1)^2}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

合并 $J_1+J_2+J_3$ 的结果，就得到引理 7.

【引理 8 的证明】　由于 $k\leqslant n$，在

$$\int_0^{2k\pi/n}(ax+b)\cos nx\,dx=0$$

的基础上来讨论 $\widetilde{H}_2(\omega)$ 中的函数 $g(x)$，所以我们不妨假设

$$g\left(\frac{\pi}{2n}\right)=g\left(\frac{2k\pi}{n}-\frac{3\pi}{2n}\right)=0$$

$$\left(d=\frac{2m-2}{n}\pi\text{ 的话，}g\left(\frac{\pi}{2n}+d\right)=0\right).$$

由于 $h(0)=h(d)=0$ ($h\in\widetilde{H}_2(\omega)$ 的话)含有

$$h(x)=O\left(\log\frac{2d}{x}\omega(x)\right)$$

在$[0,\ d]$上成立，所以从

$$\left|g\left(\frac{\pi}{2n}+h\right)+g\left(\frac{\pi}{2n}-h\right)-2g\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right|\leqslant\omega(h)\quad(h>0)$$

得到

$$g\left(\frac{\pi}{2n}+h\right)=O\left(\log\frac{k}{nh}\omega(h)\right).$$

同样可得

$$g\left(\frac{\pi}{2n}-h\right)=O\left(\log\frac{k}{h}\omega(h)\right),$$

$$g\left(\frac{2k\pi}{2}-\frac{3\pi}{2n}\pm h\right)=O\left(\log\frac{k}{nh}\omega(h)\right).$$

因此，将 $g(x)\cos nx$ 在 $\left[0,\ \frac{2k\pi}{n}\right]$ 上的积分，分成三个区间

$$\left[0,\ \frac{\pi}{2n}\right],\ \left[\frac{\pi}{2n},\ \frac{2k\pi}{n}-\frac{3\pi}{2n}\right],\ \left[\frac{2k\pi}{n}-\frac{3\pi}{2n},\ \frac{2k\pi}{n}\right]$$

上之积分的和，我们见到第一与第三两个积分都是 $O\left(\frac{\log k}{n}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$，从而得到

$$\int_0^{\frac{2k\pi}{n}} g(x)\cos nx\,dx=\int_0^{\frac{2k\pi-2\pi}{n}} g\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)\sin nt\,dt + O\left(\frac{\log k}{n}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

置

$$g_1(t)=g\left(t+\frac{\pi}{2n}\right),$$

则

$$g_1(0)=0,\ g_1\left(\frac{2k-2}{n}\pi\right)=0,\ g_1\in\widetilde{H}_2(\omega).$$

函数

$$g_2(t)=\frac{1}{2k-2}\left\{\sum_{\nu=-j}^{k-j-2} g_1\left(t+\frac{2\nu\pi}{n}\right)-\sum_{\nu=j+1}^{k-j-1} g_1\left(\frac{2\nu\pi}{n}-t\right)\right\}$$

$$\left(\frac{2\nu\pi}{n}\leqslant t\leqslant\frac{(2\nu+2)\pi}{n},\quad \nu=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k-2\right)$$

适合

$$g_2\left(t+\frac{2\nu\pi}{n}\right)=g_2(t)=-g_2\left(\frac{2\nu\pi}{n}-t\right),\quad g_2\left(\frac{2\nu\pi}{n}\right)=0,$$

以及

$$\int_0^{\frac{(2k-2)\pi}{n}} g_2(t)\sin nt\,dt=\int_0^{\frac{(2k-2)\pi}{n}} g_1(t)\sin nt\,dt,$$

并且具有周期

$$\frac{2\pi}{n}: g_2\left(t+\frac{2\pi}{n}\right)=g_2(t).$$

由是,记积分

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{2k\pi}{n}} g(x)\cos nx\,dx$$

的绝对值对于$g(x)\in\widetilde{H}_2(\omega)$的上界为$S$,我们见到

$$S=\sup_{g_1}\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{(2k-2)\pi}{n}} g_1(t)\sin nt\,dt\right|+O\left(\frac{\log k}{n}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$=\sup_{g_2}\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{(2k-2)\pi}{n}} g_2(t)\sin nt\,dt\right|+O\left(\frac{\log k}{n}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

由于

$$g_2\left(t+\frac{2\pi}{n}\right)\equiv g_2(t),$$

所以

$$S=(k-1)\sup_{g_2}\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{n}} g_2(t)\sin nt\,dt\right|+O\left(\frac{\log k}{n}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

又因

$$C_2^{(n)}(\omega)=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

所以从

$$S=(k-1)\frac{1}{n}C_2^{(n)}(\omega)+O\left(\frac{\log k}{n}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

得到

$$S=\frac{k}{n}C_2^{(n)}(\omega)+O\left(\frac{\log k}{n}\right)\omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

引理 8 证毕.

定理 4 假如 $\omega(t)$ 具有定理 3 中所设的性质，那末当 $r>0$ 时，

$$\mathscr{E}_{S_n}(W_\beta^r H_1(\omega))=\frac{\log n}{\pi n^r}C_1^{(n)}(\omega)+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

【证明】 证法与定理 3 相仿，详细的过程从略（见叶菲莫夫 1960 的原文，此文已在定理 1 引用）.

7. 用线性求和法求富理埃级数的和

设 $\lambda=\|\lambda_{n,k}\|$ $(n,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$是一无限矩阵. 对于勒贝格-富理埃级数

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kx),$$

作级数

$$U_n(f,\ x)=\frac{a_0}{2}\lambda_{n0}+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{nk}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

假设一切级数 $U_n(f,\ x)$是收敛的，那末 $U_n(f,\ x)\to f(x)$何时成立？卡拉马太(Karamata)和多密起(Tomić)于 1955 年证明：三个条件

(i) $\lambda_{nk}\to1$ $(n\to\infty,\ k=0,\ 1,\ \cdots)$,

(ii) $\lambda_{nk}=O[(\log k)^{-1}]$ $(k\to\infty)$,

(iii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}{}'\frac{m+k}{m}(m-k)\log\frac{m+k}{|m-k|}|\Delta^2\lambda_{nk}|\leqslant C$ 对于某一 m 成立.

保证 $U_n(f, x)\to f(x)$ 对于 $f\in C_{2\pi}$ 均匀地成立. 对于这个结论, 济曼于 1959 年 (УМН XII) 指出: 条件 (i) 和 $|\lambda_{nk}|\leqslant C$ 是必要的, 此外, 下述条件也是必要的, 一切级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\{\lambda_{n,|m-n|}-\lambda_{n,m+n}\}\quad (m=1, 2, \cdots)$$

都收敛, 其和关于 n 是有界. 鲍沙夫 (Баусов) 于 1965 年的数学汇刊 (M. сб.) 上发表了如下的定理, 他指出定理中的条件 (*) 较弱于 (iii).

定理 1　假如有 m 使

$$(*)\qquad \sum_{k=1}^{[m/2]}k|\Delta_n^2\lambda_{n,k-1}|+\sum_{k=[m/2]+1}^{\infty}|m-k|\cdot|\Delta^2\lambda_{n,k-1}|\leqslant C,$$

那末当 $f\in C_{2\pi}$, $n\to\infty$ 时, $U_n(f, x)$ 匀敛于 $f(x)$ 的充要条件是

(i) $\lambda_{nk}\to 1$ $(n\to\infty)$,

(ii) $\lambda_{n,k}=O\left(\frac{1}{\log k}\right)$,

以及

(iii) $|\lambda_{n,0}|+|\lambda_{n,m}|+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k}|\lambda_{n,m-k}-\lambda_{n,m+k}|\leqslant C$.

【证明】　简记 $H_m^{(n)}\equiv H_m$, $\lambda_{n,k}=\lambda_k$,

$$H_m=|\lambda_0|+|\lambda_m|+\sum_{k=1}^{[m/2]}k|\Delta^2\lambda_{k-1}|+\sum_{k=[m/2]+1}^{\infty}|m-k||\Delta^2\lambda_{k-1}|.$$

定理的证明是依靠着下列不等式和等式:

(I) $|\lambda_i|\leqslant H_m (i=0, 1, 2, \cdots, m)$, $\sum_{k=0}^{\infty}|\Delta\lambda_k|\leqslant CH_m$;

(II) 假如 $\lambda_k=o(1)$, $H_m\leqslant C$, 那末有绝对常数 C_1 适合

$$\int_0^{\pi}\left|\frac{\lambda_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\cos kx\right|dx=C_1\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k}|\lambda_{m-k}-\lambda_{m+k}|+O(H_m).$$

条件 (*) 的左端的和数, 其 $k=2m$ 之后的一部分是

$$\sum_{k=2m+1}^{\infty}(k-m)|\Delta^2\lambda_{n,k-1}|\geqslant\sum_{k>2m}^{\infty}\frac{k}{2}|\Delta^2\lambda_{n,k-1}|.$$

由是, $\sum_{k=1}^{\infty}k|\Delta^2\lambda_{n,k-1}|$ 是一收敛级数. 从而, 注意到 $\lambda_{m,k}=O\left(\frac{1}{\log k}\right)$, 级数

$$K_n(t)=\frac{\lambda_{n0}}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{n,k}\cos kt$$

在$(0, \pi]$上收敛于一正值函数(可以经过两次和差变换来证明),它是一个富理埃级数,就是说,$K_n(t)\in L(0, \pi)$. 由于$f\in C_{2\pi}$,成立着派司伐耳等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)K_n(t)dt=\frac{1}{2}a_0\lambda_{n0}+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{nk}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

条件 $\lambda_{nk}=O\left(\frac{1}{\log k}\right)$ 对于此等式的成立也是必要的.

此等式对于任一$f\in C_{2\pi}$成立的充要条件是(尼可里斯基, 1948):

$$\lambda_{n,k}\to 1\,(n\to\infty,\ k=0,\ 1,\ \cdots)\quad 和\quad \int_0^{\pi}|K_n(t)|dt\leqslant C.$$

由(II), $\int_0^{\pi}|K_n(t)|dt=O(1)$ 的充要条件是在(*)的基础上, (iii)成立.

定理的证明,归结为建立(I)和(II). 首先证明(I). 当$i\leqslant m$时,从恒等式

$$\lambda_i=\lambda_0-i\Delta\lambda_{i-1}-\sum_{k=1}^{i-1}k\Delta^2\lambda_{k-1},$$

$$\lambda_i=(m-i)\Delta\lambda_i+\lambda_m-\sum_{k=i+1}^{m-1}(m-k)\Delta^2\lambda_{k-1}$$

得到

$$\lambda_i=\frac{m-i}{m}\lambda_i+\frac{i}{m}\lambda_i=\frac{m-i}{m}\lambda_0+\frac{i\lambda_m}{m}$$

$$-\frac{m-i}{m}\sum_{k=1}^{i}k\Delta^2\lambda_{k-1}-\frac{i}{m}\sum_{k=i+1}^{m-1}(m-k)\Delta^2\lambda_{k-1}.$$

此时 $|\lambda_i|\leqslant H_m$. 现在写着 $m'=\left[\frac{m}{2}\right]$,

$$\sum_{k=0}^{\infty}|\Delta\lambda_k|=\sum_{k=0}^{m'-1}\left|\Delta\lambda_{m'}+\sum_{i=k}^{m'-1}\Delta^2\lambda_i\right|+\sum_{k=m'}^{m-1}\left|\Delta\lambda_{m'}-\sum_{i=m'}^{k-1}\Delta^2\lambda_i\right|$$

$$+\sum_{k=m}^{\infty}\left|\sum_{i=k}^{\infty}\Delta^2\lambda_i\right|\leqslant m'|\Delta\lambda_{m'}|+\sum_{k=0}^{m'-1}\sum_{i=k}^{m'-1}|\Delta^2\lambda_i|$$

$$+(m-m')|\Delta\lambda_{m'}|+\sum_{k=m'}^{m-1}\sum_{i=m'}^{k-1}|\Delta^2\lambda_i|+\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{i=k}^{\infty}|\Delta^2\lambda_i|$$

$$=m|\Delta\lambda_{m'}|+\sum_{k=1}^{m'}k|\Delta^2\lambda_{k-1}|+\sum_{k=m'+1}^{m-1}(m-k)|\Delta^2\lambda_{k-1}|$$

$$+\sum_{k=m+1}^{\infty}(k-m)|\Delta^2\lambda_{k-1}|.$$

从上面的第二个恒等式，我们见到 $m|\Delta\lambda_{m'}|\leqslant CH_m$. 由是可知(I)成立.

最后证明(II). 由于

$$\sum|\Delta\lambda_n|=O(H_m)=O(1),$$

所以

$$K(t)=\frac{\lambda_0}{2}+\sum_1^{\infty}\lambda_n\cos\lambda_n t$$

在 $0<t\leqslant\pi$ 中收敛. 写着

$$\lambda_0=\lambda_0^0,\quad \lambda_k=\lambda_k^0+\lambda'_{m-k}\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ m),\quad \lambda_k=\lambda''_{k-m}\ (k\geqslant m+1);$$

$$\lambda_k^0=\lambda_k\ \left(0\leqslant k\leqslant\frac{m}{3}\right),\quad \lambda''_k=0\ \ (k\leqslant m),$$

$$\lambda_k^0=\left(2-\frac{3k}{m}\right)\lambda_k\ \left(\frac{m}{3}\leqslant k\leqslant\frac{2m}{3}\right),\quad \lambda_k^0=0\ \left(k\geqslant\frac{2m}{3}\right),$$

$$\lambda'_k=\lambda_{m-k}-\lambda_{m-k}^0\ \left(0\leqslant k\leqslant\frac{2m}{3}\right),\quad \lambda'_k=0\ \left(k\geqslant\frac{2m}{3}\right),$$

那末

$$K(t)=\frac{\lambda_0^0}{2}+\sum_{k=1}^{m}(\lambda_k^0+\lambda'_{m-k})\cos kt+\sum_{k=m+1}^{\infty}\lambda''_{k-m}\cos kt,$$

置

$$A_k=A_k(t)=\lambda_k^0+(\lambda'_k+\lambda''_k)\cos mt,$$

$$B_k=B_k(t)=(\lambda'_k-\lambda''_k)\sin mt,\quad B_0=0,$$

我们见到: $K(t)$ 也可以写成

$$K(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos kt+B_k\sin kt).$$

由于 $\sum k(|\Delta^2\lambda_{k-1}^0|+|\Delta^2\lambda'_{k-1}|+|\Delta^2\lambda''_{k-1}|)\leqslant CH_m$, 所以

$$\sum k|\Delta^2A_{k-1}|+\sum k|\Delta^2B_{k-1}|\leqslant CH_m.$$

将 $K(t)$ 的部分和施行和差变换之前，引入下面的记法:

$$D_0(t)=\frac{1}{2},\quad D_k(t)=\frac{1}{2}+\sum_1^k\cos\nu t=\frac{\sin\left(k+\dfrac{1}{2}\right)t}{2\sin\dfrac{t}{2}},$$

$$F_k(t)=\frac{1}{k+1}(D_0(t)+\cdots+D_k(t))=\frac{1-\cos(k+1)t}{4(k+1)\sin^2\frac{t}{2}};$$

$$\overline{D}_0(t)=-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2},\ \overline{D}_k(t)=\overline{D}_0(t)+\sum_1^k\sin\nu t=-\frac{\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}},$$

$$\overline{F}_k(t)=\frac{1}{k+1}(\overline{D}_0(t)+\cdots+\overline{D}_k(t))=-\frac{\sin(k+1)t}{4(k+1)\sin^2\frac{t}{2}}.$$

施行两次和差变换,

$$\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{N}(A_k\cos kt+B_k\sin kt)$$

等于

$$\sum_{k=0}^{N-2}(k+1)\{\Delta^2A_kF_k(t)+\Delta^2B_k\overline{F}_k(t)\}$$
$$+N(\Delta A_{N-1}F_{N-1}+\Delta B_{N-1}\overline{F}_{N-1})+A_ND_N(t)+B_N\overline{D}_N(t).$$

从上面的讨论,易知最后三项是 $o(1)\ (N\to\infty)$. 从而在 $[\varepsilon,\pi]\ (\varepsilon>0)$ 上,匀敛着

$$K(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\{\Delta^2A_kF_k(t)+\Delta^2B_k\overline{F}_k(t)\}.$$

由于 $\sum(k+1)|\Delta^2A_k|F_k(t)\leqslant\sum(k+1)(|\Delta^2\lambda_k^0|+|\Delta^2\lambda_k'|+|\Delta^2\lambda_k''|)F_k(t)$ 在 $[0,\pi]$ 上的积分小于 CH_m, 所以

$$\int_0^\pi|K(t)|\,dt\leqslant\int_0^\pi|\sum(k+1)\Delta^2B_k\overline{F}_k(t)|\,dt+CH_m.$$

定义

$$M_k(t)=\overline{F}_k(t)\quad\left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{1+k}\right),\quad M_k(t)=0\quad\left(\frac{\pi}{k+1}<t\leqslant\pi\right),$$

我们见到

$$\int_0^\pi|M_k(t)\sin mt|\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{k+1}}|\sin mt\cdot\sin(k+1)t|/4(k+1)\sin\frac{2t}{2}\,dt$$

$$\leqslant\frac{\pi^2m}{4}\int_0^{\frac{\pi}{k+1}}dt\leqslant C\quad(k\geqslant m),$$

$$\int_0^{\pi}|\overline{F}_k-M_k|dt=\int_{\frac{\pi}{k+1}}^{\pi}\frac{|\sin(k+1)t|}{(4k+4)\sin^2\frac{t}{2}}dt$$

$$\leqslant\frac{\pi^2}{4}\int_{\frac{\pi}{k+1}}^{\pi}\frac{dt}{t^2(k+1)}\leqslant C\quad(k\geqslant 0),$$

$$\int_0^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\Delta^2B_k(\overline{F}_k-M_k)\right|dt\leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}k\left|\Delta^2B_{k-1}\left(\frac{\pi}{2m}\right)\right|\leqslant CH_m,$$

$$\int_0^{\pi}\left|\sum_{k=m}^{\infty}(k+1)(\Delta^2\lambda_k'-\Delta^2\lambda_k'')\sin mtM_k(t)\right|dt\leqslant CH_m.$$

从而

$$\int_0^{\pi}|K(t)|dt\leqslant\int_0^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)\Delta^2B_kM_k(t)\right|dt+CH_m.$$

右端的被积函数等于

$$\sum_{k=0}^{m-1}\Delta B_kM_k+\sum_{k=1}^{m-1}k\Delta B_k[M_k-M_{k-1}]-m\Delta B_mM_{m-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{m-1}\Delta B_kM_k+\sum_{k=1}^{m-1}k\Delta B_k(M_k-M_{k-1})-m\Delta B_mM_{m-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{m-1}B_k[M_k-M_{k-1}]-B_mM_{m-1}-m\Delta B_mM_{m-1}$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}k\Delta B_k[M_k-M_{k-1}].$$

当 $0\leqslant t\leqslant\pi/(k+1)$ 时，

$$\left|\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\overline{D}_j(t)-\frac{1}{k}\sum_{0}^{k-1}\overline{D}_j(t)\right|=\frac{1}{(k+1)k}\left|\sum_{\nu=1}^{k}\nu\sin\nu t\right|;$$

因此，

$$|M_k(t)-M_{k-1}(t)|\leqslant\frac{1}{2}.$$

在区间 $\frac{\pi}{k+1}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{k}$ 上，

$$|M_k-M_{k-1}|=\frac{|\sin kt|}{4k\sin^2\frac{t}{2}}\leqslant\left|\sin k\left(\frac{\pi}{k}-t\right)\right|\Big/4k\sin^2\frac{t}{2}\leqslant C.$$

又因 $M_k(t)-M_{k-1}(t)$ 在 $\left[\frac{\pi}{k},\ \pi\right]$ 上是 0，所以

$$\int_0^\pi |M_k(t)-M_{k-1}(t)|dt\leqslant\frac{C}{k}.$$

又因 $m\Delta B_m M_{m-1}(t)$ 在$[0,\pi]$上的绝对值等于或小于

$$\begin{aligned}&|M_{m-1}(t)|\sum_{k=m+1}^{\infty}k|\Delta^2 B_{k-1}|\\&=|M_{m-1}(t)|\cdot|\sin mt|\sum_{k=m+1}^{\infty}k(|\Delta^2\lambda'_{k-1}|+|\Delta^2\lambda''_{k-1}|)\\&\leqslant|M_{m-1}(t)|CH_m|\sin mt|,\end{aligned}$$

从而

$$\int_0^\pi|m\Delta B_m M_{m-1}(t)|dt\leqslant CH_m\int_0^{\frac{\pi}{m}}\frac{\sin^2 mt}{4m\sin^2\frac{t}{2}}dt\leqslant\frac{\pi}{4}CH_m.$$

我们得到

$$\begin{aligned}&\int_0^\pi\left|\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)\Delta^2B_k(t)\right|dt\\&\leqslant C\left\{\sum_{k=1}^{m-1}\left[\frac{1}{k}\left|B_k\left(\frac{\pi}{2m}\right)\right|+\left|\Delta B_k\left(\frac{\pi}{2m}\right)\right|\right]\right.\\&\qquad\left.+\left|B_m\left(\frac{\pi}{2m}\right)\right|+H_m\right\}.\end{aligned}$$

结合到$\int|K(t)|dt$ 而利用(I)，我们得到

$$\int_0^\pi|K(t)|dt\leqslant C\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k}|\lambda_{m-k}-\lambda_{m+k}|+CH_m.$$

要建立(II)的等式，我们还须证明反向不等式——就是说，要将上式中的“$\leqslant$”改成“$\geqslant$”. 问题是在查明不等式

$$\int_0^\pi|K(t)|dt\geqslant\int_0^\pi\left|\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)\Delta^2B_k\bar{F}_k(t)\right|dt-CH_m$$

右端第一项的性质. 事实上，成立着

$$\begin{aligned}&\int_0^\pi\left|\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)\Delta^2B_k\bar{F}_k(t)\right|dt\\&\geqslant\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{|\lambda'_k-\lambda''_k|}{k}-C\left[\sum_{k=1}^{[m/2]}k|\Delta^2(\lambda'_k-\lambda''_k)|\right.\\&\qquad\left.+\sum_{k=[m/2]+1}^{m-1}(m-k)|\Delta^2(\lambda'_k-\lambda''_k)|\right].\end{aligned}$$

详细证明见捷里亚戈夫斯基 (Теляковский) 在苏联科学院数学通报 (Изв. АН) 第 27 卷第 259 页 (1963) 的文章.

定理 2 设 $\|\lambda_{n,k}\|$ $(n, k=0, 1, \cdots)$ 适合定理 1 中的一切条件，则当 $f(x)\in L_{2\pi}$ 时，在 f 的任一勒贝格点 x，成立着 $U_n(f, x)\to f(x)$。当 $\|\lambda_{n,k}\|$ 适合定理 1 中的 $(*)$ 时，对于 $f\in L_{2\pi}$，在 f 的任一勒贝格点 x，成立着 $U_n(f, x)\to f(x)$，定理 1 中 (i)，(ii)，(iii) 三个条件也是必要的.

【证明】 设 $S_k(x)$ 和 $\sigma_k(x)$ 分别表示 $\mathfrak{S}[f, x]$ 的部分和与费耶平均，经过两次和差变换，我们见到

$$\frac{a_0\lambda_{n0}}{2}+\sum_{k=1}^{N}\lambda_{nk}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$
$$=\sum_{k=0}^{N-2}(k+1)\Delta^2\lambda_{nk}\sigma_k(x)+N\Delta\lambda_{n,\ N-1}\sigma_{N-1}(x)+\lambda_{nN}S_N(x).$$

在 f 的勒贝格点 x，$\lim\sigma_k(x)$ 存在，$S_N(x)=o(\log N)$；条件 $(*)$ 含有 $N\Delta\lambda_{n,N-1}=o(1)$ $(N\to\infty)$，上式最后两项当 $N\to\infty$ 时都是 0. 因此，

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)K_n(t)\,dt=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{nk}A_k(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\Delta^2_{nk}\sigma_k(x).$$

在 f 的勒贝格点 x，上式左端当 $n\to\infty$ 时趋向于 $f(x)$ 的充要条件是

$$\lim\frac{2}{\pi}\int_0^{\delta}K_n(t)\,dt=1\quad(0<\delta<\pi),$$

以及存在单调减小函数 $K_n^*(t)$ 适合

$$|K_n(t)|\leqslant K_n^*(t)\quad 和\quad\int_0^{\pi}K_n^*(t)\,dt\leqslant C.$$

当 $(*)$ 成立时，由定理 1，(i)，(ii)，(iii) 对于 $U_n(f, x)\to f(x)$ 是必要的.

现在从 (i)，(ii)，(iii) 导出上述关于 $K_n(t)$ 的性质，这就是说，要从 (i)，(ii)，(iii) 导出 $U_n(f, x)\to f(x)$.

首先证明

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\delta}K_n(t)\,dt=1+o(1).$$

置

$$r_k(t)=\sum_{i=k}^{\infty}\frac{\sin it}{i},$$

则

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\delta K_n(t)dt=\lambda_{n0}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi-\delta}{2}\lambda_{n0}-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{nk}\frac{\sin k\delta}{k}\right)$$

$$=\lambda_{n0}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\Delta\lambda_{n,k}r_{k+1}(\delta).$$

对于 $\varepsilon>0$, 存在 k_0, 当 $k>k_0$ 时 $|\Delta\lambda_{n,k_0}|+|\Delta\lambda_{n,k_0+1}|+\cdots<\varepsilon$. 由于 λ_{nk} 当 $n\to\infty$ 时, 趋近于 1, 所以从上式得到

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^\delta K_n(t)dt-1\right|\leqslant 0,\quad \frac{2}{\pi}\int_0^\delta K_n(t)dt=1+o(1)\quad(n\to\infty).$$

现在证明: 存在 $[0,\pi]$ 上的减小函数 $K_n^*(t)$ 大于 $|K_n(t)|$, 在 $[0,\pi]$ 上的积分(关于 n)为有界. 对于

$$K_n(t)=\frac{1}{2}\lambda_{n0}+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{nk}\cos kt$$

施行变换, 我们得到

$$K_n(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\Delta^2A_{nk}F_k(t)+\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\Delta^2B_{nk}N_k(t)$$

$$+\sum_{k=m}^{\infty}(k+1)\Delta^2B_{nk}M_k(t)-(B_{nm}+m\Delta B_{nm})M_{m-1}(t)$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}k\Delta B_{nk}[M_k(t)-M_{k-1}(t)]+\sum_{k=1}^{m-1}B_{nk}[M_k(t)-M_{k-1}(t)],$$

这里 $t>0$, $A_{nk}=\lambda_{nk}^0+(\lambda_{nk}'+\lambda_{nk}'')\cos mt$, $B_{nk}=(\lambda_{nk}'-\lambda_{nk}'')\sin mt$.

置 $G_{nk}=|\Delta^2\lambda_{nk}^0|+|\Delta^2\lambda_{nk}'|+|\Delta^2\lambda_{nk}''|$, $B_{nk}^*=\lambda_{nk}'-\lambda_{nk}''$. 作 $F_k(t)$, $M_k(t)\sin mt$, $N_k(t)$ 的优越函数 $F_k^*(t)$, $M_k^*(t)$, $N_k^*(t)$:

$$F_k^*(t)=\begin{cases}\pi^2(k+1)/8 & \left(0\leqslant t\leqslant\dfrac{2}{k+1}\right),\\[2ex] \dfrac{\pi^2}{2(k+1)t^2} & \left(\dfrac{2}{k+1}\leqslant t\leqslant\pi\right),\end{cases}$$

$$M_k^*(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}\pi^2m & \left(0\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{k+1}\right),\\[2ex] 0 & \left(\dfrac{\pi}{k+1}<t\leqslant\pi\right),\end{cases}$$

$$N_k^*(t)=\begin{cases}\dfrac{k+1}{4} & \left(0\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{k+1}\right),\\[2mm] \dfrac{\pi^2}{4(k+1)+2} & \left(\dfrac{\pi}{k+1}\leqslant t\leqslant\pi\right).\end{cases}$$

它们在$[0, \pi]$上的积分顺次 $\leqslant C$, $\leqslant\dfrac{Cm}{k+1}$, $\leqslant C$. 由于

$$|M_k(t)-M_{k-1}(t)|\leqslant M_k^{**}(t)\begin{cases}C & \left(0\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{k}\right),\\[2mm] 0 & \left(\dfrac{\pi}{k}<t\leqslant\pi\right),\end{cases}$$

$$\int_0^\pi M_k^{**}(t)\,dt\leqslant\frac{C}{k},$$

所以 $K_n(t)$ 的一个优越函数是

$$\begin{aligned}K_n^*(t)=&\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)G_{nk}F_k^*(t)+\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)|\varDelta^2B_{nk}^*|N_k^*(t)\\&+\sum_{k=m}^{\infty}(k+1)|\varDelta^2B_{nk}^*|M_k^*(t)+[|B_{nm}^*|+m|\varDelta B_{nm}^*|]M_{m-1}^*(t)\\&+\sum_{k=1}^{m-1}k|\varDelta B_{nk}^*|M^{**}(t)+\sum_{k=1}^{m-1}|B_{nk}^*|M_k^{**}(t).\end{aligned}$$

此级数当 $t\neq0$ 时收敛，其和 $K_n^*(t)$ 在$[0, \pi]$上是单调减小的. 易知

$$\int_0^\pi K_n^*(t)\,dt\leqslant C.$$

定理 2 由是证明完毕.

下面是 M. Φ. 济曼的定理(1962)(参见前面 § 5):

定理 3 设 $f(x)\in L_p$, $1\leqslant p\leqslant\infty$;

$$U_r(f, x)=\frac{a_0}{2}+\sum_1^\infty r^\nu A_\nu(x),\quad f(x)\sim\sum A_\nu(x)$$

$\left(\dfrac{1}{2}a_0=A_0(x)\right)$, 则当 $r\to1-0$ 时,

$$R_r(f)_{L_p}\equiv\|f(x)-U_r(f, x)\|_{L_p}\leqslant C(1-r)\sum_{\nu=0}^\infty r^\nu E_\nu(f)_{L_p}.$$

这里 $E_\nu(f)_{L_p}$ 表示空间 $L_p(0, 2\pi)$ 中的最佳逼近:

$$\inf_{\alpha_k,\beta_k}\left\|f(x)-\sum_{k=0}^{\nu}\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx\right\|_{L_p}.$$

【证明】 $R_r(f)_{L_p}$ 可以写成

$$R_r(f)_{L_p}=\left\|\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)\}\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}dt\right\|_{L_p}.$$

由于

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}\leqslant\begin{cases}\dfrac{2}{1-r}, & 0\leqslant t\leqslant\pi(1-r),\\ \dfrac{\pi^2(1-r)}{2rt^2}, & \pi(1-r)\leqslant t\leqslant\pi,\end{cases}$$

所以从敏可夫斯基不等式得到

$$R_r(f)_{L_p}\leqslant\frac{2}{\pi(1-r)}\int_0^{\pi(1-r)}\|\Delta_t^2 f(x)\|_{L_p}dt$$

$$+\frac{\pi(1-r)}{2r}\int_{\pi(1-r)}^{\pi}\|\Delta_t^2 f(x)\|_{L_p}\frac{dt}{t^2}$$

$$\leqslant 2\omega_2(f;\ \pi(1-r))_{L_p}+\frac{\pi(1-r)}{2r}\int_{\pi(1-r)}^{\pi}\omega_2(f;\ t)_{L_p}t^{-2}dt.$$

简记 $x\leqslant Cy$ 为 $x\preccurlyeq y$, 我们见到

$$R_r(f)_{L_p}\preccurlyeq\omega_2(f;\ 1-r)_{L_p}+(1-r)\int_{\pi(1-r)}^{\pi}\omega_2(f;\ t)_{L_p}t^{-2}dt.$$

末项当 $n=[1/(1-r)]$ 时, 可以写成

$$\int_{\pi(1-r)}^{\frac{\pi}{n}}+\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\omega_2(f;\ t)_{L_p}t^{-2}dt\preccurlyeq\omega_2\left(f;\ \frac{1}{n}\right)_{L_p}$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n-1}\int_{\frac{\pi}{\nu+1}}^{\frac{\pi}{\nu}}\omega_2(f;\ t)_{L_p}t^{-2}dt\preccurlyeq\sum_{\nu=1}^{n}\omega_2\left(f;\ \frac{1}{\nu}\right)_{L_p}.$$

利用下面证明的引理 1($k=2$ 的特殊情况),

$$\omega_2\left(f;\ \frac{1}{n}\right)_{L_p}\leqslant\frac{C}{n^2}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)E_\nu(f)_{L_p},$$

我们见到

$$\sum_{\nu=1}^{n}\omega_2\left(f;\ \frac{1}{\nu}\right)_{L_p}\leqslant\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu^2}\sum_{\mu=1}^{\nu}\mu E_{\mu-1}(f)_{L_p}\preccurlyeq\sum_{\nu=1}^{n}\nu E_{\nu-1}(f)_{L_p}\sum_{\mu=\nu}^{\infty}\frac{1}{\mu^2}$$

$$\preccurlyeq\sum_{\nu=1}^{[1/(1-r)]}E_{\nu-1}(f)_{L_p}\preccurlyeq\sum_{\nu=0}^{\infty}r^\nu E_\nu(f)_{L_p}.$$

这就完成了定理的证明. 现在证明

引理 1 设 $1\leqslant p\leqslant\infty$, $f\in L_p(0, 2\pi)$, 则

$$\omega_k\left(f;\ \frac{1}{n}\right)_{L_p}\leqslant\frac{C_k}{n^k}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{k-1}E_\nu(f)_{L_p}.$$

【证明】 设 $T_n(f;\ x)$ 是对于 f 的最佳逼近三角多项式, n 是它的阶,则

$$E_n(f)_{L_p}=\left\{\int_0^{2\pi}|f(x)-T_n(f;\ x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}=\|f-T_n\|_{L_p}.$$

暂且将 $\omega_k(\cdots)_{L_p}$, $E_n(\cdots)_{L_p}$, $\cdots$, $\|\cdots\|_{L_p}$ 简记为 $\omega_k(\cdots)$, $E_n(\cdots)$, $\|\cdots\|$, 我们见到

$$\omega_k\left(T_{2^{m+1}};\ \frac{1}{n}\right)\leqslant n^{-k}\|T_{2^{m+1}}^{(k)}\|\leqslant n^{-k}\left\{\|T_1^{(k)}\|+\sum_{\nu=0}^{m}\|T_{2^{\nu+1}}^{(k)}-T_{2^\nu}^{(k)}\|\right\}.$$

由于 $\|T_n^{(k)}\|\leqslant n^k\|T_n\|$(参见济曼的"函数逼近论" 4.8(26)),所以

$$\|T_{2^{\nu+1}}^{(k)}-T_{2^\nu}^{(k)}\|\leqslant 2^{(\nu+1)k}\|T_{2^{\nu+1}}-T_{2^\nu}\|\leqslant 2^{(\nu+1)k+1}E_{2^\nu}(f),$$

$$\|T_1^{(k)}\|\leqslant 2E_0(f).$$

从而

$$\begin{aligned}\omega_k\left(T_{2^{m+1}};\ \frac{1}{n}\right)&\leqslant 2n^{-k}\left\{E_0(f)+\sum_{\nu=0}^{m}2^{(\nu+1)k}E_{2^\nu}(f)\right\}\\&\leqslant 2n^{-k}\left\{E_0(f)+\sum_{\nu=0}^{m}2^{2k}\sum_{\mu=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu}E_\mu(f)\right\}\\&\leqslant n^{-k}\cdot 2^{2k+1}\left\{E_0(f)+E_1(f)+\sum_{\nu=1}^{m}\sum_{2^{\nu-1}+1}^{2^\nu}\mu^{k-1}E_\mu(f)\right\}\\&\leqslant c_k n^{-k}\sum_{\nu=0}^{2^m}(\nu+1)^{k-1}E_\nu(f).\end{aligned}$$

假如取 m 使 $2^m\leqslant n<2^{m+1}$, 那末就得到所要的结果. 引理 1 证明完毕.

定理 4 设 $f\in L_p(0, 2\pi)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$; $k\geqslant 1$,

$$U_{k,r}(f;\ x)=\sum_{0\leqslant\nu\leqslant r}\left(1-\frac{\nu^k}{(r+1)^k}\right)A_\nu(x)\quad(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots),$$

则

$$\begin{aligned}R_{k,r}(f)_{L_p}&=\|f(x)-U_{k,r}(f;\ x)\|_{L_p}\\&\leqslant\frac{C_k}{(1+r)^k}\sum_{\nu=0}^{r}(\nu+1)^{k-1}E_\nu(f)_{L_p}.\end{aligned}$$

【证明】 暂且将 $R_{k,r}(f)_{L_p}$, $\|f(x)\|_{L_p}$, $E_\nu(f)_{L_p}$ 分别简写成 $R(f)$, $\|f(x)\|$, $E_\nu(f)$, 设 $T_r(x)$ 是一 r 阶的三角多项式,则

$$R(f)\leqslant\|f(x)-T_r(x)\|(1+L_r)+R(T_r),$$

这里

$$L_r=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left|\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{r}\left(1-\frac{\nu^k}{(1+r)^k}\right)\cos\nu\theta\right|d\theta.$$

事实上,写着

$$T_r(x)=\sum_{\nu=0}^{r}(\alpha_\nu\cos\nu x+\beta_\nu\sin\nu x),$$

我们见到

$$R(f)\leqslant\|f(x)-T_r(x)\|+R(T_r)$$
$$+\left\|\sum_{\nu=0}^{r}\left(1-\frac{\nu^k}{(1+r)^k}\right)(A_\nu(x)-\alpha_\nu\cos\nu x-\beta_\nu\sin\nu x)\right\|.$$

末项等于

$$\left\|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{f(x+\theta)-T_r(x+\theta)\}\cdot\left\{\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{r}\left(1-\frac{\nu^k}{(1+r)^k}\right)\cos\nu\theta\right\}d\theta\right\|,$$

从而得到上述的不等式. 由于 $L_r=O(1)$, 所以当 k 是偶数时, 取 $T_r(x)$ 为对于 $f(x)$ 的最佳逼近多项式, 我们见到

$$R(f)\preccurlyeq E_r(f)+(r+1)^{-k}\|T_r^{(k)}(x)\|$$
$$\leqslant E_r(f)+(r+1)^{-k}\Big\{\|T_2^{(k)}(x)-T_0^{(k)}(x)\|$$
$$+\sum_{\nu=1}^{m}\|T_{2^{\nu+1}}^{(k)}(x)-T_{2^\nu}^{(k)}(x)\|+\|T_r^{(k)}(x)-T_{2^{m+1}}^{k}(x)\|\Big\},$$

这里 $2^m\leqslant r<2^{m+1}$. 应用贝恩斯坦(关于三角多项式的导函数)的定理, 从上式得到

$$R(f)\preccurlyeq E_r(f)+(r+1)^{-k}\left\{E_0(f)+\sum_{\nu=1}^{m}2^{\nu k}E_{2^\nu}(f)\right\}$$
$$\preccurlyeq(r+1)^{-k}\sum_{\nu=0}^{r}(\nu+1)^{k-1}E_\nu(f).$$

假如 k 是大于 1 的奇数, 那末

$$R(T_r)$$
$$=(1+r)^{-k+1}\left\|T_r^{(k-1)}(x)-\sum_{\nu=0}^{r}\left(1-\frac{\nu}{1+r}\right)\nu^{k-1}(\alpha_\nu\cos\nu x+\beta_\nu\sin\nu x)\right\|.$$

当 $k=1$ 时, 由 §5 的定理 3 和定理 4,

$$R(f)=R_{1r}(f)_{L_p}\leqslant\frac{C}{1+r}\sum_{\nu=0}^{r}E_\nu(f)_{L_p}\quad(\text{费耶平均}).$$

从而

$$R(T_r)\preccurlyeq(r+1)^{-k}\sum_{\nu=0}^{r-1}E_\nu(T_r^{(k-1)}).$$

应用下面引理 2 的特殊情况:

$$E_r(f^{(k)})\preccurlyeq r^k E_r(f)+\sum_{\nu=r+1}^{\infty}\nu^{k-1}E_\nu(f),$$

我们见到

$$\sum_{\nu=0}^{r-1}E_\nu(T_r^{(k-1)})\preccurlyeq\sum_{\nu=0}^{r-1}\left\{(\nu+1)^{k-1}E_\nu(T_r)+\sum_{\mu=\nu}^{r-1}(\mu+1)^{k-2}E_\nu(T_r)\right\}$$

$$\preccurlyeq\sum_{\nu=0}^{r-1}(\nu+1)^{k-1}E_\nu(T_r)\preccurlyeq\sum_{\nu=0}^{r-1}(\nu+1)^{k-1}E_\nu(f).$$

证明完毕. 现在证明下述

引理 2(斯捷切金) 设 $\{F_n\}$ 是一单调减小的正数序列,

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-1}F_n<\infty.$$

假如 $f(n)\in C_{2\pi}$, $f^{(r)}(x)\in C_{2\pi}$, 对于三角多项式叙列 $\{t_n(x)\}$, 成立着

$$\|f(x)-t_n(x)\|\leqslant F_{n+1},$$

那末

$$\|f^{(r)}-t_n^{(r)}\|\leqslant C_r\left\{n^r F_{n+1}+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}F_\nu\right\}.$$

【证明】 设 $n_k=2^k n$, 则

$$f(x)=t_{n_0}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\{t_{n_k}(x)-t_{n_{k-1}}(x)\}=t_n+U_1(x)+U_2(x)+\cdots,$$

这里 $U_n(x)=t_{2^k n}(x)-t_{2^{k-1}n}(x)$. 现在证明 $\sum U_k^{(r)}(x)$ 是匀敛的, 它的匀敛性建立着等式

$$f^{(r)}(x)-t_n^{(r)}(x)=\sum_{1}^{\infty}U_k^{(r)}(x).$$

由于 $\|U_k^{(r)}\|\leqslant(2^k n)^r\|U_k\|\leqslant2(2^k n)^r F_{2^{k-1}n+1}$, 所以从

$$4^r(2^{k-1}n)^{r-1}2^r nF_{2^k n+1}\leqslant2,\ 4^r\sum_{\nu=2^{k-1}n+1}^{2^k n}\nu^{r-1}F_\nu$$

得到

$$\sum\|U_k^{(r)}\|\leqslant 2\left\{(2n)^r F_{n+1}+4^r\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{2^{k-1}n+1}^{2^k n}\nu^{r-1}F_\nu\right\}$$
$$=2\left\{(2n)^r F_{n+1}+4^r\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}F_\nu\right\}$$
$$\leqslant C_r\left\{n^r F_{n+1}+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}F_\nu\right\}.$$

由是得到所要的不等式. 引理 2 证毕.

现在讨论 $R(f)$ 的下界. 下面将 $E_n(f)_{L_\infty}$, $R_r(f;\lambda)_{L_\infty}$ 暂时记作 $E_n(f)$, $R_r(f)$. 假如 $\alpha_n\downarrow 0$, $\mathfrak{M}(\alpha_n)$ 是适合 $E_n(f)\leqslant\alpha_n$ 的 f 所成的 $C_{2\pi}$ 的子集, 那末成立着

$$\sup_{f\in\mathfrak{M}(\alpha_n)}R_r(f;\lambda)_{L_\infty}\geqslant\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}(\lambda_\nu(r)-\lambda_{\nu+1}(r))\alpha_{\nu+1}\right|,$$

这里 $\lambda_0(r)\equiv 1$, $\lambda_\nu(r)\to 1\,(r\to r_0)$, $\lambda_\nu(r)=O(1)$. 事实上, 函数

$$g(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}(\alpha_\nu-\alpha_{\nu+1})\cos\nu x$$

属于 $C_{2\pi}$, 并且 $E_n(g)\leqslant\alpha_n$. 由于 $R_r(g,\lambda)$ 等于

$$\max_x\left|\sum_1^{\infty}(1-\lambda_\nu(r))(\alpha_\nu-\alpha_{\nu+1})\cos\nu x\right|$$
$$\geqslant\left|\sum_1^{\infty}(1-\lambda_\nu(f))(\alpha_\nu-\alpha_{\nu+1})\right|,$$

所以所要的不等式成立.

与定理 4 可以相提并论的, 有如下的

定理 5 设 $f(x)\in L_p$, $1<p<\infty$, 则

$$R_{k,r}(f)_{L_p}\geqslant\frac{M_p}{(1+r)^k}\left\{\sum_{\nu=1}^{r}\nu^{k\gamma-\nu}E_\nu^\gamma(f)_{L_p}\right\}^{\frac{1}{\gamma}}\quad(\gamma=\max(2,p)).$$

【证明】 对于 n, 有 m 适合 $2^m\leqslant n<2^{m+1}$, 置 $E_\nu(f)_{L_p}=E_\nu(f)$, 我们见到

$$\sigma_n=\sum_{\nu=1}^{n}(n+1)^{-k\gamma}\nu^{k\gamma-1}E_\nu^\gamma(f)\preccurlyeq\sum_{\nu=0}^{m+1}\sum_{\mu=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1}(n+1)^{-k\gamma}\mu^{k\gamma-1}E_\mu^\gamma(f)$$
$$\preccurlyeq\sum_{\nu=0}^{m+1}(n+1)^{-k\gamma}2^{\nu\gamma k}E_{2^\nu}^\gamma(f)\preccurlyeq\sum_{\nu=0}^{m+1}(n+1)^{-k\gamma}2^{\nu\gamma k}\left\|\sum_{\mu=2^\nu}^{\infty}A_{\mu\nu}(x)\right\|,$$

这里 $f(x)\sim\sum A_\mu(x)$. 应用 §3 的主要定理, 写着

$$\Delta_\mu = A_{2^{\mu-1}}(x) + \cdots + A_{2^\mu - 1}(x),$$

我们得到

$$\sigma_n \preccurlyeq \sum_{\nu=0}^{m+1} (n+1)^{-k\gamma} 2^{\nu\gamma k} \left\{ \int_0^{2\pi} \left(\sum_{\mu=\nu}^{\infty} \Delta_{\mu+1}^2 \right)^{\frac{p}{2}} dx \right\}^{\frac{\gamma}{p}}$$

当 $\frac{p}{2} \leqslant 1$ 时，由敏可夫斯基不等式，我们见到

$$\sigma_n \preccurlyeq \left\{ \int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu=0}^{m+1} (n+1)^{-2k} 2^{2\nu k} \sum_{\mu=\nu}^{\infty} \Delta_{\mu+1}^2 \right)^{\frac{p}{2}} dx \right\}^{\frac{2}{p}}$$

经过和差变换并且应用 §3 的主要定理，得到

$$\sigma_n \preccurlyeq \left\{ \int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu=0}^{m} (n+1)^{-2k} 2^{2\nu k} \Delta_{\nu+1}^2 + (n+1)^{-2k} 2^{2(m+1)k} \sum_{\nu=m+1}^{\infty} \Delta_{\nu+1}^2 \right)^{\frac{p}{2}} dx \right\}^{\frac{2}{p}}$$

$$\preccurlyeq \left\{ \int_0^{2\pi} \left| \sum_{\nu=0}^{m} (n+1)^{-k} 2^{\nu k} \Delta_{\nu+1} \right|^p dx \right\}^{\frac{2}{p}}$$

$$+ \left\{ \int_0^{2\pi} |f(x) - S_{2^{m+1}-1}(x)|^p dx \right\}^{\frac{2}{p}}.$$

由第三章 §6 的引理 1，当 $g(x) \in L_p(0, 2\pi)$ 时，

$$\|S_n(g;\ x)\| \leqslant C_p \|g(x)\|.$$

从而

$$\|T_n(x) - S_n(x)\| \leqslant C_p \|f(x) - T_n(x)\|,$$

这里 $E_n(f) = \|f(x) - T_n(x)\|$．从

$$\|f(x) - S_n(x)\| \leqslant \|f(x) - T_n(x)\| + \|T_n(x) - S_n(x)\|$$
$$\leqslant E_n(f) + C_p \|f(x) - T_n(x)\|,$$

得到 $\|f(x) - S_n(x)\| \leqslant (1 + C_p) E_n(f)$．

由是

$$\sigma_n \preccurlyeq \left\{ \int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu=0}^{m} (n+1)^{-2k} 2^{2\nu k} \Delta_{\nu+1}^2 \right)^{\frac{p}{2}} dx \right\}^{\frac{2}{p}} + E_n^2(f).$$

再由 §3 的主要定理，我们得到

$$\sigma_n \preccurlyeq \left\{ \int_0^{2\pi} \left| \sum_{\nu=0}^{m} (n+1)^{-k} 2^{\nu k} \Delta_{\nu+1} \right|^p dx \right\}^{\frac{2}{p}} + E_n^2(f).$$

最后，我们利用下面将证的引理 3 来完成定理的证明．

引理 3(马辛基维斯, 1938 年) 假如 $\lambda_\nu=O(1)$ 并且

$$\sum_{\nu=2^m}^{2^{m+1}-1}|\lambda_\nu-\lambda_{\nu+1}|=O(1),$$

那末当 $f(x)\in L_p(1<p<\infty)$, $f(x)\sim\sum A_n(x)$ 时, $\sum\lambda_n A_n(x)$ 是 L_p 中某一函数 $g(x)$ 的富理埃级数, $\|g(x)\|_{L_p}\leqslant C_p\|f(x)\|_{L_p}$.

于此对于函数 $\sum\limits_{\mu=0}^{n}\dfrac{\mu^k}{(n+1)^k}A_\mu(x)$, 取 $\lambda_\mu=\dfrac{2^{\nu k}}{\mu^k}$ $(2^\nu\leqslant\mu\leqslant 2^{\nu+1}-1)$, 当 $\mu\geqslant 2^{m+1}$ 时, 设 $\lambda_\mu=0$, 由引理 3, 我们见到

$$\sigma_n\preccurlyeq\left\{\int_0^{2\pi}\left|\sum_{\mu=0}^{n}(n+1)^{-k}\mu^k A_\mu(x)\right|^p dx\right\}^{\frac{2}{p}}+E_n^2(f)\preccurlyeq R_n^2(f).$$

假如 $p\geqslant 2$, 那末 $\gamma=p$, 我们已经证得

$$\sigma_n\preccurlyeq\sum_{\nu=0}^{m+1}\frac{2^{\nu pk}}{(n+1)^{pk}}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{\mu=\nu}^{\infty}\varDelta_{\mu+1}^2\right)^{\frac{p}{2}}dx$$
$$\preccurlyeq\int_0^{2\pi}\left(\sum_{\nu=0}^{m+1}\frac{2^{2\nu k}}{(n+1)^{2k}}\sum_{\mu=\nu}^{\infty}\varDelta_{\mu+1}^2\right)^{\frac{p}{2}}dx.$$

由是我们可以应用在 $p\leqslant 2$ 的证明, 得到 $\sigma_n\preccurlyeq R_n^p(f)$. 这就证明了所要的结果.

【引理 3 的证明】 首先对于 $f_1(x)$, $\cdots$, $f_N(x)\in L(2\pi)$ 建立下面的不等式:

$$I=\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{N}|S_k(f_n;\ x)|^2\right)^{\frac{r}{2}}dx\leqslant C_\gamma^r\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{N}f_n^2(x)\right)^{\frac{r}{2}}dx.$$

写着 $g_n(x)=\overline{f_n\cos kx}$, $h_n(x)=\overline{f_n\sin kx}$, 由于

$$\bar{f}_n(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_n(x+t)\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}dt,$$

所以

$$S_k(f_n;\ x)=g_n(x)\sin kx-h_n(x)\cos kx+\alpha_n(x),$$

这里

$$\alpha_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_n(t)\cos k(t-x)dt.$$

我们见到

$$I\leqslant 3^{\frac{r}{2}}\int_0^{2\pi}\left\{\sum_{n=1}^{N}(g_n^2+h_n^2+\alpha_n^2)\right\}^{\frac{r}{2}}dx.$$

由是得到所要的不等式.

置 $\Delta_\nu(f, x)=\sum_{2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} A_\nu(x)$, 我们知道:

$$A_\nu\int_0^{2\pi}\sum \Delta^2(f, x)\,dx\leqslant\int_0^{2\pi}|f|^r dx\leqslant B_r\int_0^{2\pi}\sum \Delta_\nu^2(f, x)dx.$$

因此, 写着 $\Delta_\nu(\lambda, x)=\sum_{2^\nu}^{2^{\nu+1}-1}\lambda_\nu A_\nu(x)$, 我们只要证明

$$\int_0^{2\pi}(\sum\Delta_\nu^2(\lambda, x))^{\frac{r}{2}}dx\leqslant A_r\int_0^{2\pi}(\sum\Delta_\nu^2(f, x))^{\frac{r}{2}}dx.$$

写着 $r_{\nu\mu}=\sum_{2^\nu}^{\mu}A_i(x)$, 那末

$$\Delta_\nu(\lambda, x)=\sum_{\mu=2^\nu}^{2^{\nu+1}-2}r_{\nu\mu}(x)\Delta\lambda_\mu+\Delta_\nu(x)\lambda_{2^\nu-1},$$

$$\Delta_\nu^2(\lambda, x)\leqslant 2M\left\{\sum_{\mu=2^\nu}^{2^{\nu+1}-2}|\Delta\lambda_\mu|r_{\nu\mu}^2+|\lambda_{2^\nu-1}|\Delta_\nu^2(x)\right\},$$

事实上, 由假设, 有 M 适合于 $|\lambda_\nu|\leqslant M$ 和 $\sum_{2^\nu}^{2^{\nu+1}}|\Delta\lambda_\nu|\leqslant M$. 利用前面所证的不等式, 我们得到

$$\int_0^{2\pi}(\sum\Delta_\nu^2(\lambda, x))^{\frac{r}{2}}dx$$

$$\leqslant(2M)^{\frac{r}{2}}\int_0^{2\pi}\left\{\sum_\nu\sum_{\mu=2^\nu}^{2^{\nu+1}-2}[|\Delta\lambda_\mu|r_{\nu\mu}^2+|\lambda_{2^\nu-1}|\Delta_\nu^2(x)]\right\}^{\frac{r}{2}}dx$$

$$\leqslant(2M)^{\frac{r}{2}}A_r\int_0^{2\pi}\left\{\sum_\nu\sum_{\mu=2^\nu}^{2^{\nu+1}-2}[|\Delta\lambda_\mu\Delta_\nu^2|+|\lambda_{2^\nu-1}|\Delta_\nu^2]\right\}^{\frac{r}{2}}dx$$

$$\leqslant(2M)^r A_r\int_0^{2\pi}(\sum\Delta_\nu^2(x))^{\frac{r}{2}}dx.$$

证明完毕.

与定理5的证明相仿, 我们可以建立下述

定理 6 设 $f(x)\in L_p$, $1<p<\infty$, $\gamma=\max(2, p)$, 则当 $0\leqslant r<1$ 时,

$$\left\|f(x)-\sum_{\nu=0}^{\infty}r^\nu A_\nu(x)\right\|_{L_p}$$

$$\geqslant M_p(1-r)\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty}r^\nu(\nu+1)^{\gamma-1}E_\nu^\gamma(f)_{L_p}\right\}^{\frac{1}{\gamma}}.$$

8. 插值逼近法

设 $f(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的可测函数. 设

$$a \leqslant x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)} \leqslant b \quad (n=1, 2, 3, \cdots),$$

$$f(x_k^{(n)}) = y_k^{(n)}, \quad \omega_n(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - x_k^{(n)}),$$

$$l_k^{(n)}(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k^{(n)})\omega_n'(x_k^{(n)})}.$$

我们称 $L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k^{(n)} l_k^{(n)}(x)$ 为由 $\{x_k^{(n)}\}$ 作成的 $f(x)$ 的**拉格朗日插值多项式**——代数多项式. $L_n(x)$ 的次数是不高于 n 的. 尽管 $f(x)$ 与 $L_n(x)$ 在各点 $x_k^{(n)}$ 上, 有相同的数值, $L_n(x) \to f(x)$ 的成立是有条件的.

定理 1 假如 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有 n 次的导数, 那末

$$|f(x) - L_n(x)| \leqslant \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{(n)}(x)| (b-a)^n / n!.$$

【证明】 设 $x_0 \in [a, b]$, $x_0 \neq x_k^{(n)}$ $(k=1, 2, \cdots, n)$. 置

$$C = \frac{f(x_0) - L_n(x_0)}{\omega_n(x_0)},$$

$$\varphi(x) = f(x) - L_n(x) - C\omega_n(x),$$

则 $\varphi^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - Cn!$, $\varphi(x_1^{(n)}) = \cdots = \varphi(x_n^{(n)}) = 0$. 由是

$$x_0, \ x_k^{(n)} \quad (k=1, 2, \cdots, n)$$

成为 $\varphi(x)$ 的 $n+1$ 个相异的零点. 因此, 导函数 $\varphi'(x)$ 在 $[a, b]$ 中有 n 个相异的零点, $\varphi''(x)$ 有 $n-1$ 相异的零点, $\cdots$, $\varphi^{(n)}(x)$ 在 $[a, b]$ 中有唯一的零点, 记它做 ξ; 从 $\varphi^{(n)}(\xi) = 0$, 得到

$$C = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

从而 $f(x) = L_n(x) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\omega_n(x)$. 由于 $|\omega_n(x)| \leqslant (b-a)^n$, 所以定理中的估计式成立, 证毕.

对于周期函数 $f(x)$ 的插值问题, 我们记 $2n+1$ 个点所成的组 $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \cdots, x_{2n}^{(n)}$ 为 ξ_n, n 阶的三角多项式 $U_n(\xi_n, f, x)$, 当 $0 \leqslant x_0^{(n)} < \cdots$

$<x_{2n}^{(n)}<2\pi$ 时，从 $2n+1$ 个方程

$$U_n(\xi_n, f, x_k^{(n)})=f(x_k^{(n)}) \quad (k=0, 1, \cdots, 2n)$$

决定.

定理 2 假如 $f(x)\in C_{2\pi}$, 那末存在 $\{\xi_n\}$ $(\xi_n=(x_0^{(n)}, \cdots, x_n^{(2n)}))$, 使

$$\lim_{n\to\infty} U_n(\xi_n, f, x)=f(x)$$

均匀地成立. 对于任意的 $\{\xi_n\}$, $C_{2\pi}$ 中有 $f(x)$ 适合于

$$\limsup_{n\to\infty} \max_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} |U_n(\xi_n, f, x)|=\infty.$$

定理的前半是马辛基维斯所建立的，后半是法贝 (Faber) 的定理 (详见前者的"全集"第 200 页).

【证明】 先证定理的前半. 设三角多项式 $T_n(x)$ 适合 $E_n(f)=\|f(x)-T_n(x)\|$, 则必有 $2n+1$ 个点 $0<x_0'<x_1'<\cdots<x_{2n}'<2\pi$, 在每一个点 x_k', $\varphi(x)\equiv f(x)-T_n(x)$ 有极(大, 小)值, 而其正负号则逐次改变. 事实上，当 $\varphi(x)$ 在 $(0, 2\pi]$ 中的子区间 $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_m$ 中无零点时，每一个 δ_k 有一个 $\varphi(x)$ 的极值点. 假如 $\varphi(x)$ 在这些区间上变号次数 $2k\leqslant 2n$, 那末 $(0, 2\pi)$ 中可以找到 $2k$ 个点使函数

$$\psi(x)=\varepsilon\sin\frac{\xi_1-x}{2}\sin\frac{\xi_2-x}{2}\cdots\sin\frac{\xi_{2k}-x}{2} \quad (\text{阶}\leqslant n)$$

在 $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_m$ 上与 $\varphi(x)$ 同号(参见伐赖-普山的《函数逼近论》§ 70), 取适当的 ε 可使

$$\|f(x)-(T_n(x)+\varepsilon\psi(x))\|<\|f(x)-T_n(x)\|=E_n(f).$$

这是矛盾. 由是可知 $[0, 2\pi)$ 中存在 $2n+1$ 个点:

$$0\leqslant x_0<x_1<\cdots<x_{2n}<2\pi$$

适合 $\varphi(x_k)=0$ $(k=0, 1, 2, \cdots, 2n)$. 从这个事实:

$$T_n(x_k)=f(x_k) \quad (k=0, 1, 2, \cdots, 2n)$$

以及 $E_n(f)\to 0$, 得到定理的前半. 这里 $\xi_n=(x_0, \cdots, x_{2n})$.

现在证明定理的后半. 对于 $\{\xi_n\}$, 作数列

$$L_n=L_n(\xi_n)=\max_{0\leqslant x\leqslant 2\pi, |f|\leqslant 1} U_n(\xi_n, f, x).$$

n 阶的三角多项式

$$t_k(x)=\prod_{\nu=0}^{2n}{}'\sin\frac{x-x_\nu}{2}\Big/\prod_{\nu=0}^{2n}{}'\sin\frac{x_k-x_\nu}{2}\quad(\prod{}'\text{ 表示 }\nu\neq k)$$

满足 $t_k(x_k)=1$, $t_k(x_i)=0(i\neq k)$. 从而阶数不高于 n 的三角多项式 $\sum_{k=0}^{2n}f(x_k)t_k(x)$ 等于 $U_n(\xi_n, f, x)$,

$$U_n(\xi_n, f(x+u), x-u)=\sum_{x_k\in\xi_n}f(u+x_k)t_k(x-u).$$

由于 $f(u+x_k)-S_n(f(x+u), x_k)$ 的最初 $2n+1$ 个富理埃系数都是零, 所以

$$\sum_{x_k\in\xi_n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{f(u+x_k)-S_n(f(x+u), x_k)\}t_k(x-u)du=0.$$

从而

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U_n(\xi_n, f(x+u), x-u)du=S_n(f, x).$$

对于 $|f(x)|\leqslant 1$, $0\leqslant x\leqslant 2\pi$, 置 $L_n=L_n(\xi_n)=\max\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 2\pi\\ |f|\leqslant 1}}|U_n(\xi, f, x)|$. 我们见到

$$L_n\geqslant\max_{|f|\leqslant 1}|S_n(f)|=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right|dx.$$

对于 n, 存在 $f_n\in C_{2\pi}$ 适合 $|f_n|\leqslant 1$ 和

$$\max_x|U_n(\xi_n, f_n, x)|\geqslant\frac{1}{2}L_n\to\infty.$$

取 $\{n_j\}$ 使 $f(x)=\sum L_{n_j}^{-\frac{1}{2}}f_{n_j}(x)\in C_{2\pi}$, 那末

$$\limsup_{n\to\infty}\max_{0\leqslant x\leqslant 2\pi}|U_n(\xi_n, f, x)|=\infty.$$

证明完毕.

现在特设

$$\xi_n=\left\{0, \frac{2\pi}{2n+1}, \frac{2\cdot 2\pi}{2n+1}, \cdots, \frac{2n\cdot 2\pi}{2n+1}\right\}, x_k^{(n)}=\frac{2k\pi}{2n+1};$$

置

$$U_n(\xi, f, x)\equiv U_n(f, x), U_n(f, x_k^{(n)})=f(x_k^{(n)}).$$

又作折线函数

$$\varphi_n(t)=\frac{2k\pi}{2n+1}\quad\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\leqslant t<\frac{2(k+1)2\pi}{2n+1};\ k=0, \cdots, 2n\right),$$

我们见到：当

$$f(x)\in C_{2\pi},\ D_n(t)=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\Big/2\sin\frac{t}{2}$$

时，

$$U_n(f,\ x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)D_n(x-t)d\varphi_n(t).$$

这是n阶的三角多项式

$$U_n(f,\ x)=\frac{1}{2}a_0^{(n)}+\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu^{(n)}\cos\nu x+b_\nu^{(n)}\sin\nu x),$$

$$\begin{matrix}a_\nu^{(n)}\\ b_\nu^{(n)}\end{matrix}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\nu t\,d\varphi_n(t).$$

定理 3 假如$f(x)$的富理埃级数绝对收敛，那末$\lim U_n(f,\ x)$匀敛于$f(x)$．假如只是$f(x)\in C_{2\pi}$，那末，均匀地成立着

$$\sigma_n(f,\ x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left\{\frac{1}{2}a_0^{(n)}+\sum_{\nu=1}^{k}(a_\nu^{(n)}\cos\nu x+b_\nu^{(n)}\sin\nu x)\right\}\to f(x).$$

【证明】 设 $S_n(f,\ x)=\frac{a_0}{2}+\sum_1^n(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x)$，则

$$\left.\begin{matrix}a_\nu^{(n)}\\ b_\nu^{(n)}\end{matrix}\right\}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\nu t\,d\varphi_n(t)$$

$$=\begin{cases}a_\nu+\sum\limits_{t=1}^{\infty}(a_{t(2n+1)+\nu}+a_{t(2n+1)-\nu}),\\ b_\nu+\sum\limits_{t=1}^{\infty}(b_{t(2n+1)+\nu}-b_{t(2n+1)-\nu}).\end{cases}$$

从而$\sum(|a_n|+|b_n|)<\infty$的话，

$$|U_n(f,\ x)-S_n(x)|\leqslant\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{n}(|a_{t(2n+1)\pm\nu}|+|b_{t(2n+1)\pm\nu}|)$$

$$=\sum_{n+1}^{\infty}(|a_\nu|+|b_\nu|).$$

由是$U_n(f,\ x)-f(x)=U_n(f,\ x)-S_n(x)+S_n(x)-f(x)$匀敛于零．

置 $U_{n,k}(x)=\frac{1}{2}a_0^{(n)}+\sum_{\nu=1}^{k}(a_\nu^{(n)}\cos\nu x+b_\nu^{(n)}\sin\nu x)$，我们要证

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(U_{n,k}(x)-f(x))=o(1)$$

均匀地成立．现在我们证明比此更强的结果．关于 x 均匀地成立着

$$\sum_{k=0}^{\infty}|U_{n,k}(x)-f(x)|=o(n).$$

对于 $\varepsilon>0$，存在阶数不高于 n 的三角多项 $t(x)$ 适合于

$$\|f(x)-t(x)\|<\varepsilon.$$

由于定理对于 $t(x)$ 成立，所以我们不妨假设 $|f(x)|<\varepsilon$ 来证明上记的等式．写着

$$U_{n,k}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)(x-t)}{2\sin\frac{1}{2}(x-t)}\cdot d\varphi_n(t)=A_{n,k}+B_{n,k},$$

这里

$$A_{n,k}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos\frac{1}{2}(x-t)\frac{\sin k(x-t)}{2\sin\frac{1}{2}(x-t)}d\varphi_n(t),$$

$$B_{n,k}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos k(x-t)d\varphi_n(t),\ |B_{n,k}|\leqslant|a_k^{(n)}|+|b_k^{(n)}|.$$

写着

$$g(x)=\left\{f(t)\cos\frac{1}{2}(x-t)-h(t)\right\}\Big/2\sin\frac{1}{2}(x-t),$$

$$h(t)=f(t)\cos\frac{1}{2}(x-t)\quad\left(x-\frac{1}{n}<t<x+\frac{1}{n}\right),$$

$$h(t)=0\quad\left(t\overline{\in}\left(x-\frac{1}{n},\ x+\frac{1}{n}\right)\right),$$

我们见到 $A_{n,k}=A'_{n,k}+A''_{n,k}$，这里

$$A'_{n,k}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g(t)\sin k(x-t)\,d\varphi_n,$$

$$A''_{n,k}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}h(t)\frac{\sin k(x-t)}{2\sin\frac{1}{2}(x-t)}d\varphi_n,$$

$$|A''_{n,k}|\leqslant\frac{2}{\pi}\max|f|\cdot\frac{\pi k}{2}\frac{2\pi}{2n+1}\leqslant\pi\max|f|<\pi\varepsilon,$$

设 $\alpha_k^{(n)}$，$\beta_k^{(n)}$ 是 $g(t)$ 的系数，则

$$\sum_{k=0}^{n}|U_{n,k}(x)|\leqslant\left|\frac{a_0^{(n)}}{2}\right|+\sum_{k=1}^{n}(|a_k^{(n)}|+|b_k^{(n)}|)+\left|\frac{\alpha_0^{n}}{2}\right|$$

$$+\sum_{k=1}^{n}(|\alpha_k^{(n)}|+|\beta_k^{(n)}|)+\pi(n+1)\varepsilon.$$

对于任一函数 ψ, 内插三角多项式 $U_n(\psi)$ 的系数是 $\gamma_0, \gamma_1, \delta_1, \cdots, \gamma_n, \delta_n$ 的话, 我们见到

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\psi^2(x)d\varphi_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}U_n^2(\psi)dx=\frac{\gamma_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\gamma_k^2+\delta_k^2).$$

从而

$$\left|\frac{\gamma_0}{2}\right|+\sum_{k=1}^{n}(|\gamma_k|+|\delta_k|)\leqslant\sqrt{n+1}\left(\frac{\gamma_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\gamma_k^2+\delta_k^2)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{n+1}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\psi^2(x)d\varphi_n(x)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

应用这个结果, 我们见到 $\sum_{k=0}^{n}|U_{n,k}(x)|$ 不大于

$$\sqrt{n+1}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g^2(t)d\varphi_n\right)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{n+1}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f^2(t)d\varphi_n\right)^{\frac{1}{2}}+\pi(n+1)\varepsilon.$$

由于

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g^2(t)d\varphi_n\leqslant\max f^2\cdot\frac{2}{\pi}\,\frac{2\pi}{2n+1}\cdot4n^2\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\leqslant32n\varepsilon^2,$$

所以

$$\sum_{k=0}^{n}|U_{n,k}(x)|\leqslant6(n+1)\varepsilon+2\pi\varepsilon(n+1)\leqslant13(n+1)\varepsilon.$$

这就完成着定理的证明.

从定理 2, 我们知道 $U_n(f)$ $(f\in C_{2\pi})$ 未必收敛于 $f(x)$. 但是成立着如下的(定理 4 与定理 5 都是马辛基维斯所发见的, 1936 的"数学研究"(Studia Math.)).

定理 4 设 $f(x)\in C_{2\pi}$, 则当 $1\leqslant p<\infty$ 时,

$$\int_0^{2\pi}|U_n(f)-f(x)|^p dx\to0,$$

这里

$$U_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)D_n(x-t)d\varphi_n(t),$$

$$\varphi_n(t)=\frac{2k\pi}{2n+1}\quad\left(t\in\left[\frac{2k\pi}{2n+1},\ \frac{2k+2}{2n+1}\pi\right),\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ 2n\right).$$

【证明】 假如 $t_n(x)$ 是一阶数不高于 n 的三角多项式，那末当 $1\leqslant p<\infty$ 时，

$$\int_0^{2\pi}|t_n(x)|^p d\varphi_n\leqslant C_p\int_0^{2\pi}|t_n(x)|^p dx.$$

事实上，

$$\left|\int_0^{2\pi}|t_n(x)|^p d(\varphi_n-x)\right|\leqslant p\int_0^{2\pi}|\varphi_n-x|\cdot|t_n'(x)|\cdot|t_n(x)|^{p-1}dx$$

$$\leqslant\frac{\pi p}{n}\int_0^{2\pi}|t_n'(x)|\cdot|t_n(x)|^{p-1}dx$$

$$\leqslant\frac{\pi p}{n}\left(\int_0^{2\pi}|t_n'(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{2\pi}|t_n(x)|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

利用下面的引理 1，

$$\left(\int_0^{2\pi}|t_n'(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant n\left(\int_0^{2\pi}|t_n(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

代入后得到所要的不等式 $C_p\leqslant\pi p+1$.

其次，我们注意积分 $\left(\int_0^{2\pi}|U_n(f)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ 的值等于

$$\sup_{g(t)}\int_0^{2\pi}U_n(f)g(t)dt,$$

这里

$$\int_0^{2\pi}|g(t)|^{\frac{1}{q}}dt=1,\quad\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

由于

$$U_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)D_n(x-t)d\,\varphi_n(x),$$

所以，变更积分的顺序，我们得到

$$\int_0^{2\pi}U_n(f)g(t)dt=\int_0^{2\pi}f(x)\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g(t)D_n(x-t)dt\right)d\,\varphi_n(x)$$

$$\leqslant 2\pi\max|f(x)|\left(\int_0^{2\pi}|S_n(g,\ x)|^q d\varphi_n(x)\right)^{\frac{1}{q}}.$$

应用前面的不等式于上式末尾的积分，并且应用第三章 §6 的引理 3，

我们得到

$$\int_0^{2\pi} U_n(f)g(t)\,dt \leqslant 2\pi C_q A_q \left(\int_0^{2\pi} |g(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \max|f(x)|$$
$$=2\pi C_q A_q \max|f|.$$

从而

$$\left(\int_0^{2\pi} |U_n(f)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant B_p \max|f|.$$

将 f 分成两部分：$f=f_1+t(x)$；$t(x)$ 是三角多项式，$|f_1|$ 很小，我们从上面的不等式以及 $t(x)$ 的性质断言 $\|U_n(f)-f(x)\|\to 0$. 定理证明完毕.

我们还要证明下述引理，这是齐革蒙特的定理.

引理 1 设 $t_n(x)$ 是 n 阶的三角多项式，$p\geqslant 1$，则

$$\left(\int_0^{2\pi} |t_n'(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant n\left(\int_0^{2\pi} |t_n(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

【证明】 设 $\chi(u)\geqslant 0$，$\chi'(u)\geqslant 0$，$\chi''(u)>0$ $(u\geqslant 0)$. 置

$$n_k=\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)}{n}\pi,\quad \alpha_k=n^{-1}\left(2\sin\frac{n_k}{2}\right)^{-2}.$$

由颜善不等式，

$$\chi\left(\frac{1}{n}\sum\alpha_k|t(\theta+n_k)|\right)\leqslant\frac{1}{n}\sum\alpha_k\chi(|t(\theta+n_k)|).$$

设 $n_1, n_2, \cdots, n_{2n}$ 是阶梯函数 $\phi_{2n}(t)$ 的不连续点，则当 $t_n(x)=a_n\cos nx+\sum\limits_{\nu=1}^{n}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x)$ 时，

$$t_n(x)=a_n\cos nx+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t_n(t)\frac{\sin n(t-x)}{2\operatorname{tg}\frac{t-x}{2}}\,d\phi_{2n}(t),$$

$$t_n'(x)=na_n\sin nx$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t_n(t)\left\{\frac{n\cos n(x-t)}{2\operatorname{tg}\frac{t-x}{2}}-\frac{\sin n(x-t)}{4\sin^2\frac{x-t}{2}}\right\}d\phi_{2n}(t),$$

$$t_n'(0)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} t_n(n_k)\frac{(-1)^{k+1}}{\left(2\sin\frac{1}{2}n_k\right)^2}.$$

由是，从

$$t_n'(\theta)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}t_n(\theta+n_k)\frac{(-1)^{k+1}}{\left(2\sin\frac{n_k}{2}\right)^2}\quad\left(n_k=\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi}{n}\right)$$

得到

$$|t_n'(\theta)|\leqslant\sum_1^{2n}\alpha_k|t_n(\theta+n_k)|.$$

从 $\chi'(t)\geqslant 0$，我们得到

$$\chi\left(\frac{1}{n}|t_n'(\theta)|\right)\leqslant\frac{1}{n}\sum\alpha_k\chi(|t_n(\theta+n_k)|).$$

由于 $\sum\alpha_k=1$，所以右端在 $[0, 2\pi]$ 的积分等于 $\int_0^{2\pi}\chi(t_n(\theta))\,d\theta$. 从而得到

$$\int_0^{2\pi}\chi\left(\frac{1}{n}|t_n'(\theta)|\right)d\theta\leqslant\int_0^{2\pi}\chi(t_n(\theta))d\theta.$$

置 $\chi(t)=t^p$，就得到所要的结果. 引理 1 证毕.

定理 5 设 $f(x)$ 是一全连续函数，

$$f(0)=f(2\pi)=0,\quad f'(x)\in L^p(0, 2\pi)\quad(1<p<\infty),$$

则 $\|U_n'(f, x)-f'(x)\|_{L_p}=o(1)$；这里

$$U_n(f, x_k)=f(x_k)\quad\left(k=0, \cdots, 2n;\ x_k=\frac{2k\pi}{2n+1}\right).$$

【证明】 设 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，存在着 $g(x)\in L_q$ 适合 $\|g(x)\|_{L_q}=1$ 与

$$\|P_n(x)\|_{L_p}=\int_0^{2\pi}P_n(x)g(x)dx,$$

这里 $P_n(x)=U_n(f, x)-S_n(f, x)$. 最后的积分等于

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g(x)\int_0^{2\pi}\{f(t)-S_n(f, t)\}D_n(x-t)d\varphi_n(t)dx$$

$$=\int_0^{2\pi}\{f(t)-S_n(f, t)\}S_n(g, t)d\varphi_n(t).$$

从而得到

$$\|U_n(f, x)-S_n(f, x)\|_{L_p}\leqslant\|f(t)-S_n(f, t)\|_{L_p}\cdot\|S_n(g, t)\|_{L_q, \varphi_n},$$

这里 $\|S_n(g, t)\|_{L_q,\varphi_n}^q=\int_0^{2\pi}|S_n(g, t)|^q\,d\varphi_n(t)$.

现在顺次估计不等式右端两个因子：$\|f-S_n\|$ 和 $\|S_n(g, t)\|$。

设 $f'(x)\sim\sum\alpha_\nu(x)$，$\alpha_\nu(x)=c_\nu\cos\nu x+d_\nu\sin\nu x$,

$$\tilde{\alpha}_\nu(x)=c_\nu\sin\nu x-d_\nu\cos\nu x,$$

则 $\mathfrak{S}[f]=\sum_1^\infty\nu^{-1}\tilde{\alpha}_\nu(x)$,

$$f(x)-S_n(f, x)=\sum_{\nu=n+1}^\infty\frac{1}{\nu}\tilde{\alpha}_\nu(x)=\sum_{\nu=n+1}^\infty\frac{\overline{S_{n,\nu}}(x)}{\nu(\nu+1)},$$

这里 $\overline{S_{n,\nu}}(x)=\sum_{n+1}^{\nu}(c_\nu\sin\nu x-d_\nu\cos\nu x)$. 由是

$$\|f(x)-S_n(f, x)\|_{L_p}\leqslant\sum_{n+1}^\infty\frac{1}{\nu(\nu+1)}\|\overline{S_{n,\nu}}(x)\|_{L_p}$$

$$\leqslant\sum_{n+1}^\infty\frac{C_p\|f'\|_{L_p}}{\nu(\nu+1)}\leqslant\frac{1}{n}C_p\|f'\|_{L_p}.$$

对于 $\|S_n(g, t)\|_{L_q,\varphi_n}$ 的估计，利用定理 4 的证明中的第一个不等式，得到

$$\|S_n(g, t)\|_{L_q,\varphi_n}\leqslant(1+\pi q)^{\frac{1}{q}}\|S_n(g, t)\|_{L_q}.$$

再利用第三章 §6 的引理 3，我们得到

$$\|S_n(g, t)\|_{L_q,\varphi_n}\leqslant B_q\|g\|_{L_q}=B_q.$$

从而得到

$$\|U_n(f, x)-S_n(f, x)\|_{L_p}\leqslant\frac{C_pB_q}{n}\|f'(x)\|_{L_p}.$$

由引理 1，$\|U_n'(f, x)-S_n'(f, x)\|_{L_p}\leqslant C_pB_q\|f'(x)\|_{L_p}$. 假如将 f 分为两个部分：$f(x)=f_1(x)+t(x)$，$t(x)$是三角多项式，$\|f_1(x)\|_{L_p}<\varepsilon$，那末我们就明白：当 $n\to\infty$ 时，$\|U_n'(f, x)-S_n'(f, x)\|\to0$. 定理证毕.

关于全连续函数 $f(x)$ 的导函数，成立着杨格-豪斯多甫的定理.

定理 6 设 f 是一全连续函数，

$$U_n'(f, x)=\sum_1^n(\alpha_\nu^{(n)}\cos\nu x+\beta_\nu^{(n)}\sin\nu x),$$

$$x_k=\frac{2k\pi}{2n+1},\quad U_n(f, x_k)=f(x_k).$$

假如

$$f'(x)\in L_p(0, 2\pi),\quad 1<p\leqslant2,\quad\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

那末

(1) $$\left(\sum_{\nu=1}^{n}|\alpha_\nu^{(n)}|^q+|\beta_\nu^{(n)}|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant A_p\|f'\|_{L_p}.$$

倒过来说：假如 $1<p\leqslant 2$,

(2) $$\left(\sum_{\nu=1}^{n}|\alpha_\nu^{(n)}|^p+|\beta_\nu^{(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant M,$$

那末 $f'(x)\in L_q$, $\|f'\|_{L_q}\leqslant A_pM$.

【证明】 设(2)成立，则当 $n_0<n$ 时，

$$\sum_{\nu=1}^{n_0}|\alpha_\nu^{(n)}|^p+|\beta_\nu^{(n)}|^p\leqslant M^p.$$

令 $n\to\infty$, 得到

$$\sum_{\nu=1}^{n_0}(|\alpha_\nu|^p+|\beta_\nu|^p)\leqslant M^p,$$

α_ν, β_ν 是 $\mathfrak{S}[f']$ 中的系数. 再令 $n_0\to\infty$, 得到 $\sum(|\alpha_\nu|^p+|\beta_\nu|^p)\leqslant M^p$. 由是可知 $f'(x)\in L_q$, $\|f'\|_{L_q}\leqslant A_pM$.

要从 $f'\in L_p(1<p\leqslant 2)$ 导出(1)，我们利用表达式：

$$a_\nu^{(n)}=a_\nu+\sum_{t=1}^{\infty}(a_{t(2n+1)+\nu}+a_{\nu(2n+1)-\nu}),$$

$$b_\nu^{(n)}=b_\nu+\sum_{t=1}^{\infty}(b_{t(2n+1)+\nu}-b_{\nu(2n+1)-\nu}).$$

这里

$$U_n(f,x)=\frac{1}{2}a_0^{(n)}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^{(n)}\cos kx+b_k^{(n)}\sin kx),$$

$$f(x)\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_{1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

从而得到

$$\begin{matrix}|\alpha_k^{(n)}|^q\\ |\beta_k^{(n)}|^q\end{matrix}\leqslant\begin{matrix}\left(|\alpha_k|+n\sum_{t=1}^{\infty}\frac{|\alpha_{t(2n+1)\pm k}|}{t(2n+1)\pm k}\right)^q\\ \left(|\beta_k|+n\sum_{t=1}^{\infty}\frac{|\beta_{t(2n+1)\pm k}|}{t(2n+1)\pm k}\right)^q\end{matrix}$$

$$\leqslant\left.\begin{matrix}\left(|\alpha_k|^q+\sum_{t=1}^{\infty}|\alpha_{t(2n+1)\pm k}|^q\right)\\ \left(|\beta_k|^q+\sum_{t=1}^{\infty}|\beta_{t(2n+1)\pm k}|^q\right)\end{matrix}\right\}\left(1+2\sum_{t=1}^{\infty}t^{-p}\right)^{\frac{q}{p}}.$$

相加而得

$$\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(|\alpha_k^{(n)}|^q+|\beta_k^{(n)}|^q\right)\right\}^{\frac{1}{q}}\leqslant A_q\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(|\alpha_k|^q+|\beta_k|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}.$$

由杨格-豪斯多甫的定理从上式得到(1)。定理证毕。

现在考虑区间$[-1, 1]$上的插值问题. 设 $x_k=x_k^{(n)}$ 是车比雪夫多项式 $T_n(x)=\cos n\arccos x$ 的零点:

$$x_k=\cos\left(n-k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}\quad (k=1, 2, \cdots, n).$$

由这些点作成的 $f(x)\in C[-1, 1]$ 的拉格朗日多项式

$$P_n(x)=T_n(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_k)}{(x-x_k)T_n'(x_k)},$$

当 $n\to\infty$ 时，一般地说，未必趋近于 $f(x)$，其困难处类似于 $\mathfrak{S}[f, x]\to f(x)$. 写着 $l_j^{(n)}(x)=\omega_n(x)/(x-x_k^{(n)})\omega_n'(x_k^{(n)})$，这里 $l_j^{(n)}(x)=T_n(x)/(x-x_j)T'(x_j)$. 设 p 是一自然数; 对于 j, 有整数 t_j 适合

$$2p(t_j-1)<j<2pt_j.$$

当 $n<2pt_j$ 时，规定 $l_{2pt_j}^{(n)}(x)\equiv 0$. 置 $r_j^{(n)}(x)=l_j^{(n)}(x)+(-1)^{j-1}l_{2pt_j}^{(n)}(x)$,

$$A_n(f, x)=\sum_{j=1}^{n}{}' f(x_j^{(n)})r_j(x),$$

这里 $\sum'$ 表示 j 不取 $2p$ 的倍数.

贝恩斯坦 (全集 II 第 130 页) 证明: 当 $f(x)\in C[-1, 1]$ 时，$A_n(f, x)$ $(n\to\infty)$ 匀敛于 $f(x)$.

设 $-1\leqslant x_0^{(n)}<\cdots<x_n^{(n)}\leqslant 1$, $l_k^{(n)}(x)=\omega_n(x)/(x-x_k^{(n)})\omega_n'(x_k^{(n)})$. 假设

$$\text{(I)}\quad |l_{k-1}^{(n)}(x)|\leqslant|l_k^{(n)}(x)|,\quad \text{(II)}\ |l_{k+1}^{(n)}(x)|\geqslant|l_{k+2}^{(n)}(x)|\quad (x_k^{(n)}\leqslant x\leqslant x_{k+1}^{(n)}),$$

$$l_{-1}^{(n)}(x)=l_0^{(n)}(x),\quad l_{n+1}^{(n)}(x)=l_n^{(n)}(x),\quad l_{n+2}^{(n)}(x)=l_n^{(n)}(x),$$

又设 $\sum(l_k^{(n)}(x))^2\leqslant C$, 别尔曼 (Д. Л. Берман) 称这样的$\{x_0^{(n)}, \cdots, x_n^{(n)}\}$是正则的, 并且证明: 假如 $\{x_k^{(n)}\}$ 具有正则性, 那末对$[-1, 1]$上的连续函数 $f(x)$, $A_n(f, x)$ 匀敛于 $f(x)$ (ДАН СССР 109, 1956). 别尔曼又指出:

$$x_k^{(n)}=\cos\frac{n-k}{n}\pi\quad (k=0, \cdots, n;\ n=1, 2, \cdots)$$

是正则的(Математика, 1965).

定理 7 设三角阵 $\{x_0^{(n)}, \cdots, x_n^{(n)}\}$ $(-1\leqslant x_0^{(n)}<\cdots\leqslant x_n^{(n)}\leqslant 1)$ 满足(I)和(II), $|l_k^{(n)}(x)|\leqslant K\varphi(h)$, 这里 h 表示 $x_j^{(n)}$ 落在 x 与 $x_k^{(n)}$ 之间的个数, $\varphi(h)\downarrow 0(h\to\infty)$. 假如函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上是全连续的, 那末

$$L_n(f, x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k^{(n)})l_k^{(n)}(x) \quad (n\to\infty)$$

匀敛于 $f(x)$.

【证明】 简写 $l_k=l_k^{(n)}(x)$, 记 $\lambda_k^{(n)}(x)=\lambda_k^{(n)}=l_k+l_{k+1}+\cdots+l_n$. 当 $x_p^{(n)}<x<x_{p+1}^{(n)}$ 时, $j<p$ 的话, $|\lambda_j^{(n)}|\leqslant|l_j+\cdots+l_p|+|l_{p+1}+\cdots+l_n|$; 末项的 l_ν 是一正一负的, 从而——利用(I)和(II)

$$|\lambda_{p+1}^{(n)}|\leqslant(|l_{p+1}|-|l_{p+2}|)+(|l_{p+3}|-|l_{p+4}|)+\cdots\leqslant|l_{p+1}|\leqslant K\varphi(1).$$

由是可知 $|\lambda_j^{(n)}|\leqslant 2K\varphi(1)=C$.

设 $t>x$, $x_s<t<x_{s+1}$, 则

$$\Big|\sum_{x_k^{(n)}>t} l_k(x)\Big|=|\lambda_{s+1}^{(n)}(x)|\leqslant|l_{s+1}|.$$

由于

$$|l_{s+1}|\leqslant K\varphi\left(\frac{t-x}{\varDelta_n}\right) \quad (\varDelta_n=\max_k(x_{k+1}^{(n)}-x_k^{(n)})),$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{x_k^{(n)}>t} l_k^{(n)}(x)=0 \quad (t>x).$$

同样可证

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{x_k^{(n)}<t} l_k^{(n)}(x)=0 \quad (t<x).$$

固定 $x\in[-1, 1]$, 取 $t_1<t_2$, 使 t_1 和 t_2 都不等于 $(x_0^{(n)}, \cdots, x_n^{(n)})$ $(n=1, 2, \cdots)$中任何 $x_k^{(n)}$, 而 $x\in(t_1, t_2)$, 对于 n, 我们见到

$$\Sigma_2\equiv\sum_{x_k^{(n)}>t_2}^{n}(f(x_k^{(n)})-f(x))l_k^{(n)}(x)$$

$$=\sum_{x_k^{(n)}>t}^{n-1}\varDelta f(x_k)\lambda_k^{(n)}(x)+(f(x_n^{(n)})-f(x))\lambda_n^{(n)}(x)$$

的绝对值小于

$$\sum_{x_k^{(n)}>t_2}^{n-1}|\varDelta f(x_k)|\cdot K\varphi\left(\frac{t_2-x}{\varDelta_n}\right)+2M\varphi\left(\frac{t_2-x}{\varDelta_n}\right),$$

这里 $M=\max|f(x)|$. 记 $f(x)$ 在$[a, b]$上的全变差为 $V(a, b)$, 则得

$$|\Sigma_2|<(KV(-1, 1)+2M)\varphi\left(\frac{t_2-x}{\Delta_n}\right).$$

同样可证

$$|\Sigma_1|=\left|\sum_{x_k^{(n)}<t_1}(f(x_k^{(n)})-f(x))l_k^{(n)}(x)\right|=O\left(\varphi\left(\frac{x-t_1}{\Delta_n}\right)\right).$$

置 $\Sigma_3=\sum\limits_{t_1<x_k^{(n)}<t_2}(f(x_k)-f(x))l_k^{(n)}(x)$, 设 $x\in[t', t'']$,

$$t'=\frac{2t_1+t_2}{3},\quad t''=\frac{t_1+2t_2}{3}.$$

由和差变换, $\Sigma_3=\Sigma_3'+\Sigma_3''$,

$$\begin{aligned}\Sigma_3'=&\sum_{t_1<x_k^{(n)}<x}\Delta f(x_k^{(n)})(l_k^{(n)}+l_{k-1}^{(n)}+\cdots)\\&+(f(x_{\nu_1}^{(n)})-f(x))(l_k^{(n)}+\cdots+l_{\nu_1}^{(n)})\\\Sigma_3''=&\sum_{t_2>x_k^{(n)}>x}\Delta f(x_k^{(n)})(l_k^{(n)}+l_{k+1}^{(n)}+\cdots+l_{\nu_2}^{(n)})\\&+(f(x_{\nu_2}^{(n)})-f(x))(l_k^{(n)}+\cdots+l_{\nu_2}^{(n)}).\end{aligned}$$

从而$|\Sigma_3'|$和$|\Sigma_3''|$分别小于或等于 $O(V(t_1, t_2))$. 由是, 总结

$$\Sigma_1=O\left(\varphi\left(\frac{t'-t_1}{\Delta_n}\right)\right),\quad \Sigma_2=O\left(\varphi\left(\frac{t_2-t_2'}{\Delta_n}\right)\right),$$

$$\Sigma_3=O(V(t_1, t_2)),$$

得到

$$f(x)-L_n(f, x)=O\left(\varphi\left(\frac{t_2-t_1}{\Delta_n}\right)\right)+O(V(t_1, t_2)).$$

对于 $\varepsilon>0$, 取 t_2-t_1 很小, 可使末项小于 $\frac{\varepsilon}{2}$, 固定 t_2-t_1, 取 N 足够大, 那末

$$|f(x)-L_n(f, x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\quad(n>N).$$

定理证毕.

将定理的证明, 稍事改变, 我们有下述的

系 在定理中所设的(I), (II)两个条件下, 在有界变差函数 $f(x)$ 的连续点 x, 成立着

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f, x)=f(x).$$

设

$$-1\leqslant x_0^{(n)}<x_1^{(n)}<\cdots<x_n^{(n)}\leqslant 1 \quad (n=0, 1, 2, \cdots).$$

对于 $f(x)\in C[-1, 1]$，作如下的函数平均值：

$$m_0^{(n)}(f)=\{3f(x_0^{(n)})+f(x_1^{(n)})\}/4,$$

$$m_n^{(n)}(f)=\{f(x_{n-1}^{(n)})+3f(x_n^{(n)})\}/4,$$

$$m_k^{(n)}(f)=\frac{1}{4}\{f(x_{k-1}^{(n)})+2f(x_k^{(n)})+f(x_{k+1}^{(n)})\} \quad (0<k<n).$$

利用 $m_k^{(n)}(f)(k=0, 1, \cdots, n)$，作成插值多项式

$$M_n(f, x)=\sum_0^n m_k^{(n)}(f)l_k^{(n)}(x).$$

贝恩斯坦是利用车比雪夫多项式的零点作出 $M_n(f, x)$ 的. 现在证明

定理 8(别尔曼，1965)*). 设

$$x_k^{(n)}=\cos\frac{(n-k)\pi}{n} \quad (k=0, 1, \cdots, n),$$

则当 $f(x)\in C[-1, 1]$ 时，

$$|f(x)-M_n(f; x)|\leqslant A\omega\left(f; \frac{\pi}{n}\right).$$

这里的 A 是一绝对常数，但是上式右端可代以

$$(24+2\pi^4|\sin n \arccos x|)\,\omega\left(f; \frac{\pi}{n}\right).$$

【证明】 简写

$$l_k^{(n)}(x)=l_k,\ 4R_k(x)=l_{k-1}+2l_k+l_{k+1} \quad (1<k<n),$$

$$4R_0(x)=3l_0+l_1, \quad 4R_n=3l_n+l_{n-1},$$

我们见到

$$M_n(f, x)=f(x_0^{(n)})R_0(x)+\cdots+f(x_n^{(n)})R_n(x),$$

由于 $\sum R_k=1$，所以，写着

$$\omega(f, t)=\omega(t), \quad E_k=\omega(|x-x_k|)\,|R_k(x)|,$$

$$|M_n(f, x)-f(x)|=\left|\sum(f(x_k)-f(x))R_k(x)\right|$$

$$\leqslant\sum E_k=S_1+S_2,$$

---

*) 数学(Математика, Изв. ВУЗ, 6).

这里 $S_1=\sum\limits_{x_k<x}E_k$, $S_2=\sum\limits_{x_k>x}E_k$, $x_k=x_k^{(n)}$.

设 $x_p<x<x_{p+1}$, 则 $x_{p+1}-x<\frac{\pi}{n}$, $x_{p+2}-x<\frac{2\pi}{n}$. 置

$$x=\cos\theta,\quad \theta_k=\frac{(n-k)\pi}{n},\quad x_k=\cos\theta_k,$$

则得

$$l_0(x)=\frac{(-1)^{n+1}\sin\theta\sin n\theta}{2n(\cos\theta-\cos\theta_0)},$$

$$l_k(x)=\frac{(-1)^{n-k}\sin\theta\sin n\theta}{n(\cos\theta-\cos\theta_k)}\quad(0<k<n),$$

$$l_n(x)=\frac{-\sin\theta\sin n\theta}{2n(\cos\theta-\cos\theta_n)}.$$

从而 $|l_k(x)|\leqslant 2$, $l_0^2(x)+l_n^2(x)\leqslant 1$. S_2 等于 $E_{p+1}+E_{p+2}+\cdots+E_n$, 它的最初两项之和 $E_{p+1}+E_{p+2}\leqslant 6\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)$, 事实上, $|R_k(x)|\leqslant 2$. 写着

$$g(t)=\frac{1}{\cos\theta-\cos t},$$

则 $\pm R_k(x)$ 等于

$$\frac{(-1)^{k+1}\sin\theta\sin n\theta}{4n}(g(\theta_{k-1})-2g(\theta_k)+g(\theta_{k+1}))$$
$$(k>p+2).$$

区间 $(\theta_{k-1},\ \theta_{k+1})$ 中有 ξ_k 适合于

$$|g(\theta_{k-1})-2g(\theta_k)+g(\theta_{k+1})|\leqslant 2\frac{\pi^2}{n^2}|g''(\xi_k)|.$$

由于 $g''(t)=(1+\sin^2 t-\cos\theta\cos t)(\cos\theta-\cos t)^{-3}$, 所以得到

$$|R_k(x)|\leqslant\frac{2\pi^2|\sin n\theta|}{n^3}\left|\frac{\sin\theta}{\cos\xi_k-\cos\theta}\cdot\frac{1+\sin^2\xi_k-\cos\xi_k\cos\theta}{(\cos\xi_k-\cos\theta)^2}\right|$$

$$\leqslant\frac{3\pi^2|\sin n\theta|}{n^3\left|\sin^2\frac{\theta-\xi_k}{2}\right|^3}.$$

由于

$$\left|\sin\frac{\theta-\xi_k}{2}\right|\geqslant\left|\frac{\theta-\xi_k}{\pi}\right|>\frac{\theta_p-\theta_{k+2}}{\pi},$$

所以从上式得到

$$|R_k(x)|\leqslant\frac{3\pi^2|\sin n\theta|}{(k+2-p)^3}.$$

又因

$$x_k-x<x_k-x_p\leqslant\frac{(k-p)\pi}{n},$$

我们得到

$$E_k\leqslant 3\pi^2|\sin n\theta|(k+2-p)^{-3}\omega\left(\frac{(k-p)\pi}{n}\right),$$

从而，结合 $E_{p+1}+E_{p+2}$,

$$\sum_{k=p+3}^{n}E_k\leqslant\sum_{k>p+2}\frac{3\pi^2|\sin n\theta|}{(k+2-p)^2}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\leqslant\frac{\pi^4}{2}|\sin n\theta|\,\omega\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

$$S_2\leqslant\left(6+\frac{\pi^4}{2}|\sin n\theta|\right)\omega\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

同样对于 S_1 可得这个结果．因此，在区间[0, 1]上成立着

$$|M_n(f,\ x)-f(x)|\leqslant(12+\pi^4|\sin n\theta|)\,\omega\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

由于插值点系 $x_k^{(n)}=\cos\dfrac{(n-k)\pi}{n}$ $(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ 的对称性，$f(-x)=f(x)$ 的话，上式当 $-1\leqslant x<0$ 时成立．从而上式对于奇函数 $f(x)$ 也成立．一般地说，把 $f(x)$ 写成偶函数与奇函数的和：

$$\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}\quad(-1\leqslant x\leqslant 1)$$

我们就得到定理所述的结果．定理证毕．

对于一般的插值问题：从 x: $-1\leqslant x_0^{(n)}<x_1^{(n)}<\cdots\leqslant x_n^{(n)}\leqslant 1$, 作

$$l_k^{(n)}(x)=\prod_{j=0}^{n}{}'\frac{x-x_j^{(n)}}{x_k^{(n)}-x_j^{(n)}}\quad(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n).$$

当 $f\in C[-1,\ 1]$ 时，要用 $L_n(f,\ X,\ x)=\sum f(x_k^{(n)})l_k^{(n)}(x)$ 来逼近 $f(x)$．设满足

$$\omega(f,\ t)\leqslant a(f)\omega(t)\quad(\omega(t)\text{：连续模},\ a(f)\text{：常数})$$

的一切 $f(x)$ 成函数类 $C(\omega)$．写着

$$\lambda_n(X)=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\sum_{k=0}^{n}|l_k^{(n)}(x)|\quad(n=0,\ 1,\ \cdots),$$

$$S(\omega,\ X)=\limsup_{n\to\infty}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\lambda_n(X).$$

陆静斯基(С. М. Лозинский)于1948年的苏联科学通报(ДАН 59)上，发表了如下的定理：假如 $f\in C(\omega)$，那末 $S(\omega, x)=0$ 含有 $f(x)-L_n(f, X, x)=o(1)$；当 $S(\omega, X)>0$ 时，假如 $\omega\left(\frac{1}{n}\right)\log n\neq o(1)$，或是 $\omega(t^2)/\omega(t)\geqslant a>0$，那末 $C(\omega)$ 中有 $f(x)$ 适合 $\|f(x)-L_n(f, X, x)\|\neq o(1)$. 后半部分被基西(О. Киш)和沙巴多西(И. Сабадош)拓广为如下的定理[匈牙利科学院的数学杂志(Acta M.) XVI, 1965]:

定理 9 假如 $\limsup\omega(1/n^2\lambda_n(X))\lambda_n(X)>0$，那末 $C(\omega)$ 中有 $f(x)$ 适合

$$\limsup_{n\to\infty}\|f(x)-L_n(f, X, x)\|>0.$$

要从这个定理导出陆静斯基定理的后半部分，首先证明

引理 2 $\lambda_n(X)>b\log n,\ 0<b<1.$

【证明】 首先证明当 $-1\leqslant x_0<x_1<\cdots\leqslant x_n\leqslant 1$ 时，存在次数不高于 n 的多项式 $P(x)$ 适合

$$|P(x_k)|<8\sqrt{\pi}\quad (k=0, 1, \cdots, n),$$

但是 $[-1, 1]$ 中有点 c 满足 $P(c)>\log n$. 置

$$\theta=\arccos x,\quad \theta_k=\arccos x_k,$$

则 $0\leqslant\theta_k\leqslant\pi$，我们要证：有余弦多项式 $T(\theta)$ (阶数不高于 n) 以及 $\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant\pi)$ 适合

$$|T(\theta_k)|\leqslant 8\sqrt{\pi}\quad (k=0, 1, \cdots, n),\quad T(\alpha)>\log n.$$

由是可知多项式 $P(x)=T(\arccos x)$ 满足 $P(x)=\sum P(x_k)l_k(x)$,

$$|P(x)|\leqslant 8\sqrt{\pi}\lambda_n(X),\quad \lambda_n(X)>\frac{\log n}{8\sqrt{\pi}}\quad (c=\cos\alpha).$$

置 $b=\dfrac{1}{8\sqrt{\pi}}$，得到 $\lambda_n(X)>b\log n$. 现在证明 $T(\theta)$ 的存在.

设 $c_k(\theta)$ 都是阶数不高于 n 的余弦多项式. 置

$$c_k(\theta_j)=0\quad (k\neq j),\ c_k(\theta_k)=1;$$

$$A(\theta)=\frac{\cos\theta}{n}+\frac{\cos 2\theta}{n-1}+\cdots+\frac{\cos n\theta}{1},$$

$$B(\theta)=\frac{\cos(n+2)\theta}{1}+\frac{\cos(n+3)\theta}{2}+\cdots+\frac{\cos(2n+1)\theta}{n},$$

则因 $\sum_1^n \sin kx/k$ 的绝对值小于 $2\sqrt{\pi}$,

$$|A(\theta)-B(\theta)|=\left|2\sin(n+1)x\sum_1^n(\sin kx)/k\right|<4\sqrt{\pi}.$$

余弦多项式 $U(\theta)=A(2\theta)-\sum_0^n\{B(\theta_k+\theta)+B(\theta_k-\theta)\}c_k(\theta)$ 在$[0, \pi]$上的积分等于零,它在$[0, \pi]$中至少有一个零点 α:

$$U(\alpha)=0.$$

置 $T(\theta)=[A(\theta+\alpha)+A(\theta-\alpha)]-\sum_0^n\{B(\theta_k+\theta)+B(\theta_k-\theta)\}c_k(\theta)$.

这是一个阶数不高于 n 的余弦多项式,它满足

$$T(\theta_k)=[A(\theta_k+\alpha)-B(\theta_k+\alpha)]+[A(\theta_k-\alpha)-B(\theta_k-\alpha)],$$

$$|T(\theta_k)|<8\sqrt{\pi}.$$

另一方面,

$$T(\alpha)=A(0)+U(\alpha)=A(0)=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}>\log n.$$

引理 2 证毕.

现在证明陆静斯基的定理: 假如

$$\limsup\omega\left(\frac{1}{n}\right)\log n>0,$$

那末当 $S(\omega, X)>0$ 时, $C(\omega)$ 中有 $f(x)$ 满足

$$\|f(x)-L_n(f, X, x)\|\neq o(1).$$

事实上,从 $\omega\left(\frac{1}{n}\right)\log n$ 的上限为正的假设,我们得到自然数列 $\{n_j\}$ 和正数 a 适合 $\omega\left(\frac{1}{n_j}\right)\log n_j\geqslant a$. 对于 n_j,有自然数 k_j 满足

$$bk_j\log k_j\leqslant n_j<bk_{j+1}\log k_{j+1}.$$

由引理 2, 我们见到

$$\omega\left(\frac{1}{k_j^2\lambda_{k_j}(X)}\right)\geqslant\frac{1}{2}\omega\left(\frac{1}{k_j^2 b\log k_j}\right)\frac{b\log k_j}{\lambda_{k_j}(X)}.$$

由于

$$\frac{1}{2}\omega\left(\frac{1}{k_j^2 b\log k_j}\right)b\log k_j\geqslant\omega\left(\frac{1}{n_j}\right)\frac{b}{6}n_j\geqslant\frac{ab}{6},$$

所以

$$\limsup \omega\left(\frac{1}{n^2\lambda_n(X)}\right)\lambda_n(X)\geqslant\frac{ab}{6}>0.$$

由定理 9, $C(\omega)$ 有 $f(x)$ 适合 $\limsup\|f(x)-L_n(f, X, x)\|>0$. 证毕.

【定理 9 的证明】 设 $[-1, 1]$ 中的 z_n 使 $\sum|l_k^{(n)}(x)|$ 取最大值 $\lambda_n(X)$:

$$\lambda_n(X)=\sum_{k=0}^{n}|l_k^{(n)}(z_n)|.$$

设 $g_n(x)\in C[-1, 1]$, $g_n(x_k^{(n)})=\operatorname{sign} l_k^{(n)}(z_n)$; 在 $(x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)})$ 上 $g(x)$ 是一次的(线性函数). 由是可知

$$|g_n(x)|\leqslant 1,$$

$$L_n(g_n, X, z_n)=\sum l_k^{(n)}(z_n)g_n(x_k^{(n)})=\sum|l_k^{(n)}(z_n)|=\lambda_n(X).$$

下面将证 $|g_n'(x)|\leqslant 2n^2\lambda_n(X)$, 从而 $g_n'(x)\in \mathrm{Lip}\,1$. 因此

$$g_n(x)\in C(\omega).$$

不妨假设 $\|L_n(g_m, X, x)-g_m(x)\|=o(1)$; 事实上, 当左端 $\neq o(1)$ 时, 定理 9 已经证明完毕. 由定理 9 中所设的条件, 存在 $a>0$ 以及 $\{n_j\}$ 适合

$$\omega\left(\frac{1}{n_j^2\lambda_{n_j}(X)}\right)\lambda_{n_j}(X)\geqslant a.$$

又不妨假设 $\|L_{n_j}(g_{n_i}, X, x)-g_{n_i}(x)\|\leqslant 1$ 当 $j>i\,(i=1, 2, \cdots)$ 时成立. 利用引理 2, 我们可设

$$\lambda_{n_j}(X)\geqslant 4,\ \lambda_{n_{j+1}}(X)\geqslant 4\lambda_{n_j}(X),\ n_{j+1}\geqslant 2n_j.$$

由是可知

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{g_{n_j}(x)}{\lambda_{n_j}(X)}\in C(-1, 1).$$

现在还要证明 $f\in C(\omega)$.

对于 $h>0$, 设 n_j 是适合 $n^2\lambda_n(X)h\geqslant 1$ 的最小 n. 从而

$$\frac{|g_{n_k}(x+h)-g_{n_k}(x)|}{\lambda_{n_k}(X)}\leqslant 2n_k^2h\leqslant 2\cdot 4^{k-j+1}n_{j-1}^2h$$

当 $k<j$ 时成立. 由于 $t'>t$ 含有 $\omega(t')/t'\leqslant 2\omega(t)/t$, 所以

$$n_{j-1}^2h\leqslant\frac{2\omega(h)}{\lambda_{n_{j-1}}(X)\,\omega(1/n_{j-1}^2\lambda_{n_{j-1}}(X))}\leqslant 2\omega(h)a^{-1}.$$

假如 $k\geqslant j$, 那末

$$\frac{|g_{n_k}(x+h)-g_{n_k}(x)|}{\lambda_{n_k}(X)}\leqslant\frac{2}{4^{k-j}x_{n_j}(X)}\leqslant\frac{2\omega(1/n_j^2\lambda_{n_j}(X))}{4^{k-j}a}\leqslant\frac{2\omega(h)}{4^{k-j}a}.$$

总结起来,从

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant\frac{2\omega(h)}{a}\left(2\sum_{k=1}^{j-1}4^{k-j+1}+\sum_{k=j}^{\infty}4^{j-k}\right)\leqslant\frac{8\omega(h)}{a}$$

得到 $f(x)\in C(\omega)$.

级数

$$f(z_{n_k})-L_{n_k}(f,\ X,\ z_{n_k})=\sum\{g_{n_\nu}(z_{n_k})-L_{n_k}(g_{n_\nu},\ X,\ z_{n_k})\}/\lambda_{n_\nu}(X)$$

的第 ν 项,当 $1<\nu<k$ 时,

$$\frac{|g_{n_\nu}(z_{n_k})-L_{n_k}(g_{n_\nu},\ X,\ z_{n_k})|}{\lambda_{n_\nu}(X)}\leqslant 4^{-\nu}.$$

另一方面,我们见到

$$\frac{L_{n_k}(g_{n_k},\ X,\ z_{n_k})}{\lambda_{n_k}(X)}=1,\quad\frac{|g_{n_\nu}(z_{n_k})|}{\lambda_{n_\nu}(X)}\leqslant\frac{1}{4^\nu}\quad(\nu\geqslant k),$$

$$\frac{|L_{n_k}(g_{n_\nu},X,z_{n_k})|}{\lambda_{n_\nu}(X)}\leqslant\frac{\lambda_{n_k}(X)}{\lambda_{n_\nu}(X)}\leqslant 4^{k-\nu}\quad(\nu>k).$$

由是从

$$f(z_{n_k})-L_{n_k}(f,\ X,\ z_{n_k})\leqslant\sum_{\nu=1}^{k-1}4^{-\nu}-1+\sum_{\nu=k}^{\infty}4^{-\nu}+\sum_{\nu=k+1}^{\infty}4^{k-\nu}=-\frac{1}{3}$$

得到

$$\limsup_{n\to\infty}\|f(x)-L_n(f,\ X,\ x)\|\geqslant\frac{1}{3}>0.$$

我们还要证明 $|g_n'(x)|\leqslant 2n^2\lambda_n(X)$. 我们见到

$$|g_n'(x)|\leqslant\frac{2}{\min\limits_{\nu}(x_{\nu+1}^{(n)}-x_\nu^{(n)})}.$$

因此我们只要证明不等式

$$\frac{1}{x_{\nu+1}^{(n)}-x_\nu^{(n)}}<n^2\lambda_n(X)$$

对于 $\nu=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$ 成立就好了. 由于 $l_\nu^{(n)}(x_\nu^{(n)})=1$, $l_\nu^{(n)}(x_{\nu+1}^{(n)})=0$, 所以 $(x_\nu,\ x_{\nu+1})$ 中有 ξ 适合于

$$\frac{-1}{x_{\nu+1}^{(n)}-x_\nu^{(n)}}=\frac{l_\nu^{(n)}(x_{\nu+1}^{(n)})-l_\nu^{(n)}(x_\nu^{(n)})}{x_{\nu+1}^{(n)}-x_\nu^{(n)}}=[l_\nu^{(n)}(\xi)]'.$$

右端的绝对值不大于

$$(n-1)^2 \max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |l_\nu^{(n)\prime}(x)| < n^2\lambda_n(X).$$

因此 $x_{\nu+1}^{(n)}-x_\nu^{(n)}<n^2\lambda_n(X)$. 定理证明完毕.

至于最后论断，我们应用了马尔可夫 (А. А. Марков) 的定理：假如次数不高于 n 的多项式 $P(x)$ 在 $[a, b]$ 上的绝对值不大于 M，那末在 $[a, b]$ 上，$|P'(x)|\leqslant 2Mn^2/(b-a)$ (参见那汤松的《函数构造论》第六章 §6). 这个定理，对应于三角多项式的贝恩斯坦不等式，前面实在已经用过.

定理 10 当 $\lambda_n(X)\omega(1/n^2\lambda_n(X))$ 的上限是 $+\infty$ 时，$C(\omega)$ 中有 $f(x)$ 适合

$$\limsup_{n\to\infty}\|L_n(f, X, x)\|=\infty.$$

【证明】 对于 X，我们定义折线函数如前. 由反证法，我们不妨假设

$$\limsup_{n\to\infty}\|L_n(g_m, X, x)-g_m(x)\|<\infty \quad (m=0, 1, 2, \cdots).$$

取 $\{n_j\}$ 使 $n_{j+1}\geqslant 2n_j$ 以及 $\omega(1/n_j^2\lambda_{n_j}(X))\geqslant 4\omega(1/n_{j+1}^2\lambda_{n_{j+1}}(X))$. 那末绝对收敛的级数

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\omega(1/n_j^2\lambda_{n_j}(X))g_{n_j}(x)$$

定义着一个连续函数. 由于 $\lambda_n(X)\omega(n^{-2}/\lambda_n(X))$ 的上限是 $+\infty$，所以不妨假设

$$\omega(n_{j+1}^{-2}\lambda_{n_{j+1}}^{-1}(X))\lambda_{n_{j+1}}(X)\geqslant 2\omega(n_j^{-2}\lambda_{n_j}^{-1}(X))\lambda_{n_j}(X),$$

$$\omega(n_k^{-2}\lambda_{n_k}^{-1}(X))\lambda_{n_k}(X)\geqslant 3\sum_{j=1}^{k-1}\omega(n_j^{-2}\lambda_{n_j}^{-1}(X))\,|L_{n_k}(g_{n_j}, X, x)|$$

$$(k\geqslant 2, -1\leqslant x\leqslant 1).$$

其次证明 $f(x)\in C(\omega)$. 设 n_j 是适合 $n_j^2\lambda_{n_j}(X)h\geqslant 1$ 的最小自然数 $(j>1)$，则当 $i<j$ 时，不等式

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\omega(n_i^{-2}\lambda_{n_i}^{-1}(X))\,|g_{n_i}(x+h)-g_{n_i}(x)|$$

的第 i 项小于或等于

$$2\omega(n_i^{-2}\lambda_{n_i}^{-1}(X))n_i^2\lambda_{n_i}(X)h$$
$$\leqslant 2\times 8^{i-j+1}\omega(n_{j-1}^{-2}\lambda_{n_{j-1}}^{-1}(X))n_{j-1}^2\lambda_{n_{j-1}}(X)h.$$

假如 $i\geqslant j$, 那末级数的第 i 项小于或等于

$$2\times 4^{j-i}\omega(n_j^{-2}\lambda_{n_j}^{-1})\leqslant 2\times 4^{j-i}\omega(h).$$

由是可知

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant 2\omega(h)\left(2\sum_{i=1}^{j-1}8^{i-j+1}+\sum_{i=j}^{\infty}4^{j-i}\right)$$
$$<8\omega(h),\quad f(x)\in C(\omega).$$

最后证明 $\|L_n(f,\ X,\ x)\|$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ 是一无界数列. 由于级数

$$L_{n_k}(f,\ X,\ z_{n_k})=\sum_{i=1}^{\infty}\omega(n_i^{-2}\lambda_{n_i}^{-1}(X))L_{n_k}(g_{n_i},\ X,\ z_{n_k})$$

的开始 $k-1$ 项之和 $\sum_1^{k-1}$ 大于或等于 $-\dfrac{1}{3}\lambda_{n_k}(X)\omega(n_k^{-2}\lambda_{n_k}^{-1}(X))$, 而第 k 项是

$$\omega(n_{n_k}^{-2}\lambda_{n_k}^{-1}(X))L_{n_k}(g_{n_k},\ X,\ z_{n_k})=\omega(n_{n_k}^{-2}\lambda_{n_k}^{-1}(X))\lambda_{n_k}(X);$$

当 $i>k$ 时,级数的第 i 项大于或等于

$$-\omega(n_i^{-2}\lambda_{n_i}^{-1}(X))\lambda_{n_k}(X)\geqslant -4^{k-i}\omega(n_k^{-2}\lambda_{n_k}^{-1}(X))\lambda_{n_k}(X);$$

所以级数之和

$$L_{n_k}(f,\ X,\ z_{n_k})\geqslant\lambda_{n_k}(X)\omega\ (n_k^{-2}\lambda_{n_k}^{-1}(X))\left\{1-\frac{1}{3}-\sum_{i=k+1}^{\infty}4^{k-i}\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\lambda_{n_k}(X)\omega(n_k^{-2}\lambda_{n_k}^{-1}(X)).$$

当 $n_k\to\infty$ 时,最后的数趋向于 $+\infty$. 证明完毕.

前面已经提及,陆静斯基还证明了下述定理:

定理 11 设 $\omega(t^2)/\omega(t)>c>0$ $(t\to 0)$, $\omega\left(\dfrac{1}{n}\right)\lambda_n(X)\neq o(1)$, 则 $C(\omega)$ 中有 $f(x)$ 使 $\|f(x)-L_n(f,\ X,\ x)\|\neq o(1)$.

【证明】 由定理 9, 我们只要从定理 11 所设的条件导出

$$\limsup_{n\to\infty}\omega(n^{-2}\lambda_n^{-1}(X))\lambda_n(X)>0.$$

首先假设 $n^{-2}\lambda_n(X)\leqslant 1$ $(n>N)$, 那末当 $n>N$ 时,

$$\omega(n^{-2}\lambda^{-1}(X))\lambda_n(X)\geqslant\omega(n^{-4})\lambda_n(X)$$
$$=(\omega(n^{-4})/\omega(n^{-2}))(\omega(n^{-2})/\omega(n^{-1}))\omega(n^{-1})\lambda_n(X)$$
$$\geqslant c^2\limsup\omega(n^{-1})\lambda_n(X)>0.$$

在有 n_i^2 适合 $\lambda_{n_i}(X)\geqslant n_i^2(n_i\uparrow\infty)$ 的情况，

$$\omega(n_i^{-2}\lambda_{n_i}^{-1}(X))\lambda_{n_i}(X)\geqslant\omega(\lambda_{n_i}^{-2}(X))\lambda_{n_i}(X)$$
$$\geqslant\omega(\lambda_{n_i}^{-1}(X)\lambda_{n_i}(X)\{\omega(\lambda_{n_i}^{-2}(X)/\omega(\lambda_{n_i}^{-1}(X))\}$$
$$\geqslant\frac{\omega(2)}{4}\frac{\omega(\lambda_{n_i}^{-2}(X))}{\omega(\lambda_{n_i}^{-1}(X))}\geqslant\frac{\omega(2)}{4}C>0.$$

由是可知定理成立。

在 $\omega(n^{-2}\lambda_n^{-1}(X))\lambda_n(X)=o(1)$ 的情况，基西与沙巴多西证得如下的

定理 12 当 $\omega(n^{-2}\lambda_n^{-1}(X))\lambda_n(X)=o(1)$ 时，存在 $Y=\{(y_0^{(n)}<y_1^{(n)}<\cdots<y_n^{(n)})\}$ $(y_0^{(n)}\geqslant-1,\ y_n^{(n)}\leqslant1)$，适合 $\lambda_n(Y)=\lambda_n(X)$ $(n\geqslant0)$ 并且对于任一 $f(x)\in C(\omega)$，成立着

$$\|f(x)-L_n(f,Y,x)\|=o(1)\quad(n\to\infty).$$

【证明】 要作成 Y，首先作三角形阵 $U(\tau)$，$\tau=\{t_n\}$，$1\leqslant t_n\leqslant3$：当 $1\leqslant i\leqslant n$ 时，

$$u_i^{(n)}=Z_i^{(n)}=\cos\frac{2i+1}{n+1}\frac{\pi}{2},$$

$$u_0^{(n)}=\cos\frac{\pi t_n}{2n+2},\quad Z_0^{(n)}=\cos\frac{\pi}{2n+2}.$$

对于满足 $\lambda_n(X)\leqslant\lambda_n(Z)$ 的 n，定义 $y_i^{(n)}=x_i^{(n)}(i=0,1,\cdots,n)$。对于 $\lambda_n(X)>\lambda_n(Z)$ 的 n，置 $y_i^{(n)}=u_i^{(n)}(i=0,1,\cdots,n)$。我们将证(证明见下文)：

(a) 取适当的 t_n 可使

$$\lambda_n(U(\tau))=\lambda_n(X).$$

因此，$\lambda_n(Y)=\lambda_n(X)(n=0,1,2,\cdots)$。我们又将证明

(b) $$\sum_{i=2}^{n}|l_i^{(n)}(U(\tau),x)|=O(\log n),$$

(c) $$l_0^{(n)}(U(\tau),x)+l_n^{(n)}(U(\tau),x)=O(1)$$

以及如下的事实：

(d) 不等式

$$\max_{-1<x<1}\{|l_0^{(n)}(U(\tau),x)|+|l_n^{(n)}(U(\tau),x))|\geqslant\frac{1}{2}\lambda_n(U(\tau))$$

含有 $u_0^{(n)}-z_1^{(n)}\leqslant 370n^{-2}\lambda_n^{-1}(U(\tau))$.

首先对于如下的 n, 记做 m_i: 或是 $\lambda_n(X)\leqslant\lambda_n(Z)$, 或是

$\lambda_n(X)>\lambda_n(Z)$,

$$\max\{|l_0^{(n)}(U(\tau),x)|+|l_n^{(n)}(U(\tau),x)|<\frac{1}{2}\lambda_n(U(\tau)).$$

我们证明 $\|f(x)-L_{m_i}(f,Y,x)\|=o(1)\ (m_i\to\infty)$.

由于 $\omega(n^{-2}x_n^{-1}(X))\lambda_n(X)=o(1)$, 所以 $\omega\left(\frac{1}{n}\right)\log n=o(1)$ (陆静斯基的定理). 又从 $\lambda_n(Z)=O(\log n)$ 得到 $\lambda_n(Y)=O(\log n)$, $\lambda_n(X)\leqslant\lambda_n(Z)$的话. 假如后者不成立, 从(c)又得前者. 总之,

$$\lambda_{m_i}(Y)=O(\log m_i),$$

$$\|L_{m_i}(f,Y,x)-f(x)\|=O\left(\lambda_{m_i}(Y)\omega\left(f,\frac{1}{m_i}\right)\right)=o(1).$$

记 $\{n\}-\{m_i\}=\{n_i\}$, $k_i=1+[\sqrt{n_i}]$. 设次数不高于 k_i 的多项式中, 最接近于 $f(x)\ (-1\leqslant x\leqslant 1)$ 的是 $p_i(x)$, 则当 $n_i>1$ 时,

$$\|f(x)-p_i(x)\|=O\left(\omega\left(f,\frac{1}{k_i}\right)\right)=O\left(\omega\left(\frac{1}{k_i}\right)\right).$$

从而

$$f(x)-L_{n_i}(f,Y,x)=O\left(\omega\left(\frac{1}{k_i}\right)\right)+L_{n_i}(p_i-f,Y,x).$$

末项等于

$$L_{n_i}(p_i-f,Y,x)=\left(\sum_{j=0}^{1}+\sum_{j=2}^{n_i}\right)(p_i(y_j^{(n)})-f(y_j^{(n)}))l_j^{(n_i)}(Y,x)$$

$$=\sum_{j=0}^{1}(p_i(y_j^{(n_i)})-f(y_j^{(n_i)}))l_j^{(n_i)}(Y,x)$$

$$+\sum_{j=2}^{n_i}O\left(\omega\left(\frac{1}{k_i}\right)\right)|l_j^{(n_i)}(Y,x)|.$$

最后的和等于

$$O\left(\omega\left(\frac{1}{k_i}\right)\right)O(\log k_i)=o(1).$$

因此,

$$L_{n_i}(p_i-f,\ Y,\ x)=o(1)+\sum_{j=0}^{1}(p_i(y_j^{(n_i)})-f(y_j^{(n_i)}))l_j^{(n_i)}(Y,\ x)$$

$$=o(1)+[p_i(y_0^{(n_i)})-f(y_0^{(n_i)})]\cdot[l_0^{(n_i)}(Y,\ x)+l_1^{(n_i)}(Y,\ x)]$$

$$+[p_i(y_1^{(n_i)})-p_i(y_0^{(n_i)})+f(y_0^{(n_i)})-f(y_1^{(n_i)})]l_1^{(n_i)}(Y,\ x)$$

$$=o(1)+O\left(\omega\left(\frac{1}{k_i}\right)\right)$$

$$+\left\{(y_1^{(n_i)}-y_0^{(n_i)})p_i'(\xi)+O\left(\omega\left(f,\ \frac{370}{n_i^2\lambda_{n_i}(Y)}\right)\right)\right\}|l_1^{(n_i)}(Y,\ x)|.$$

大括弧中两项之和等于

$$O\{k_i^2|y_0^{(n_i)}-y_1^{(n_i)}|\cdot\|p_i(x)\|+\omega(n_i^{-2}\lambda_{n_i}^{-1}(Y))\}$$

$$=O(n_i^{-1}\lambda_{n_i}^{-1}(Y))+O(\omega(n_i^{-2}\lambda_{n_i}^{-1}(Y))),$$

又因 $\|l_1^{(n_i)}(Y,\ x)\|\leqslant\lambda_{n_i}(Y)$，故得

$$L_{n_i}(p_i-f,\ Y,\ x)=o(1)+O\left(\omega\left(\frac{1}{k_i}\right)\right)+O(n_i^{-1})=o(1),$$

$$f(x)-L_{n_i}(f,\ Y,\ x)=o(1).$$

因此不论 n 是 m_i 或 n_i，我们见到 $f(x)-L_n(f,\ Y,\ x)=o(1)$.

定理 12 的证明，还缺少 (a), (b), (c), (d) 的确立. 首先证明 (a). 从插值点组 $U(\tau)$ 所作成的基本插值多项式是

$$l_0^{(n)}(U(\tau),\ x)=\frac{T_{n+1}(x)}{x-z_0^{(n)}}\cdot\frac{u_0^{(n)}-z_0^{(n)}}{T_{n+1}(u_0^{(n)})},$$

$$l_i^{(n)}(U(\tau),\ x)=l_i^{(n)}(Z,\ x)\frac{x-u_0^{(n)}}{x-z_0^{(n)}}\cdot\frac{z_i^{(n)}-z_0^{(n)}}{z_i^{(n)}-u_0^{(n)}}.$$

这些函数是与 t_n 有关的. 设 $t_n=1$，则 $u_0^{(n)}=z_0^{(n)}$，从而

$$\lambda_n(U(\tau))=\lambda_n(Z).$$

设 $t_n\to3$，则 $u_0^{(n)}\to z_1^{(n)}$，跟着 $|l_0^{(n)}(U(\tau),\ x)|$ 和 $|l_1^{(n)}(U(\tau),\ x)|$,

$$\lambda_n(U(\tau))\to+\infty.$$

由是我们总可以取适当的 t_n 使 $\lambda_n(U(\tau))=\lambda_n(X)$.

其次证明 (b). 这里分两种情况来讨论. 当 $-1\leqslant x\leqslant u_0^{(n)}$ 时,

$$0\leqslant\frac{u_0^{(n)}-x}{z_0^{(n)}-x}\leqslant1,$$

从而

$$|l_i^{(n)}(U(\tau),x)|=\left|l_i^{(n)}(Z,x)\frac{x-u_0^{(n)}}{x-z_0^{(n)}}\cdot\frac{z_i^{(n)}-z_0^{(n)}}{z_i^{(n)}-u_0^{(n)}}\right|\leqslant\left|l_i^{(n)}(Z,x)\frac{z_i^{(n)}-z_0^{(n)}}{z_i^{(n)}-u_0^{(n)}}\right|.$$

这是不大于 $|l_i^{(n)}(Z, x)|$ 的. 事实上,

$$(z_i^{(n)}-z_0^{(n)})/(z_i^{(n)}-u_0^{(n)})=1+(u_0^{(n)}-z_0^{(n)})/(z_i^{(n)}-u_0^{(n)}),$$

$$z_0^{(n)}-u_0^{(n)}=\cos\frac{\pi}{2n+2}-\cos\frac{\pi t_n}{2n+2}=2\sin\frac{(t_n+1)\pi}{4n+4}\sin\frac{(t_n-1)\pi}{4n+4}$$

$$<2\sin\frac{\pi}{n+1}\sin\frac{\pi}{2n+2},$$

$$u_0^{(n)}-z_i^{(n)}>z_1^{(n)}-z_2^{(n)}=\cos\frac{3\pi}{2n+2}-\cos\frac{5\pi}{2n+2}$$

$$=2\sin\frac{2\pi}{n+1}\sin\frac{\pi}{2n+2},$$

$$\frac{z_0^{(n)}-u_0^{(n)}}{u_0^{(n)}-z_i^{(n)}}<\frac{\sin\dfrac{\pi}{n+1}}{\sin\dfrac{2\pi}{n+1}}<1\quad(2\leqslant i\leqslant n).$$

假如 $u_0^{(n)}<x\leqslant 1$, 那末当 $i>1$ 时,

$$l_i^{(n)}(U(\tau), x)=(-1)^i\frac{T_{n+1}(x)}{x-z_i^{(n)}}\cdot\frac{\sqrt{1-z_i^{(n)2}}}{n+1}\cdot\frac{x-u_0^{(n)}}{x-z_0^{(n)}}\cdot\frac{z_i^{(n)}-z_0^{(n)}}{z_i^{(n)}-u_0^{(n)}},$$

$$\left\|\frac{T_{n+1}(x)}{x-z_0^{(n)}}\right\|\leqslant\|T'_{n+1}(x)\|\leqslant(n+1)^2,$$

$$x-z_i^{(n)}>z_1^{(n)}-z_i^{(n)}=\cos\frac{3\pi}{2n+2}-\cos\frac{(2i+1)\pi}{2n+2}$$

$$=2\sin\frac{(i+2)\pi}{2n+2}\sin\frac{(i-1)\pi}{2n+2},$$

$$\sqrt{1-z_i^{(n)2}}=\sin\frac{(2i+1)\pi}{2n+2}<\sin\frac{(i+2)\pi}{2n+2}+\sin\frac{(i-1)\pi}{2n+2}\quad(i\leqslant 1<n),$$

$$\sqrt{1-z_n^{(n)2}}<\sin\frac{(n+2)\pi}{2n+2},$$

$$\frac{\sqrt{1-z_i^{(n)2}}}{x-z_i^{(n)}}<\begin{cases}\dfrac{n+1}{2}\left(\dfrac{1}{i-1}+\dfrac{1}{i+2}\right) & (2\leqslant i<n)\\[2ex] \dfrac{n+1}{2}\,\dfrac{1}{i-1} & (2\leqslant i=n),\end{cases}$$

$$x-u_0^{(n)}<1-z_1^{(n)}=1-\cos\frac{3\pi}{2n+2}<\frac{9\pi^2}{8(n+1)^2}\quad(n\geqslant 1).$$

总结起来, 得到

$$\sum_{i=2}^{n}|l_i^{(n)}(U(\tau),\ x)|<\frac{9\pi^2}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)=O(\log n).$$

现在证明(c). 首先在 $1\leqslant t_n\leqslant 2$ 的情况来证(c). 此时

$$|T_{n+1}(u_0^{(n)})|=\sin\frac{(t_n-1)\pi}{2}\geqslant t_n-1\quad(n=0,\ 1,\ \cdots).$$

我们已证 $u_0^{(n)}-z_1^{(n)}=2\sin\frac{(3+t_n)\pi}{4n+4}\sin\frac{(3-t_n)\pi}{4n+4}$, 从而

$$u_0^{(n)}-z_1^{(n)}>2\sin\frac{\pi}{n+1}\sin\frac{\pi}{4n+4}.$$

联系到 $z_0^{(n)}-u_0^{(n)}\leqslant 2\sin\frac{3\pi}{4n+4}\sin\frac{\pi}{4n+4}(n>0)$, 我们得到

$$\frac{z_0^{(n)}-u_0^{(n)}}{z_0^{(n)}-z_1^{(n)}}<1.$$

另一方面, $\sqrt{1-z_1^{(n)2}}=\sin\frac{3\pi}{2n+2}<\frac{3\pi}{2n+2}$. 当 $u_0^{(n)}<x$ 时,

$$\frac{x-u_0^{(n)}}{x-z_1^{(n)}}<1.$$

因此得到 $|l_1^{(n)}(U(\tau),\ x)|<(n+1)^2\frac{3\pi}{n+1}\cdot\frac{1}{n+1}=3\pi$. 假如 $x\leqslant x_0^{(n)}$, 那末从 $\|T_{n+1}(x)/x-z_1^{(n)}\|\leqslant(n+1)^2$ 得到

$$|l_1^{(n)}(U(\tau),\ x)|<(n+1)^2\frac{3\pi}{2}\frac{1}{n+1}\frac{1}{n+1}2=3\pi.$$

由 $l_0^{(n)}(U(\tau),\ x)$ 和 $l_1^{(n)}(U(\tau),\ x)$ 的表达式, 得到它们的和的有界性.

现在考虑 $2<t_n<3$ 的情况, $l_0^{(n)}(U(\tau),\ x)+l_1^{(n)}(U(\tau),\ x)$ 可以写成

$$\frac{T_{n+1}(x)}{x-z_0^{(n)}}\left\{\frac{u_0^{(n)}-z_1^{(n)}}{T_{n+1}(u_0^{(n)})}+(z_1^{(n)}-z_0^{(n)})\right.$$
$$\left.\cdot\left[\frac{1}{T_{n+1}(u_0^{(n)})}-\frac{\sqrt{1-z_1^{(n)2}}}{(n+1)(z_1^{(n)}-u_0^{(n)})}-\frac{\sqrt{1-z_1^{(n)2}}}{(n+1)(x-z_1^{(n)})}\right]\right\},$$

其中

$$u_0^{(n)}-z_1^{(n)}\leqslant\frac{3\pi^2(3-t_n)}{4(n+1)^2},\ T_{n+1}(u_0^{(n)})\geqslant 3-t_n,\ z_0^{(n)}-z_1^{(n)}\leqslant\frac{\pi^2}{(n+1)^2}.$$

区间 $(z_1^{(n)},\ u_0^{(n)})$ 中有 ξ 适合于

$$\frac{1}{T_{n+1}(u_0^{(n)})}-\frac{\sqrt{1-z_1^{(n)2}}}{(n+1)(z_1^{(n)}-u_0^{(n)})}=\frac{(u_0^{(n)}-z_1^{(n)})\sqrt{1-z_1^{(n)2}}}{(2n+2)T_{n+1}(u_0^{(n)})}T''(\xi),$$

事实上，左端可以写成

$$\frac{T_{n+1}(u_0^{(n)})-(u_0^{(n)}-z_1^{(n)})T'_{n+1}(z_1^{(n)})}{T_{n+1}(u_0^{(n)})T'_{n+1}(z_1^{(n)})(z_1^{(n)}-u_0^{(n)})}.$$

右端小于——利用 $|T''_{n+1}(\xi)|\leqslant(n+1)^4/3$——

$$\frac{\dfrac{(n+1)^4}{3}\dfrac{3\pi^2}{4}\dfrac{1}{(n+1)^2}(3-t_n)\dfrac{3\pi}{2}\dfrac{1}{n+1}}{(n+1)(3-t_n)}=O(1).$$

当 $n>1$, $x\geqslant\cos\dfrac{\pi}{n+1}$ 时，

$$x-z_1^{(n)}\geqslant\cos\frac{\pi}{n+1}-\cos\frac{3\pi}{2n+2}\geqslant\frac{5}{2}\frac{1}{(n+1)^2}.$$

假如 $x<\cos\dfrac{\pi}{n+1}$，那末 $z_0^{(n)}-x>\cos\dfrac{\pi}{2n+2}-\cos\dfrac{\pi}{n+1}\geqslant\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{(n+1)^2}$.

由是可知

$$|l_0^{(n)}(U(\tau),n)+l_1^{(n)}(U(\tau),n)|\leqslant(n+1)^2$$

$$\cdot\left\{\frac{3\pi^2}{4}\frac{1}{(n+1)^2}(3-t_n)\frac{1}{3-t_n}+\frac{\pi^2}{(n+1)^2}\left[O(1)+\frac{\dfrac{3\pi}{2n+2}}{(n+1)\dfrac{3}{2}(n+1)^{-2}}\right]\right\},$$

这是 $O(1)$.

最后证明(d). 首先指出：$|l_0^{(n)}(U(\tau),x)|>\dfrac{1}{5}\lambda_n(U(\tau))$. 假如不然，那末结合到

$$|l_1^{(n)}(U(\tau),x)|\leqslant|l_0^{(n)}(U(\tau),x)+l_1^{(n)}(U(\tau),x)|+\frac{1}{5}\lambda_n(U(\tau))$$

$$\leqslant\frac{1}{5}\lambda_n(\tau)+O(1),$$

所设条件 $\max\{|l_0^{(n)}(U(\tau),x)|+|l_1^{(n)}(U(\tau),x)|\}\geqslant\dfrac{1}{2}\lambda_n(U(\tau))$ 不能成立. 另一方面，

$$|l_0^{(n)}(U(\tau),x)|$$

$$=\left|\frac{T_{n+1}(x)}{x-z_0^{(n)}}\cdot\frac{u_0^{(n)}-z_0^{(n)}}{T_{n+1}(u_0^{(n)})}\right|<(n+1)^2\frac{\pi^2}{(n+1)^2}\frac{1}{3-t_n}=\frac{\pi^2}{3-t_n}.$$

从而得到 $3-t_n<5\pi^2/\lambda_n(U(\tau))$. 因此，得到(d)的结论：

$$u_0^{(n)}-z_1^{(n)}\leqslant\frac{3\pi^2}{4}\frac{3-t_n}{(n+1)^2}<\frac{15\pi^4}{4}\frac{1}{n^2\lambda(U_n(\tau))}<\frac{370}{n^2\lambda_n(U(\tau))}.$$

定理 12 证明完毕.

第 八 章

一般的三角级数

1. 黎曼的理论及有关事项

在第二章的§5，我们定义：当

$$\lim_{h\to 0}\sum u_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^k=S$$

时，称级数 $\sum u_n$ 可用 $(R,\ k)$ 求和法求和，所得的和是 S. 我们也证明：当 $k>1$ 时，求和法 $(R,\ k)$ 具有正则性. 黎曼原来的求和法是 $(R,\ z)$，在 $(R,\ z)$ 的基础上，黎曼建立了三角级数的一般理论.

当 $\alpha_n=o(1)$，$\beta_n=o(1)$ 时，写着 $A_n=A_n(x)=\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx$，从连续函数 $F(x)=C+C'x+\dfrac{1}{2}A_0x^2-\sum\limits_1^\infty A_n(x)/n^2$ 得到

$$\frac{F(x+2h)+F(x-2h)-2F(x)}{4h^2}=\sum_{n=0}^\infty A_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2.$$

当 $h\to 0$ 时，左端的上限与下限分别记做 $\overline{\mathscr{D}}^2F(x)$ 与 $\underline{\mathscr{D}}^2F(x)$. 假如极限存在，那末写着

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+2h)+F(x-2h)-2F(x)}{4h^2}=\mathscr{D}^2F(x),$$

称它做 $F(x)$ 在 x 的**一般二次导数**. 由是 $\sum A_n(x)=S(x)\,(R,\ z)$ 与

$\mathscr{D}^2F(x)=S(x)$ 是等价的.

首先提出如下的问题：周期函数 $f(x)\equiv f(x+2\pi)$ 在怎样情况下，可用系数为 $o(1)$ 的三角级数的黎曼和(即 (R, z) 能给的和)来表达?

定理 1 具有周期 2π 的函数 $f(x)$，可用系数为 $o(1)$ 的三角级数来表达的充要条件是存在函数 $F(x)$ 适合 $\mathscr{D}^2F(x)=f(x)$，并且对于任一区间 (b, c) 上的任一函数 $\psi(x)$，当它满足

$$\psi(b)=\psi(c)=\psi'(b)=\psi'(c)=0,$$

$$\psi(x)=\int_b^x\psi'(t)dt\quad(b\leqslant x\leqslant c)$$

时，成立着

$$\lim_{\mu\to\infty}\mu^2\int_b^c F(x)\psi(x)\cos\mu(x-a)dx=0.$$

【证明】 条件的必要性．设 $\sum A_n(x)=f(x)(R, z)$，$A_n(x)=o(1)$，则对于正数 ε，$|A_n(x)|<\varepsilon\,(n\geqslant n_0)$．从 $\sum A_n(x)$ 作 $F(x)$．当 $h\to 0$ 时，

$$\sum_{n=0}^{n_0}A_n(x)\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2=o\left(\frac{1}{h}\right).$$

设 $mh<\pi\leqslant(m+1)\pi$，则

$$\left|\sum_{n_0+1}^{m}A_n(x)\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2\right|<\frac{2\pi}{h},\quad\left|\sum_{m+1}^{\infty}A_n(x)\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2\right|<\frac{\varepsilon}{mh^2}.$$

因此，$\left|\dfrac{F(x+2h)+F(x-2h)-2F(x)}{2h}\right|<\varepsilon\left(\dfrac{2}{hm}+2\pi\right)+o(1)$．由是，

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+2h)+F(x-2h)-2F(x)}{2h}=0,$$

$$D^+F(x)=D^-F(x),\quad D_+F(x)=D_-F(x).$$

要证 $\mu^2\int_b^c\cdots dx=o(1)$，不妨假设 $C=C'=A_0=0$；从而

$$F(x)=-\sum n^{-2}A_n(x).$$

写着 $\rho_n^2=\alpha_n^2+\beta_n^2$，$\rho_n\geqslant 0$，则有 $\{\gamma_n\}$ 适合于

$$-F(x)=\sum_1^{\infty}\rho_n\cos(nx-\gamma_n)\cdot n^{-2}.$$

从而有 $\{\gamma_n'\}$ 与 $\{\gamma_n''\}$ 适合于

$$I_\mu(\psi,\ a)=\int_b^c F(x)\psi(x)\cos\mu(x-a)\,dx=\Sigma_1+\Sigma_2,$$

$$\Sigma_1=\frac{1}{2}\sum_1^\infty\frac{\rho_n}{n^2}\int_b^c\psi(x)\cos((\mu+n)x-\gamma_n')\,dx,$$

$$\Sigma_2=\frac{1}{2}\sum_1^\infty\frac{\rho_n}{n^2}\int_b^c\psi(x)\cos((\mu-n)x-\gamma_n'')\,dx.$$

利用 $\psi(b)=\psi'(b)=0$ 等条件，我们见到

$$\int_b^c\psi(x)\cos(kx-\gamma)\,dx=-\frac{1}{k^2}\int_b^c\psi''(x)\cos(kx-\gamma)\,dx.$$

因此，$|I_\mu(\psi,\ a)|$ 小于或等于

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{\rho_n}{2n^2}\frac{\eta(n+\mu)}{(n+\mu)^2}+\sum_{n=1(n\neq[\mu])}^\infty\frac{\rho_n}{2n^2}\frac{\eta(|n-\mu|)}{(n-\mu)^2},$$

这里的 $\{\eta(n)\}$ 是 $o(1)$，对于 γ 均匀地 $\eta(n)=o(1)$ 而适合于

$$\left|\int_b^c\psi''(x)\cos(nx-\gamma)\,dx\right|<\eta(n),\ \ \eta(n)\downarrow 0.$$

由是，$\sum\rho_n\eta(n+\mu)/2n^2(n+\mu)^2\leqslant\eta(\mu)\sum n^{-2}\rho_n/\mu^2$,

$$\sum_{n=1}^{[\mu/2]}\frac{\rho_n}{n^2}\frac{\eta(\mu-n)}{(n-\mu)^2}\leqslant\eta\left(\frac{\mu}{2}\right)\left(\frac{\mu}{2}\right)^{-2}\sum\frac{\rho_n}{n^2}=O\left(\frac{1}{\mu^2}\right),$$

$$\sum_{[\mu/2]+1}^{[\mu]-1}\frac{\rho_n\eta(|n-\mu|)}{n^2(n-\mu)^2}\leqslant\eta(1)O\left(\frac{\rho_\mu}{\mu^2}\right)\sum\frac{1}{\nu^2}=O\left(\frac{1}{\mu^2}\right),$$

$$\sum_{[\mu]+1}^\infty\frac{\rho_n}{n^2}\frac{\eta(n-\mu)}{(n-\mu)^2}=O\left(\frac{\rho_\mu}{\mu^2}\sum\frac{1}{\nu^2}\right)=O\left(\frac{1}{\mu^2}\right).$$

总结起来，$I_\mu(\psi,\ a)=O(\mu^{-2})$. 必要性证毕.

条件的充分性. 首先证明许瓦兹 (Schwarz) 引理: 假如 $h(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上满足 $\mathscr{D}^2h(x)=0$, 那末 $h(x)\,(a\leqslant x\leqslant b)$ 是一个一次函数. 事实上，当 $\varepsilon>0$ 时，函数

$$g(x)=\left\{h(x)-h(a)-\frac{x-a}{b-a}(h(b)-h(a))\right\}+\varepsilon(x-a)(x-b)$$

满足 $\mathscr{D}^2g(x)=2\varepsilon>0\ (a\leqslant x\leqslant b)$. 假如有 x 使 $g(x)>0$, 那末 $(a,\ b)$ 有 x_1 使当 h 充分小时，

$$g(x_1+h)-g(x_1)\leqslant 0,\ \ g(x_1-h)-g(x_1)\leqslant 0.$$

这是与 $\mathscr{D}^2g(x_1)>0$ 不相容的. 因此，$g(x)\leqslant 0\,(a\leqslant x\leqslant b)$, 但是

$\varepsilon(x-a)(x-b)$ 在 (a, b) 上取负值，ε 可以很小，故必

$$h(x)-h(a)-\frac{x-a}{b-a}(h(b)-h(a))=0 \quad (a\leqslant x\leqslant b).$$

引理由是成立.

将条件 $\mathscr{D}^2F(x)=f(x)$ 与引理相结合，从 $\mathscr{D}^2\{F(x+2\pi)-F(x)\}=0$ 得到 $F(x+2\pi)-F(x)=\alpha x+\beta$. 置 $\alpha=2\pi A_0$, $C'=\frac{\beta}{2\pi}-\frac{\alpha}{2}$，则得

$$F(x+2\pi)-C'(x+2\pi)-\frac{1}{2}A_0(x+2\pi)^2=F(x)-C'x-\frac{1}{2}A_0x^2.$$

因此 $G(x)=F(x)-C'x-\frac{1}{2}A_0x^2$ 是一周期函数，

$$\lim_{\mu\to\infty}\mu^2\int_b^c G(x)\psi(x)\cos\mu(x-a)dx=0.$$

这里取 b, c 以及 $\psi(x)$ 如下：$b<-\pi$, $c>\pi$, $\psi(x)=1(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$,

$$\mu^2\int_b^{-\pi}+\int_\pi^c G(x)\psi(x)\cos\mu(x-a)dx=o(1)\ (\mu\to\infty);$$

$\mu=n^2$. 因此，

$$n^2\int_{-\pi}^{\pi}G(x)\cos n(x-a)dx=o(1),$$

置 $C=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}G(x)dx$，则得

$$G(a)=C-\frac{A_1(a)}{1^2}-\frac{A_2(a)}{2^2}-\cdots.$$

从而 $F(x)=C+C'x+\frac{A_0}{2}x^2-\sum_1^\infty\frac{A_n(x)}{n^2}$, $\mathscr{D}^2F(x)=f(x)$, $f(x)$ 是 $\sum A_n(x)$ 的 (R, z) 平均值. 定理证毕.

定理 2 系数 α_n, β_n 为 $o(1)$ 的三角级数

$$\sum A_n(x)\quad (A_n(x)=\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx,\ n>0),$$

在 x_0 具有收敛性的充要条件是只关于黎曼函数

$$F(x)=C+C'x+\frac{A_0}{2}x^2-\sum_1^\infty\frac{A_n(x)}{n^2}$$

在 x_0 附近的性质. 事实上，$\sum A_n(x_0)$ 收敛的充要条件是极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon}F(t+x_0)\rho(t)\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\right)dt$$

的存在，这里 $0<2\varepsilon<\pi$；$\rho(t)$是任意的，它在$(-2\varepsilon,\ 2\varepsilon)$上具有$\rho'''(t)$，

$$\rho(-2\varepsilon)=\rho(2\varepsilon)=0,\quad \rho(t)=1\quad(-\varepsilon\leqslant t\leqslant\varepsilon).$$

【证明】 假设 $\rho(t+2\pi)\equiv\rho(t)$，并设当 $t\in(-2\varepsilon,\ 2\varepsilon)$ 时，$\rho(t)(|t|\leqslant\pi)$ 等于 0. 那末 $\rho(\pm2\varepsilon)=\rho'(\pm2\varepsilon)=\rho''(\pm2\varepsilon)=0$，$\rho(\pm\varepsilon)=1$，$\rho'(\pm\varepsilon)=\rho''(\pm\varepsilon)=0$. 函数

$$\Phi(t)=F(t)-C't-\frac{1}{2}A_0t^2$$

适合$\left(\mu=n+\dfrac{1}{2}\text{ 的话}\right)$

$$\begin{aligned}\sum_1^n A_\nu(x)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(x+t)\sum_1^n(-\nu\cos\nu t)\,dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(x+t)\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sin\mu t}{\sin t/2}\right)dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon}\Phi(x+t)\rho(t)\frac{d^2}{dt^2}\left(\sin\mu t\Big/\sin\frac{t}{2}\right)dt,\end{aligned}$$

利用条件 $\rho(0)=1,\rho'(0)=\rho''(0)=\rho'''(0)=0$，上面的积分等于

$$\int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon}\left(\sin\mu t\Big/\sin\frac{t}{2}\right)A_0\rho(t)\,dt+o(1)=2\pi A_0.$$

从而得到

$$A_0+\sum_1^n A_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon}F(x+t)\rho(t)\frac{d^2}{dt^2}\left(\sin\mu t\Big/\sin\frac{t}{2}\right)dt+o(1).$$

证明完毕.

设 $E\subset[0,\ 2\pi]$，$A_n(x)=\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx$. 怎样的 E，能从

$$\frac{1}{2}\alpha_0+\sum_1^\infty A_n(x)=0\quad(x\in E)$$

断言 $\alpha_n=0(n=0,\ 1,\ \cdots)$，$\beta_n=0(n=1,\ 2,\ \cdots)$？这是康托(G. Cantor)的问题. 又若 $\sum A_n(x)$ 在 E 上收敛于 $f(x)$，$f(x)$ 在 E 上依某种意义可以积分，在怎样的情况，能断言 $\sum A_n(x)$ 是 $f(x)$ 的依这种积分意义

的富里埃级数？此时 $|E|=2\pi$ 是一必要条件，问题是在

$$\begin{matrix}\alpha_n\\ \beta_n\end{matrix}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}nx\,dx\quad(n=0,\ 1,\ \cdots)$$

何时——在怎样的 E——成立？这是杜·波阿·雷蒙(Du Bois Reymond)的问题.

康托证明：当 E 的余集 $CE=[0,\ 2\pi]-E$ 的某次——说是 r 次——导集 $(CE)^{(r)}$ 是空集时，一切系数 α_n 和 β_n 都等于零. 这个定理是下述定理的特殊情况.

定理 3 假如 $E+C(E)=[0,\ 2\pi]$，$E\cdot CE=0$；CE 不含有完全点集，那末当 $\sum(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)$ 在 E 上收敛于零时，$\alpha_n=\beta_n=0$ $(n=0,\ 1,\ \cdots)$.

这是特·拉·伐赖-普山(1912年)的定理.

【证明】 由于 CE 不含有任何完全点集，所以 $|E|=2\pi$. 又因级数在 E 上收敛，故必 $\alpha_n=o(1)$，$\beta_n=o(1)$. 在 E 上，$\mathscr{D}^2F(x)=0$，但

$$F(x)=C+C'x+\frac{1}{2}\alpha_0x^2-\sum_1^\infty(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)/n^2.$$

置 $2q\pi=F(2\pi)-F(0)$，设连续函数 $g(x)=F(x)-F(0)-2\pi x$ 不是一次的，它在 $(0,\ 2\pi)$ 中的 x_0 取最大值，则当 $|h|\leqslant h_0$ 时，$D^+g(x_0)\leqslant 0$，$D^-g(x_0)\geqslant 0$，

$$\overline{\mathscr{D}}^2F(x_0)\leqslant 0.$$

写着 $\Delta^2(g(x_0),\ h)=g(x_0+h)+g(x_0-h)-2g(x_0)$，我们见到

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta^2(g(x_0),\ h)}{h}=0.$$

从而 $D^\pm g(x_0)=0$，$D^\pm F(x_0)=q$.

设 $q_0>q$，q_0-q 很小的话，当 $k\in[q,\ q_0]$ 时，有 x 使

$$g_k(x)=F(x)-F(0)-kx>0.$$

设在 $(0,\ 2\pi)$ 中，适合 $g_k(x)=0$ 的最大的 x 为 x'，则

$$kx'=F(x')-F(0).$$

在 $(0,\ x')$ 上，应用上面的议论，得 $g_k(x)$ 取最大值的上限 x''，

$$\mathscr{D}^2F(x'')\leqslant 0,\ \ D^{\pm}F(x'')=k.$$

设 $k<k_1\in[q,\ q_0)$，则 x'' 与 k_1 相当的 x_1'' 不相等．从

$$g_{k_1}(x'')=g_k(x'')-(k_1-k)x'',\ \ g_{k_1}(x_1'')=g_k(x_1'')-(k_1-k)x_1''$$

知 $x''>x_1''$．由是可知 $[q,\ q_0]$ 中的 k 所对应的 x'' 所成之闭集 E_1，是不可列的．当 $x\in E_1$ 时，$\overline{\mathscr{D}}^2F(x)\leqslant 0$．适合 $\overline{\mathscr{D}}^2F(x)\leqslant 0$ 的 x 所成之点集必含有完全集．取 $\varepsilon>0$ 适当小，函数 $G(x)=F(x)+\varepsilon x^2$ 满足 $F(x)$ 的性质，从而 $\overline{\mathscr{D}}^2G(x)\leqslant 0$ 的 x 的集含有完全点集．因此，适合

$$\overline{\mathscr{D}}^2F(x)\leqslant-\varepsilon<0$$

的一切 x 所成之集含有完全点集．

函数 $g(x)$，$g_k(x)$ 等在开区间 $(0,\ 2\pi)$ 中有上述的 x'，x'' 的原因，是 $g(x)$，$g_k(x)$ 不是一次函数，此时 CE 中含有完全点集．由是可知 $F(x)$ 是一次函数．从而在 E 上，

$$A_0+\sum_1^{\infty}n^{-2}A_n(x)=0,\ \ |E|=2\pi,$$

左端是一富理埃级数，必然地一切系数都是 0．定理证毕．

定理 4 设三角级数 $\sum A_n(x)$ 的系数是 $o(1)$，部分和绝对值的上限函数 $\Phi(x)=\limsup\left|\sum_0^n A_\nu(x)\right|$ 在 $[-\pi,\ \pi]$ 上可以积分，使 $\Phi(x)=\infty$ 的一切 x 所成之集不含有完全点集．那末有 $f(x)\in L(-\pi,\ \pi)$，以 $\sum A_n(x)$ 为富理埃级数，$f(x)$ 与 $\sum A_n(x)$ 的黎曼函数 $F(x)$ 之间存在着关系

$$\underline{\mathscr{D}}^2F(x)\leqslant f(x)\leqslant\overline{\mathscr{D}}^2F(x).$$

【证明】 我们只要证明：有 $f(x)$ 与常数 p，q 适合于

$$F(x)-\int_{-\pi}^{x}dt\int_{-\pi}^{t}f(u)du=px+q.$$

事实上，从这个等式得到

$$2A_0\pi=F'(\pi)-F'(-\pi)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,$$

$$\begin{aligned}\alpha_n\pi&=n^2\int_{-\pi}^{\pi}\left\{C+C'x+\frac{1}{2}A_0x^2-F(x)\right\}\cos nx\,dx\\&=n\int_{-\pi}^{\pi}\{F'(x)-A_0x+C'\}\sin nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\end{aligned}$$

$$\beta_n\pi=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,$$

从而 $f(x)\sim\sum A_n(x)$.

现在从 $\Phi(x)\in L(-\pi,\pi)$ 导出 $f(x)\in L(-\pi,\pi)$，这里

$$\underline{\mathscr{D}}^2F(x)\leqslant f(x)\leqslant\overline{\mathscr{D}}^2F(x).$$

当 $n\to\infty$ 时，记 $A_0(x)+\cdots+A_n(x)$ 的上限与下限为 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$。设 $f_1(x)<+\infty$, $f_2(x)>-\infty$，则

$$\sum_{\nu=0}^{n}A_\nu(x)=\frac{1}{2}(f_1(x)+f_2(x))+\frac{1}{2}(f_1(x)-f_2(x))\theta_n+\varepsilon_n,$$

这里 $|\theta_n|\leqslant1$, $|\varepsilon_n|<\delta\quad(n\geqslant n_0=n_0(\delta))$，对于黎曼级数施行和差变换：

$$F_h(x)=\sum_0^\infty A_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2=\sum_{n=0}^\infty\left\{\frac{1}{2}(f_1(x)-f_2(x))\theta_n+\varepsilon_n\right\}$$

$$\times\Delta\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2+\frac{1}{2}(f_1(x)+f_2(x)).$$

当 $h\to0$ 时，变换所得的最初有限项的和 $\sum\limits_0^{n_0}$ 趋近于 0. 因此，

$$F_h(x)-\frac{1}{2}(f_1(x)+f_2(x))$$

$$=o(1)+\sum_{n=n_0+1}^\infty\left[-\left\{\frac{1}{2}(f_1(x)-f_2(x))\theta_n+\varepsilon_n\right\}\int_{nh}^{(n+1)h}\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2dt\right].$$

最后的级数的绝对值小于

$$\left\{\frac{1}{2}(f_1(x)-f_2(x))+\delta\right\}\int_0^\infty\left|\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\right|dt.$$

记 $\lambda=\int\left|\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\right|dt$，我们见到

$$\limsup_{h\to0}F_h(x)\leqslant\frac{1}{2}\{f_1(x)+f_2(x)\}+\lambda\left\{\frac{1}{2}(f_1(x)-f_2(x))+\delta\right\},$$

$$\liminf_{h\to0}F_h(x)\geqslant\frac{1}{2}\{f_1(x)+f_2(x)\}-\lambda\left\{\frac{1}{2}(f_1(x)-f_2(x))+\delta\right\}.$$

令 $\delta\to0$，我们得到

$$\frac{f_1(x)+f_2(x)}{2}-\lambda\frac{f_1(x)-f_2(x)}{2}\leqslant\underline{\mathscr{D}}^2F(x),$$

$$\overline{\mathscr{D}}^2F(x)\leqslant\frac{f_1(x)+f_2(x)}{2}+\lambda\frac{f_1(x)-f_2(x)}{2}.$$

由于$f_1(x)$和$f_2(x)$都属于$L(-\pi,\pi)$，所以在$\underline{\mathscr{D}}^2F(x)$与$\overline{\mathscr{D}}^2F(x)$之间的$f(x)$也属于$L(-\pi,\pi)$.

现在要证：当$\underline{\mathscr{D}}^2F(x)\leqslant f(x)\leqslant\overline{\mathscr{D}}^2F(x)$，$\Phi(x)\neq\infty$时，函数

$$F(x)-\int_{-\pi}^{x}dt\int_{-\pi}^{t}f(u)du$$

是一次的．证明的基础是在伐赖-普山的引理：对于$f(x)\in L(a,b)$以及$\varepsilon>0$，存在连续函数$g_1(x)$和$g_2(x)$适合于

$$0<g_1(x)-\int_a^x f(t)dt<\varepsilon,\quad \int_a^x f(t)dt-g_2(x)<\varepsilon,$$

$$\min(D_-g_1(x),\ D_+g_1(x))>f(x),$$

$$\max(D^-g_2(x),\ D^+g_2(x))<f(x),$$

这里$a<x\leqslant b$．从这个引理，我们见到：函数

$$\psi_i(x)\equiv F(x)-\int_{-\pi}^{x}g_i(t)dt,$$

$$\psi(x)\equiv F(x)-\int_{-\pi}^{x}dt\int_{-\pi}^{t}f(u)du$$

之间，存在着如下的关系：

$$\psi_2<\psi<\psi_1,\quad \psi_1-\psi_2<2(b-a)\varepsilon\quad(b=\pi,\ a=-\pi),$$

$$\overline{\mathscr{D}}^2\psi_1(x)>\overline{\mathscr{D}}^2F(x)-f(x)>0,$$

$$\underline{\mathscr{D}}^2\psi_2(x)<\underline{\mathscr{D}}^2F(x)-f(x)<0.$$

由是可知：

$$\psi_1(x)\leqslant F(-\pi)+\frac{x+\pi}{2\pi}\{\psi_1(\pi)-\psi_1(-\pi)\},$$

$$\psi_2(x)\geqslant F(-\pi)+\frac{x+\pi}{2\pi}(\psi_2(\pi)-\psi_2(-\pi)),$$

因此，$\psi(x)$介在两个一次函数之间．由于这两个一次函数的距离可以任意地小，所以$\psi(x)$是一个一次函数.

最后证明上述引理．首先在$f(x)\geqslant0$的情况，来作成引理中的$g_1(x)$．设$\varepsilon>0$，$\eta(b-a)+\eta=\varepsilon$，不等式$n\eta\leqslant f(x)<(n+1)\eta$成立的

一切 x 成一点集 E_n. 我们见到

$$\sum n\eta|E_n|\leqslant\int_a^b f(x)dx<\sum_0^\infty(n+1)\eta|E_n|<\int_a^b f(x)dx+\varepsilon-\eta,$$

设 $\eta_n>0$, $\sum(n+1)\eta_n<1$. 取区间的集 $\{\delta_r^{(n)}\}$ 覆盖 E_n 而使其全长 $\sum|\delta_r^{(n)}|<|E_n|+\eta_n$. 设 $\{\delta_r^{(n)}\}$ 与 (a, x) 的交集为 $S^{(n)}(x)$, 置

$$\sum_{n=0}^\infty(n+1)\eta S^{(n)}(x)=g_1(x),$$

则 $g_1(b)$ 大于 $\int_a^b f(x)dx$ 而小于 $\int_a^b f(x)dx+\varepsilon$, $g_1(x)$ 大于 $\int_a^x f(t)dt$ 而小于 $\int_a^x f(t)dt+\varepsilon$, 当 $x\in E_n$ 时, x 落入一个 $\delta_r^{(n)}$, 取 $|h|$ 足够小,

$$\frac{g_1(x+h)-g_1(x)}{h}\geqslant(n+1)\eta\frac{S^{(n)}(x+h)-S^{(n)}(x)}{h}\geqslant\eta(n+1),$$

因此, $g_1(x)$ 是所要的函数(第一个函数).

其次, 对于一般的 $f(x)$ 作 $g_1(x)$ 如下. 设 $N>0$, $0<\varepsilon_1<\varepsilon$,

$$f_N(x)=\max(f(x), -N),$$

则有 $G_1(x)$ 适合于 $D_\pm G_1(x)>f_N(x)+N$ 以及

$$\int_a^x[f_N(t)+N]dt<G_1(x)<\varepsilon-\varepsilon_1+\int_a^x[f_N(t)+N]dt.$$

取 N 充分大, 可使 $\int_a^x f_N(t)dt-\int_a^x f(t)dt<\varepsilon$. 置 $g_1(x)=G_1(x)-N(x-a)$, 则

$$\int_a^x f(t)dt<\int_a^x f_N(t)dt<g_1(x)$$

$$<\varepsilon-\varepsilon_1+\int_a^x f_N(t)dt<\varepsilon+\int_a^x f(t)dt,$$

$$D_\pm g_1(x)>f(x).$$

我们见到 $-f(x)$ 的 $g_1(x)$ 就是 $f(x)$ 的 $g_2(x)$. 引理证毕, 定理 4 也证毕.

系数是 $o(1)$ 的三角级数, 除开前述的"黎曼级数"而外, 比较重要的, 还有杨格(W. H. Young, 1917)的三角级数

$$\sum_1^\infty(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\quad a_n=o(1),\ b_n=o(1);$$

这种级数的逐项积分级数 $\sum n^{-1}(a_n \sin nx - b_n \cos nx)$ 在某一区间 $(\alpha, \beta) \subset (-\pi, \pi)$ 上收敛于积分函数 $F(x)$ $(\alpha < x < \beta)$，从而 $F'(x)$ 在 (α, β) 中几乎处处存在. 由于 $\sum \frac{1}{n^2}(a_n^2 + b_n^2) < \infty$，所以

$$\sum n^{-1}(a_n \sin nx - b_n \cos nx)$$

是一勒贝格-富理埃级数. 上面可以拓广到 $(-\pi, \pi)$，并且

$$F(x) \sim \sum n^{-1}(a_n \sin nx - b_n \cos nx).$$

定理 5 设 $a_n = o(1)$, $b_n = o(1)$, $\sum n^{-1}(a_n \sin nx - b_n \cos nx) = F(x)$ 在 $(\alpha, \beta) \subset (-\pi, \pi)$ 上成立，$F'(x)$ $(\alpha < x < \beta)$ 几乎处处存在且属于 $L(\alpha, \beta)$，那末杨格的三角级数 $\sum A_n(x)$，$A_n = a_n \cos nx + b_n \sin nx$，在 (α, β) 中任一定点的收敛性，只关联于 $F(x)$ 在此点附近的性质.

【证明】 设 $0 < \varepsilon < \pi$，所要证的是：对于 (α, β) 中的一定点 x，ε 足够小的话，

$$S_n = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dx} \int_0^{\varepsilon} [F(x+t) + F(x-t)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{1}{2} t} dt + o(1),$$

$$S_n = A_1(n) + \cdots + A_n(n).$$

作如下的 $\chi(t) = \chi(-t)$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$，$\chi(t)$ 具有连续性和周期性，当 $\varepsilon < t < \pi$ 时，$\chi(t) = \cot \frac{t}{2}$. 并且 $\chi'(t)$ 和 $\chi''(t)$ 都存在，$\chi''(t)$ 是有界. 在这些情况下，$\chi(t)$ 的富理埃级数 $\sum C_n \sin nt$ 绝对收敛.

从 $\chi(t)$ 的性质，$\mathfrak{S}[\chi]$，$\mathfrak{S}[\chi']$ 都是匀敛的级数，因此，积分

$$J_n = \frac{d}{dx} \int_{\varepsilon}^{\pi} [F(x+t) + F(x-t)] \chi(t) \sin nt \, dt$$

中的 $\chi(t) = \sum c_\nu \sin \nu t$，积分、微分与 $\sum$ 的顺序，可以作如下的改变：

$$J_n = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \frac{d}{dx} \int_{\varepsilon}^{\pi} [F(x+t) + F(x-t)] \sin \nu t \sin nt \, dt$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu (k_{\nu-n} - k_{\nu+n}).$$

这里

$$k_n=k_{-n}=\frac{d}{dx}\int_{\varepsilon}^{\pi}[F(x+t)+F(x-t)]\cos nt\,dt=\frac{d}{dx}\int_0^{\pi}-\frac{d}{dx}\int_0^{\varepsilon}$$

$$=\pi A_n(x)+\int_0^{\varepsilon}(-f(x+t)-f(x-t))\cos nt\,dt=o(1);$$

对于 $\eta>0$, 有 m, 当 $n\geqslant m$ 时, $|k_n|<\eta$. 设 $c=\sum|c_\nu|$, 则当 $n\geqslant m$ 时,

$$\left|\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu k_{\nu+n}\right|<\eta C.$$

设 $K=\max\limits_{\nu<m}(|k_\nu|)$, 则当 $n\to\infty$ 时,

$$\left|\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu k_{\nu-n}\right|\leqslant\left|\sum_{\nu=1}^{n-m}c_\nu k_{\nu-n}\right|+\left|\sum_{\nu=n-m+1}^{n+m-1}c_\nu k_{\nu-n}\right|+\left|\sum_{\nu=n+m}^{\infty}c_\nu k_{\nu-n}\right|$$

$$\leqslant\eta C+K(|c_{n-m+1}|+\cdots+|c_{n-m-1}|)+\eta C$$

的极限是 0, 从而 $J_n=o(1)$, 由是可知定理成立.

2. 三角级数的 M 集和 U 集

设 $E\subset[-\pi,\pi]$, 假如存在系数不全为 0(即 $a_0^2+\sum\limits_1^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\neq0$) 的三角级数在 $CE=[-\pi,\pi]-E$ 上收敛于 0, 那末我们称 E 是一个 M 集. 当三角级数在 CE 上收敛于 0 时, 它的系数必须全部是 0 的话, 称 E 是一个 U 集. 不成 M 集的点集是一个 U 集. 由前节定理 3, 当 E 不含有完全点集时, 它是一个 U 集. 但是 U 集是否可以含有完全点集呢, 下面将作回答.

概敛于 0 的三角级数 S, 可能具有点集 $E\subset[-\pi,\pi]$, 在 E 上 S 不等于 0, 我们称 E 为 S 的核; E 中可能有子集 N, 在 N 上, S 的部分和的上限等于 $+\infty$, 我们称 N 为 S 的核心. 由定理 3 当概敛于 0 的三角级数的核 E 不含有完全点集时, E 是空集; 它是无核的. 简记 S 的核和核心为 $E(S)$ 与 $N(S)$, 它们落在区间 δ 中的部分记做 $\delta E(S)$ 以及 $\delta N(S)$, 这里 $\delta\subseteq[-\pi,\pi]$.

定理 1 设 S 是一概敛于 0 的三角级数, 其核和核心是 $E(S)$ 与 $N(S)$. 假如 $\delta E(S)\neq0$, 那末 $\delta N(S)$ 也不是空的, 并且存在三角级数以 $\delta E(S)$ 与 $\delta N(S)$ 分别做它的核与核心($\delta\subseteq(-\pi,\pi)$).

这是 Н. К. 巴利(Бари, 1923 年)的定理.

【证明】 利用所设条件, 作 $C'''(-\pi, \pi)$ 中的周期函数 $\lambda(x)\equiv\lambda(x+2\pi)$. $\lambda(x)$ 在 δ 上取正值, 在 $(-\pi, \pi)-\delta$ 上, $\lambda(x)=0$. 由于 $\lambda'''(x)\in C$, 所以 $\lambda(x)$ 的富理埃系数是 $o(n^{-3})$. 设 $\lambda(x)=\sum\gamma_n e^{inx}$, S 是 $\sum c_n e^{inx}$; 置

$$K_n=\sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p\gamma_{n-p}\quad(\gamma_{-n}=\gamma_n,\ c_{-n}=c_n),$$

当 $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}|\gamma_k|<\infty$ 时, 称 $\sum\gamma_k$ 是一速斂级数. 现在 $\sum\gamma_n e^{inx}$ 在 $(-\pi, \pi)-\delta$ 上, 速斂于 0. 记 S 与 $\lambda(x)$ 的"乘积级数"

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n e^{inx}$$

为 $\sigma(\lambda)$, 我们证明 $\sigma(\lambda)$ 在 $(-\pi, \pi)-\delta$ 上匀斂于 0.

置 $R_k(x)=\sum_{n=k}^{\infty}\gamma_n e^{inx}$, 级数 $\sum|R_k(x)|$ 在 $(-\pi, \pi)-\delta$ 上是匀斂的, 当 $x\in(-\pi, \pi)-\delta$ 时, 我们见到

$$\begin{aligned}Q_m(x)&=\sum_{n=-m}^{m} K_n e^{inx}=\sum_{n=-m}^{m} e^{inx}\sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p\gamma_{n-p}\\&=\sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p e^{ipx}\sum_{n=-m}^{m}\gamma_{n-p}e^{i(n-p)x}\\&=\sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p e^{ipx}R_{-m-p}(x)-\sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p e^{ipx}R_{m-p+1}(x);\end{aligned}$$

从而 $Q_m(x)\to 0\quad(m\to\infty)$. 由是可知 $\sigma(\lambda)\equiv 0\quad(x\in(-\pi, \pi)-\delta)$. 级数 $\sigma(\lambda)$ 在 δ 中不属于 $E(S)$ 的点, 也收斂于 0, 它是概斂于 0 的. 但是在 $\delta E(S)$ 上, $\sigma(\lambda)$ 并不收斂于 0, $\delta E(S)$ 是 $\sigma(\lambda)$ 的核.

由于 $\lambda(x)$ 是有界, 所以 $\sum c_n e^{inx}$ 与 $\gamma_0^*+\sum_{n\neq 0}\gamma_n^* e^{inx}$ ($\gamma_n^*=\gamma_n$, $n\neq 0$; $\gamma_0^*=\gamma_0-\lambda(x)$) 的乘积级数, 可用上面的议论来处理, 这里

$$K_n^*=\sum_{p=-\infty}^{\infty}\gamma_{n-p}^* c_p=K_n-\lambda(x)c_n.$$

我们见到 $\sum K_n^* e^{inx}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上均匀地速斂于 0, 从而

$$\sum K_n e^{inx}-\lambda(x)\sum c_n e^{inx} \quad (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$$

速敛于 0. 因此, S 落在区间 δ 中的部分核心, 就是 $\sigma(\lambda)$ 落在 δ 中的部分核心.

最后我们注意核心是空的话, 核也是空的. 定理证毕.

定理 2 设 $E_1, E_2, \cdots$ 都是闭的 U 集, 则和集 $E_1+E_2+\cdots$ 也是 U 集.

【证明】 首先留意, 设概敛于 0 的三角级数 S 具有不空的核, 则必有完全点集 P 包含 E, 任一 $\delta(P)$ 含有不空的 $\delta(E)$. 事实上, 核心 $N(S)$ 不会有孤立点, $N(S)$ 的极限点集 $N'(S)=P$ 是一完全点集. 设 δ 是 P 的一个余区间, $\delta E(S)\neq 0$, 则由定理 1, $\delta N(S)$ 也不是空的, 这是不可能的. 因此 $E\subset P$, 并且当 P 有一部分点集落在 δ 中时, $\delta(E)\neq 0$.

假如存在不全等于 0 而在 $C(E)=[-\pi, \pi]-\sum_1^{\infty} E_n$ 上概敛于 0 的三角级数 S, 那末核 $E(S)$ 与核心 $N(S)$ 都不是空的; 并且有完全点集 $P\supset E$ 如上述. 现在证明, 至少有一个 E_n 在某一 δP 中是稠密的. 假如一切 $E_n(n=1, 2, \cdots)$ 在 P 中都不稠密, 那末它们的和集 E 在 P 上成一第一种类型的集, 核心 N 也是如此. 但是 N 是 G_σ 类型的, 它在 P 上是到处稠密的. 事实上, $\mathfrak{S}[S]$ 的部分和 $S_n(x)$ 适合 $|S_n(x)|\leqslant m$ $(n=1,2,\cdots)$ 成一闭集 F_m, 和集 $\sum F_m$ 是 F_σ 类型的, $N(S)=C(\sum F_m)$ 是 G_σ 类型的. 因此, P 有一部分 δP 完全落在某一 F_m 中. 从而这个 δP 是一 U 集. 另一方面, $\delta P\supset\delta E$, δE 是一个 M 集 (定理 1), 这是矛盾, 上述的 S 是不存在的, $\sum E_n$ 是一 U 集. 定理证毕.

H **点集** 设 n 是一自然数, α_n 是一实数, $-1<\beta<1$, 区间$(-\pi, \pi)$ 中的 x 适合 $\cos(nx+\alpha_n)\geqslant\beta$ 的全体成一点集 E_n. 当 $n_1<n_2<\cdots$ 时, 称 $E=\prod_{k=1}^{\infty} E_{n_k}$ 是一 H 点集. 下面是拉起曼(A. Rajchman)的定理.

定理 3 $(-\pi, \pi)$中的任一 H 点集是一 U 集.

【证明】 记 X 的小数部分 $X-[X]$ 为 $\{X\}$. 设 $0<d<1$, $n_1<n_2<\cdots$, 则从点集 $E_k=(x, \{n_kx/2\pi-\alpha_k\}\leqslant d)$ 所成之交集

$$E=\prod_{1}^{\infty} E_k \quad (0<x<2\pi)$$

是一个 H 点集，并且容易明白：任一 H 点集都可以写成这种式样.

将 E_k 记在单位圆周上，E_k 是由 n_k 个等距离的圆弧所组成，每个圆弧的长是 $\dfrac{2\pi d}{n_k}$. E_k 的余集 CE_k 是由 n_k 个"区间" $I_1^{(k)}, \cdots, I_{n_k}^{(k)}$ 所组成，$|I_\nu^k|=2\pi(1-d)/n_k$. 设三角级数(复数系数) $\sum c_n e^{inx}$ 在 E 的外部 CE 上为 0.

将 $\sum c_n e^{inx}$ 逐项积分两次而得级数之和 $F(x)$，由许瓦兹引理，$F(x)$ 在 CE 中任一区间 I 上是一次函数. 当 $x, x\pm h$ 都属于 I 时，$\Phi_h(x)=\Delta^2F(x, 2h)/4h^2=0$. 设 x_0 是区间 I_1 的中点，$h<2\pi(1-d)/4$，则 $I_i^{(k)}$ 落在 E 的外部,

$$\Phi_{h/n_k}(x_0)=0.$$

置 $S_{h/n_k}(x)=\dfrac{1}{n_k}\sum\limits_{\nu=0}^{n_k-1}\Phi_{h/n_k}\left(x+\dfrac{2\pi\nu}{n_k}\right)$，则知 $S_{h/n_k}(x_0)=0$. 但是

$$S_{h/n_k}(x)=c_0+\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' c_{nn_k} e^{inn_kx}\frac{\sin^2 nh}{(nh)^2},$$

这 $\sum'$ 表示 $n\neq 0$. 级数的和等于 $O(h^{-2}\max\limits_{k\geq n_k}|c_k|)=o(1)\ (k\to\infty)$. 从而关于 x 均匀地成立着

$$\lim_{k\to\infty} S_{h/n_k}(x)=c_0.$$

由于 $S_{h/n_k}(x_0)=0$，所以 $c_0=0$.

设 $m\neq 0$，则级数 $\sum c_n e^{inx-imx}$ 仍在 E 的外部收敛于 0. 这里的常数项是 c_m，c_m 必须等于 0. 因此 E 是一 U 集. 定理证毕.

注意 设 $n_k=3^k$，$\alpha_k=0$，$\beta=-\dfrac{1}{2}$，则 $\prod E_{n_k}$ 是康托的完全点集. 因此，完全点集可以为 U 集. 点集为 H 型的概念可以拓广如下. 设 $E\subset[0, 1]$，在 n 维的欧几里得空间 $R^{(n)}$ 中，考虑一个落在单位正方形 $\left(-\dfrac{1}{2}\leqslant x_j\leqslant\dfrac{1}{2}, j=1, 2, \cdots, n\right)$ 中的长方体 Δ. 假如存在格子点列 $\{(n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, \cdots, n_n^{(k)})\}$ ($n_\nu^{(k)}$ 都是整数) 使当 $n\in E$ 时，一切点 $\{(n_1^{(k)}x), \cdots, (n_n^{(k)}x)\}$ ($R^{(n)}$ 中的点列) 都不在 Δ 中，并且当 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是一

格子点(坐标 x_ν 都是整数)时,

$$\lim_{k\to\infty}|n_1^{(k)}x_1+n_2^{(k)}x_2+\cdots+n_n^{(k)}x_n|=\infty,$$

那末称 E 是[0, 1]中的一个 $H^{(n)}$ 型的点集,且称点列$\{(n_1^{(k)},\ \cdots,\ n_n^{(k)})\}$ 中的点是互不相倚的.

在上述情况,称点集 $2\pi x$ ($x\in E$) 是 $[0,\ 2\pi]$ 中的 $H^{(n)}$ 型点集,$H^{(1)}$ 型的点集就是 H 型点集.

下面是皮亚捷兹基-夏皮罗(И. И. Пятецкий-Шапиро) 于 1952 年在苏联科学院杂志上所发表的定理.

定理 4 $[0,\ 2\pi]$ 中的任一 $H^{(n)}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ 型点集是 U 集.

【证明】 设 E 是 $[0,\ 2\pi]$ 中的一个 $H^{(n)}$ 型点集,$2\pi x\in E$, 则 $x\in[0,\ 1]$. 点 x 的全体 $\overline{E}$ 成一 $H^{(n)}$ 型的点集,故必有格子点列$\{(n_1^{(k)},\ \cdots,\ n_n^{(k)})\}$ 如下:当 $x\in\overline{E}$ 时,

$$(n_1^{(k)}x)\overline{\in}\Delta_1,\ (n_2^{(k)}x)\overline{\in}\Delta_2,\ \cdots,\ (n_n^{(k)}x)\overline{\in}\Delta_n,$$

$\Delta_1,\ \Delta_2,\ \cdots,\ \Delta_n$ 是 n 个区间,构成一个 Δ. 作 n 个函数

$$\varphi_\nu(x+1)\equiv\varphi_\nu(x)\quad(\nu=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

分别在 Δ_ν 的外部等于 0, 在 Δ_ν 上取正值,$\int_0^1\varphi_\nu(x)dx=1$; 并且 $\varphi_\nu(x)$ 的富理埃级数 $\varphi_\nu(x)=\sum\beta_m^{(\nu)}\exp(2\pi imx)$ 快速收敛于 $\varphi_\nu(x)$, 置

$$f_k(x)=\varphi_1[(n_1^{(k)}x)]\cdot\varphi_2[(n_2^{(k)}x)]\cdots\varphi_n[(n_n^{(k)}x)],$$

则当 $2\pi x\in E$ 时,$f_k(x)=0\quad(k=1,\ 2,\ \cdots)$. 设

$$f_k(x)=\sum a_n^{(k)}\exp(2\pi inx),$$

则因 $\varphi_\nu[(n_\nu^{(k)}x)]=\varphi_\nu(n_\nu^{(k)}x)$, 我们见到

$$\varphi_\nu[(n_\nu^{(k)}x)]=\sum\beta_m^{(\nu)}\exp(2\pi in_\nu^{(k)}x).$$

由于 $\varphi_\nu(x)$ 的级数都是快速收敛,所以 $f_k(x)$ 的级数也是快速收敛. 并且

$$\sum_{-\infty}^{\infty}|a_n^{(k)}|\leqslant\sum|\beta_m^{(1)}|\cdot\sum|\beta_m^{(2)}|\cdots\sum|\beta_m^{(n)}|<\infty.$$

现在研究数列 $\{a_0^{(k)}\},\{a_1^{(k)}\},\cdots$ 的极限值 $\lim\limits_{k\to\infty}a_n^{(k)}(n=0,\ \pm1,\ \cdots)$. 设 $\sum|\beta_m^{(\nu)}|(\nu=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 都小于常数 C, $\varepsilon>0$. 取 μ 适当大,可使

$$|\beta_{\mu+1}^{(\nu)}+\beta_{\mu+2}^{(\nu)}+\cdots|<\varepsilon(2C)^{-n}C \quad (\nu=1, 2, \cdots, n).$$

写着

$$T_k^{(\nu)}(x)=\sum_{-\mu}^{\mu}\beta_m^{(\nu)}\exp(2\pi i m n_\nu^{(k)}x),$$

$$\gamma_k^{(\nu)}(x)=\sum_{|m|>\mu}\exp(2\pi i m n_\nu^{(k)}x),$$

那末

$$|T_k^{(\nu)}(x)|\leqslant C,\ |\gamma_k^{(\nu)}(x)|<\varepsilon(2C)^{-n}C \quad (\nu=1, \cdots, n;\ k=1, 2, \cdots),$$

$$f_k(x)=\prod_{\nu=1}^{n}[T_k^{(\nu)}(x)+\gamma_k^{(\nu)}(x)]$$

$$=\prod_{\nu=1}^{n}T_k^{(\nu)}(x)+\rho_k(x)=T_k(x)+\rho_k(x).$$

由于 $|\rho_k(x)|<\varepsilon(0\leqslant x\leqslant 1)$，所以得到 $|f_k(x)-T_k(x)|<\varepsilon$.

三角多项式 $T_k(x)$ 是 $T_k^{(\nu)}(x)(\nu=1, \cdots, n)$ 的乘积，它的系数除了

$$\exp(2\pi i(m_1 n_1^{(k)}+m_2 n_2^{(k)}+\cdots+m_n n_n^{(k)})x \quad (m_1, \cdots, m_n\text{: 整数})$$

的系数而外，都等于 0. 当 $m_1^2+\cdots+m_n^2>0$ 时，

$$|m_1 n_1^{(k)}+\cdots+m_n n_n^{(k)}|\to\infty \quad (k\to\infty).$$

结合 $\int\varphi_\nu(x)dx=1$，我们见到：当 k 足够大时，

$$\int_0^1 T_k(x)dx=1,$$

利用 $|f_k(x)-T_k(x)|<\varepsilon$，我们得到

$$\left|\int_0^1 f_k(x)dx-1\right|<\varepsilon.$$

由是可知 $a_0^{(k)}=1+o(1)\ (k\to\infty)$. 其次证明

$$\lim_{k\to\infty}a_j^{(k)}=0 \quad (j=\pm 1, \pm 2, \cdots).$$

当 $|j|>0$ 时，$a_j^{(k)}$ 等于

$$\int_0^1[f_k(x)-T_k(x)]e^{-2\pi ijx}dx+\int_0^1 T_k(x)e^{-2\pi ijx}dx.$$

第一项的绝对值小于 ε. 第二项的被积函数具有如下的形式：

$$T_k(x)e^{-2\pi ijx}=e^{-2\pi ijx}+\sum_k\gamma_k e^{2\pi i(m_1 n_1^{(k)}+\cdots+m_n n_n^{(k)})x-2\pi ijx},$$

由于 $(n_1^{(k)}, \cdots, n_n^{(k)})$ 的互不相倚，所以一切 γ_k 都是 $o(1)\ (k\to\infty)$. 从而得到 $a_j^{(k)}=o(1)\ (k\to\infty)\ (j\neq 0)$.

从函数列 $f_k(x)$ $(k=1, 2, \cdots)$ 的作成，就能证明 E 是一个 U 集. 假如 E 是一 M 集，那末存在概敛于 0 (在 E 的外部收敛于 0) 而不全等于 0 的级数 $\sum c_n e^{inx}$. 作 $\sum c_n e^{inx}$ 与 $\sum a_m^{(k)} e^{imx}$ 的乘积级数 $\sum c_m^{(k)} e^{imx}$, 我们将证

$$\lim_{k\to\infty} c_m^{(k)} = c_m \lim_{k\to\infty} a_0^{(k)}.$$

由于 $\sum a_m^{(k)} e^{imx}$ 在点集 E 上收敛于 0, 所以 $\sum c_n^{(k)} e^{inx}$ 在 E 上收敛于 0. 又因 $\sum c_n e^{inx}$ 在 E 的任一余补区间上收敛于 0, 所以 $\sum c_m^{(k)} e^{imx}$ 处处收敛于 0. 从而 $c_m^{(k)}$ 都等于 0. 这样一来，$c_n=0(n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$, 这是矛盾. 因此 E 是 U 集.

现在证明上记的系数极限的等式，这是拉起曼 (A. Rajchman) 的定理. 置 $\gamma_m=\max(|c_{\pm m}|, |c_{\pm(m+1)}|, |c_{\pm(m+2)}|, \cdots)$. 当 $N>|n|$ 时，写着

$$c_n^{(k)}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m^{(k)} c_{n-m}=\left(\sum_{-N}^{N}+\sum_{-\infty}^{-N-1}+\sum_{N+1}^{\infty}\right) a_m^{(k)} c_{n-m}=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3.$$

我们见到

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_1=a_0^{(k)} c_n+\sum_{m=-N}^{N}{}' a_m^{(k)} c_{n-m}=a_0 c_n,$$

这里 $a_0=\lim a_0^{(k)}=1$, 当 $m>N>|n|$ 时，$|c_{n-m}| \leqslant \gamma_{N-n}$,

$$|\sigma_3| \leqslant \gamma_{N-n} A.$$

由是可知 $\lim c_n^{(k)}=c_n a_0$ 成立. 定理 4 证明完毕.

3. 点集 E 与正数 θ 的乘积 E_θ

设 x 是点集 E 的任意一点，θ 是一正数，一切 θx 所成的点集，记它做 E_θ. 当 E 是一 U 集时，E_θ 落在 $[0, 2\pi]$ 中的部分(或是全部)是否成一 U 集的问题，是由马辛基维斯和齐革蒙特 (1937 年) 解决的，他们的定理如下:

定理 1 设 E 是一 U 集，则当 $E_\theta \subset [0, 2\pi]$ 时 (在 $0<\theta<1$ 时，E_θ 落在 $(0, 2\pi)$ 中)，E_θ 也是 U 集.

证明是联系到三角积分的理论完成的. 设 $C(s)$ 是 s 的偶函数，称

(I) $$\lim_{\omega\to\infty}\int_{-\omega}^{\omega} C(s)e^{isx}ds=\int_{-\infty}^{\infty} C(s)e^{isx}ds$$

是一三角积分．设 $E\subset(-\infty,\infty)$，在 $CE=(-\infty,\infty)-E$ 上，(I) 收敛于 0 时，$C(s)$ 概敛于 0 的话，称 E 是三角积分的一个 U 集．不是 U 集的点集是 M 集．

定理 1 的证明，可用下述三角级数与三角积分相关联的命题来导出．

定理 2 三角级数的 U 集是三角积分的 U 集．假如 E 是三角积分的 U 集，那末 E 落在长为 2π 的任一区间中的部分成三角级数的 U 集．

【从定理 2 导出定理 1】 假如从 U 集 E 所成的点集 E_θ 是一 M 集，那末由定理 2，E_θ 也是三角积分的 M 集．因此，存在如下的三角积分

$$J(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\gamma(u)\,e^{iux}du,$$

当 $x\in E_\theta$ 时 $J(x)=0$，但是 $\gamma(u)$ 并不概等于 0．因此，当 $\xi\in E$ 时，$J(\theta\xi)$ 等于 0．置 $\gamma^*(u)=\frac{1}{\theta}\gamma\left(\frac{u}{\theta}\right)$，则 $J^*(\xi)-\int\gamma^*(u)e^{iu\xi}du=0\,(\xi\in E)$，而 $\gamma^*(u)$ 并不概等于 0，从而 E 变成三角积分的 M 集了．这就建立着定理 1．

定理 1 也可以从下述"同等收敛"的定理来导出：

定理 3 假如 $\chi(t)$ 在有限区间上是有界变差，在无穷远处满足条件

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sup_{0\leqslant h\leqslant 1}|\chi(\lambda+h)-\chi(\lambda)|=0,$$

那末当区间 J 的长小于 2π 时，存在三角级数 $\sum c_n e^{inx}$ 适合 $c_n=o(1)$ 与

$$\lim_{\omega\to+\infty}\left\{\int_{-\omega}^{\omega}e^{i\lambda x}d\chi(\lambda)-\sum_{|n|\leqslant\omega}c_ne^{inx}\right\}=0\quad(x\in J),$$

并且存在着极限

$$\lim_{\omega\to+\infty}\left\{\int_{-\omega}^{\omega}(-i\,\mathrm{sign}\,\lambda)e^{i\lambda x}d\chi(\lambda)-\sum_{|n|\leqslant\omega}(-i\,\mathrm{sign}\,n)c_ne^{inx}\right\}.$$

【从定理 3 导出定理 1】 设 $E\subset(0, 2\pi)$，则 $E_\theta\subset(0, 2\pi)$. 设三角级数 $S=\sum c_n e^{inx}$ 在 $CE_\theta=(0, 2\pi)-E_\theta$ 上收敛于 0. 设 x_0 是 E 的任意一点，我们证明 S 在 θx_0 收敛于 0 好了. 取足够短的区间 J 包含 x_0，而 J 和 J_θ 都落在$(0, 2\pi)$中. 由于 S 在 $J_\theta-E_\theta$ 上收敛于 0，所以 $\sum c_n e^{in\theta x}$ 在 $J-E$ 上收敛于 0. 设阶梯函数 $\chi(\lambda)$ 具有如下的不连续点 $\{\theta n\}$：

$$\chi(\theta n+\theta)-\chi(\theta n-\theta-0)=c_n,\quad \chi(\lambda)=\chi(\theta n-\theta)\quad(\theta n-\theta\leqslant\lambda<\theta n),$$

那末 $\int e^{i\lambda x}d\chi(\lambda)$ 就是 $S(\theta x)$. 由定理 3，存在三角级数 $\sum d_n e^{inx}$ 适合 $d_n=o(1)$ 与

$$\lim_{\omega\to\infty}\left\{\int_{-\omega}^{\omega} e^{i\lambda x}d\chi(\lambda)-\sum_{|n|<\omega} d_n e^{inx}\right\}$$

$$=\lim_{\omega\to\infty}\left\{\sum_{|n|<\omega} c_n e^{in\theta x}-\sum_{|n|<\omega} d_n e^{inx}\right\}=0,$$

这里 $x\in J$. 由前节定理 1 的证明，当三角级数 S_1 与 $\lambda(x)$ 的富理埃级数的乘积级数 $\sigma_1(\lambda)$ 在 $J-E$ 上收敛于 0 时，它在 J 上也收敛于 0，因而 S_1 在 J 上也收敛于 0. 由是可知 $\sum c_n e^{i\theta x_0}=0$. 证毕.

定理 3 的证明，要用到下面的引理（见齐革蒙特的《三角级数论》第十六章定理(9.4)）.

引理 设 $L(x)$ 具有五次导函数，在 $J=[a, b]$ 上等于 1，在 $J_\varepsilon=[a-\varepsilon, b+\varepsilon]$ 的外部等于 0，那末在 J 上，均匀地成立着

$$\lim_{\omega\to\infty}\int_{-\omega}^{\omega} e^{i\lambda x}d\chi(\lambda)-\frac{1}{\pi}\int_{J_\varepsilon} F(t)L(t)\frac{d^2}{dt^2}\frac{\sin\omega(x-t)}{x-t}dt=0,$$

这里 $\chi(\lambda)$ 满足定理 3 中的条件，

$$F(x)=-\int_{|\lambda|<1}\lambda^{-2}(e^{i\lambda x}-1-i\lambda x)d\chi(\lambda)-\int_{|\lambda|>1}\lambda^{-2}e^{i\lambda x}d\chi(\lambda).$$

现在利用引理来证定理 3. 设 N 是一正整数，置 $\omega=N+\frac{1}{2}$. 设 J' 是长为 2π 的一个区间，内部含有闭区间 J. 又设 $L(x)$ 具有五次导函数，在 J 上等于 1，在 J' 外 $(x\in[0, 2\pi])$ 等于 0. 那末，

$$\int_{J'} F(x)L(x)e^{-inx}dx=o(n^{-2}).$$

设 FL 是以 2π 为周期的周期函数，在 J' 的函数值已如上述，则 $\mathfrak{S}''[FL]$ 的系数是 $o(1)$. 这就是说：三角级数 $\sum c_n e^{inx}$ 是把 $\mathfrak{S}[FL]$ 逐项微分两次而得的话，$c_n=o(1)$；$c_0=0$. 它的部分和是

$$\sum_{|n|<N} c_n e^{inx}=\frac{1}{\pi}\int_{J'} F(t)L(t)\frac{d^2}{dt^2}\,\frac{\sin\omega(x-t)}{2\sin\frac{1}{2}(x-t)}\,dt \quad \left(\omega=N+\frac{1}{2}\right).$$

因此，假如我们证得

$$\int_{J'} F(t)L(t)\frac{d^2}{dt^2}\left\{-\frac{\sin\omega(x-t)}{2\sin\frac{1}{2}(x-t)}-\frac{\sin\omega(x-t)}{x-t}\right\}dt=o(1)$$

$$(N\to\infty)$$

在 J 上均匀地成立，那末从引理得到：在 J 上均匀地成立着

$$\lim_{\omega\to\infty}\left\{\int_{-\omega}^{\omega} e^{i\lambda x}d\chi(\lambda)-\sum_{|n|<\omega} c_n e^{inx}\right\}=0.$$

写着 $\Delta(x-t)=\left\{\frac{1}{2}\sin\frac{x-t}{2}-\frac{1}{x-t}\right\}$，我们要证：当 $\omega\to\infty$ 时，在 J 上，

$$I=\int_{J'} F(t)L(t)\frac{d^2}{dt^2}\{\Delta(x-t)\cdot\sin\omega(x-t)\}\,dt$$

匀敛于 0. 算出两次微分的结果，上式分成三个积分的和，其中的一项是

$$I_1=-\omega^2\int_{J'} F(t)L(t)\Delta(x-t)\sin\omega(x-t)dt.$$

函数 $L(t)\Delta(x-t)$ 关于 t 可以微分五次，它在 J' 外，等于 0. 因此，如前面所述，我们得到 $I_1=o(1)$，还有两项是

$$I_2=-2\omega\int_{J'} F(t)L(t)\cos\omega(x-t)\frac{d}{dt}\Delta(x-t)dt,$$

$$I_3=\int_{J'} F(t)L(t)\sin\omega(x-t)\frac{d^2}{dt^2}\Delta(x-t)dt.$$

容易明白：$I_2=o(1)$，$I_3=o(1)$. 从而 $I=I_1+I_2+I_3=o(1)$. 证明完毕.

4. 特殊 M 点集以及特殊三角级数的 U 集

完全点集何时成为 M 集？这里首先要回答这个问题.

定理 1 完全点集 P 成一 M 点集的充要条件是存在具有下述两项性质的函数 $F(x)$：

（i）在 P 的任一余补区间上，$F(x)$ 是常数，但 $F(x)$ 并不全等于一个常数；

（ii）$F(x)=Ax+B+\Phi(x)$，$\Phi(x)$ 的富理埃系数是 $o(n^{-1})$.

【证明】 条件的必要性. 设 $\delta_1, \delta_2, \cdots$ 是完全点集 P 的一切余补区间，则因 P 是一 M 集，存在三角级数 $\sum c_n e^{inx}(c_{-n}=\bar{c}_n)$ 在任一 δ_n 上收敛于 0 而 c_n 并非都是 0. 由于 $\sum c_n e^{inx}$ 概收敛，所以 $c_n=o(1)$. 级数 $C+c_0x-\sum' ic_ne^{inx}/n$ 概敛于一个函数 $F(x)$，在任一 δ_n 上，

$$F(x)=C+c_0x-\sum_{n\neq 0}{}' i\frac{c_n}{n}e^{inx}$$

等于一个常数，全体说来，它是连续的，而不是全等常数，事实上，c_n 不是个个都等于 0. 置 $\Phi(x)=\sum' ic_ne^{inx}/n$，就得到定理中所述的形式.

条件的充分性. 设对于完全点集 P，存在函数

$$F(x)=Ax+B+\Phi(x)$$

满足定理中的两个条件(i)和(ii). 由于 $\Phi(x)$的富理埃系数是 $o\left(\frac{1}{n}\right)$，所以 $\Phi(x)$ 的富理埃级数概敛于 $\Phi(x)$，而 $F(x)$ 可以写成

$$F(x)=Ax+B'+\sum_{-\infty}^{\infty}{}'\frac{\gamma_n}{n}e^{inx}\quad(\gamma_n=o(1)),$$

它的逐项微分级数 $A+\sum' i\gamma_ne^{inx}$ 的系数是 $i\gamma_n=o(1)$. 后者的两次逐项积分级数——就是 $F(x)$ 的表达级数的逐项积分，匀敛于一个函数 $\Psi(x)$，这是 $A+\sum' i\gamma_ne^{inx}$ 的黎曼函数. 由于 $F(x)$ 在任一 δ_n 上是常数，所以 $\Psi(x)$ 在任一 δ_n 上是一次函数. 从而

$$\mathscr{D}^2\Psi(x)=0\quad(x\in\delta_n,\ n=1, 2, \cdots).$$

由是可知 $A+\sum' i\gamma_ne^{inx}$ 在 P 的外部收敛于 0. 但是 A 与 γ_n 并非都等

于 0——否则 $F(x)$ 将是常数——P 是 M 点集. 定理证毕.

定理 2（孟孝夫, Д. Е. Меньшов, 1916） 设 $E_0=[0, 2\pi]$, E_n 是 2^n 个闭区间组成的点集, 将 E_n 的 2^n 个区间中的每一区间三等分, 除去其中央区间的内点而得 E_{n+1}, 则交集 $E=E_0E_1E_2\cdots$ 是个测度等于 0 的完全点集, 它是一个 M 集.

【证明】 从 E_0 逐次除去的一切区间之长的和等于 $\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots=1$. 因此 $|E|=1-1=0$. 显然, E 是一完全点集.

现在从稍稍一般的见地来证 E 是一个 M 集. 设 $0<\varepsilon_1<\cdots$, $\varepsilon_n\to 0$. 从 $\mathscr{E}_0=[0, 2\pi]$ 除去长为 $\varepsilon_1|\mathscr{E}_0|=2\pi\varepsilon_1$, 而与 $\mathscr{E}_0$ 同中点的区间而得 $\mathscr{E}_1$, 它是由两个闭区间所组成, 其测度 $|\mathscr{E}_1|=2\pi(1-\varepsilon_1)$. 从 $\mathscr{E}_1$ 的两个区间, 除去同中心的两个开区间, 其长都是 $\frac{1}{2}|\mathscr{E}_1|\varepsilon_1$. 一般地说, 从 $\mathscr{E}_n$ 所组成的 2^{n+1} 个区间, 各除去同中心的开区间, 其长都是 $2^{-n-1}\varepsilon_n|\mathscr{E}_n|$, 经过这样的手续 n 次, 在 $[0, 1]$ 中留得测度为

$$2\pi(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)\cdots(1-\varepsilon_n)$$

的完全集 P_n, $\lim P_n=P$ 是一完全点集, $|P|=2\pi\prod(1-\varepsilon_n)$, 当 $\sum\varepsilon_n=\infty$ 时, $|P|=0$.

在第 m 次手续, 我们从 $[0, 1]$ 除去了 2^m-1 个区间, 从左至右, 记这些区间为 $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_{2^m-1}$. 作连续的折线函数 $F_m(x)$ 使

$$F_m(0)=F(2\pi)=0,$$

$$F_m(x)=k2^{-m+1}\quad(x\leqslant\pi,\ x\in\delta_k,\ k=1, 2, \cdots, 2^m-1),$$

$$F_m(x)=2-k2^{-m+1}\quad(x\geqslant\pi,\ x\in\delta_k).$$

置 $S_m=\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_{2^m-1}$——这是由这些区间组成的点集. 容易明白, 在 S_m 上, $F_{m+1}(x)=F_m(x)$, $F'_m(x)=0$. 在 $[0, 2\pi]-S_m$ 上,

$$|F_{m+1}(x)-F_m(x)|\leqslant 2^{-m}\varepsilon_{m+1},$$

$$F'_m(x)=\pm\frac{2}{|P_m|}\quad(x\lesseqgtr\pi).$$

设 $\eta_m=\max\limits_{k>m}\varepsilon_k$, 则 $|F(x)-F_m(x)|\leqslant\eta_m 2^{-m+1}$ 在 $[0, 2\pi]$ 上成立, $F(x)$ 的存在是显明的. $F(x)$ 的 P 的任一余补区间上是常数, 但不是全等

于常数.

由定理 1, 假如 $F(x)$ 的富理埃系数是 $o(n^{-1})$, 那末 P 是一 M 集. 对于正整数 n, 存在惟一的 m 适合于

$$\frac{2^{m-1}}{\sqrt{\eta_{m-1}}|P_{m-1}|}\leqslant n<\frac{2^m}{\sqrt{\eta_m}|P_m|}.$$

我们要证

$$I_m\equiv n\int_0^{2\pi}F(x)e^{-inx}dx=o(1).$$

写着 $I_m=I'_m+I''_m$, $I'_m=n\int(F-F_m)e^{-inx}dx$, $I''_m=n\int F_me^{-inx}dx$. 由于 $F(x)=F_m(x)$ 在 S_m 上成立, $|F-F_m|\leqslant\eta_m 2^{-m+1}$, 所以

$$|I'_m|\leqslant n\cdot\eta_m 2^{-m+1}\cdot|R_m|<2\sqrt{\eta_m}=o(1).$$

又因 $F(0)=F(2\pi)=0$, 我们见到

$$I''_m=-i\int_0^{2\pi}F'_m(x)e^{-inx}dx=-i\int_{P_m}F'_m(x)e^{-inx}dx.$$

在 P_m 的各个区间上, $|F'_m|=2/|P_m|$, 区间的个数共 2^m, 我们得到

$$|I''_m|<\frac{2}{|P_m|}\cdot\frac{2}{n}2^m<\frac{2}{|P_m|}\cdot\frac{2\sqrt{\eta_{m-1}}|P_{m-1}|}{2^{m-1}}2^m$$

$$=\frac{8\sqrt{\eta_{m-1}}}{1-\varepsilon_m}=o(1).$$

由是 $I_m=I'_m+I''_m=o(1)$. 定理证毕.

定理 3 有界变差的函数 $F(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$ 在完全点集 $P\subset[0, 2\pi]$ 的任一余补区间上是常数而不全等于一个常数的话, 那末当

$$\int_0^{2\pi}e^{-inx}dF(x)=o(1)\quad(n\to\pm\infty)$$

时, P 是一个 M 点集.

【证明】 函数 $\Phi(x)=F(x)-\left[F(0)+\frac{F(2\pi)-F(0)}{2\pi}x\right]$ 满足

$$\Phi(0)=0,\ \Phi(2\pi)=0;$$

$$\int_0^{2\pi}e^{-inx}d\Phi=\int_0^{2\pi}e^{-inx}dF=o(1).$$

另一方面，由分离积分，

$$\int_0^{2\pi} e^{-inx}\,d\Phi = in\int_0^{2\pi}\Phi(x)e^{-inx}\,dx,$$

这是 $o(1)$，由定理 1，P 是 M 点集．证明完毕．

从 $\rho^0=[0,\ 2\pi]\ (|\rho^0|=2\pi)$ 除去同中心的开区间而得两个长为 $\rho^{(1)}$ 的区间，$k-1$ 次除去后，剩下长为 $\rho^{(k)}$ 的闭区间 2^k 个．当 $2^k\rho^{(k)}\to 0$ 时，我们称留下的完全点集 P 是一个对称完全集．假如 $\rho^{(k+1)}/\rho^{(k)}$ 等于一个常数 ξ，那末我们称 P 是一个**定比对称点集**，这是一个测度为 0 的完全点集．当 $\xi=\dfrac{1}{3}$ 时，P 是康托的完全点集．假如 θ 是整系数 $c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n$ 的代数方程

$$x^n+c_1x^{n-1}+\cdots+c_n=0$$

的根，那末 θ 是一个“代数的整数”．假如此时

$$x+c_1x^{n-1}+\cdots+c_n=(x-\theta)(x-\theta_1)\cdots(x-\theta_{n-1}),$$
$$|\theta_1|<1,\ \cdots,\ |\theta_{n-1}|<1\quad(\theta_1,\ \cdots,\ \theta_{n-1}\ 是\ \theta\ 的共轭数),$$

那末称 θ 是一个匹所(C. Pisot)的数，n 是 θ 的次数．

定理 4 以 ξ 为定比的定比对称集成一 M 集的充要条件是 $\theta=\dfrac{1}{\xi}$ 不是匹所的数．

这是沙勒姆(R. Salem, 1943 年)的定理．

【证明】 首先证明：当 $\theta=\dfrac{1}{\xi}$ 不是匹所的数时，以 ξ 为定比的对称点集 P 是一 M 集．当 $x\in P$ 时，存在一列的 ε_k，ε_k 或等于 0 或等于 1，它们适合

$$x=2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2\xi+\cdots+\varepsilon_k\xi^{k-1}+\cdots)(1-\xi).$$

第 k 次所除去的每一区间的长等于 $2\xi^{k-1}(1-2\xi)$，区间数共 2^{k-1}；每一区间在区间右端 $\varepsilon_k=1$，当 $i>k$ 时，$\varepsilon_i=0$．余下的开区间的个数共 2^k，记它们做 $\rho_1^{(k)},\ \rho_2^{(k)},\ \cdots,\ \rho_{2^k}^{(k)}$．作函数

$$F(x)=\frac{\varepsilon_1}{2}+\frac{\varepsilon_2}{2^2}+\cdots+\frac{\varepsilon_k}{2^k}+\cdots,\quad x=2\pi\sum_1^{\infty}\varepsilon_k\xi^{k-1}(1-\xi).$$

我们证明积分 $I_n=\int_0^{2\pi} e^{inx}dF$ 之值等于

$$I_n=e^{\pi ni}\prod_{j=1}^{\infty}\cos\{n\pi\xi^{j-1}(1-\xi)\}.$$

事实上,

$I_n^{(k)}=2^{-k}\sum\exp\{2\pi in[\varepsilon_1+\varepsilon_2\xi+\cdots+\varepsilon_k\xi^{k-1}](1-\xi)\}$ $(\varepsilon_\nu=0$ 或 $1)$

是 I_n 的逼近数值:

$$I_n^{(k)}=2^{-k}\prod_{j=1}^{k}[1+\exp(2\pi in\xi^{j-1}(1-\xi))]$$

$$=\prod_{j=1}^{k}e^{\pi ni\xi^{j-1}(1-\xi)}\cos[n\pi\xi^{j-1}(1-\xi)],$$

这里利用了公式 $2^{-1}(1+e^{2ia})=e^{ia}\cos a$, 但是由于 $(1+\xi+\xi^2+\cdots)\cdot(1-\xi)$ 等于 1, 所以得到

$$I_n=e^{\pi ni}\prod_{j=1}^{\infty}\cos\{n\pi\xi^{j-1}(1-\xi)\}=\int_0^{2\pi}e^{inx}dF.$$

因此, 由定理 3, 问题归结到证明 $I_n=o(1)\ (n\to\infty)$. 利用

匹所的定理: 假如存在 $\lambda\geqslant\frac{1}{\theta}$ 使级数 $\sum\sin^2\pi\lambda\theta^m$ 收敛, 那末 θ 是一匹所的数[见 1928 年的比沙(Pisa)高师年刊].

我们能证较强于 $I_n=o(1)$ 的结果: 设 $0<\xi<1$, 当 $t\to\pm\infty$ 时, 假如 $I(t)=\prod|\cos(\pi t\xi^{j-1})|\neq o(1)$, 那末 $\theta=\frac{1}{\xi}$ 是一个匹所的数.

现在假设 $I(t)\neq o(1)\ (t\to\pm\infty)$, 那末存在 $t_s\uparrow\infty$ 和正数 a 适合

$$I(t_s)>a\quad(s=1,\ 2,\ \cdots).$$

对于 s 有正整数 n 满足 $\theta^{n-1}<t_s\leqslant\theta^n$. 从而 $t_s=\lambda_s\theta^n$, $\frac{1}{\theta}<\lambda_s\leqslant1$; $\{\lambda_s\}$ 中有子序列 $\lambda_q\to\lambda$, $\frac{1}{\theta}\leqslant\lambda\leqslant1$. 由于 $a<I(t_q)$ 而

$$I(t_q)=I(\lambda_q\theta^{n(q)})\leqslant|\cos\pi\lambda_q\cos\pi\lambda_q\theta\cdots\cos\pi\lambda_q\theta^{n(q)}|,$$

所以下面三个不等式顺次成立:

$$\prod_{j=0}^{n(q)}(1-\sin^2\pi\lambda_q\theta^j)\geqslant a^2,\quad\exp\Big(-\sum_{j=0}^{n(q)}\sin^2\pi\lambda_q\theta^j\Big)\geqslant a^2,$$

$$\sum_{j=0}^{n(q)}\sin^2\pi\lambda_q\theta^j\leqslant\log\frac{1}{a^2}\quad(q=1,\ 2,\ \cdots).$$

当 $r>q$ 时，成立着

$$\sum_{j=0}^{n(r)} \sin^2 \pi\lambda_r \theta^j \leqslant \log \frac{1}{a^2},$$

从而顺次得到

$$\sum_{j=0}^{n(q)} \sin^2 \pi\lambda_r \theta^j \leqslant \log \frac{1}{a^2}, \quad \sum_{j=0}^{n(q)} \sin^2 \pi\lambda \theta^j \leqslant \log \frac{1}{a^2},$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sin^2 \pi\lambda \theta^j \leqslant \log \frac{1}{a^2} \quad \left(\frac{1}{\theta} \leqslant \lambda \leqslant 1\right).$$

由匹所的定理，θ 是一匹所数．这是与假设相背的．因此，以 $\xi=\frac{1}{\theta}$ 为定比的对称完全点集是一 M 集．

其次证明上述结果的逆．设 P 是一以 $\xi=\frac{1}{\theta}$ 为定比的完全点集．我们要证：假如 θ 是一匹所数，那末 P 不是 M 集而是 U 集（见沙勒姆-齐革蒙特，1955 年在巴黎 C. R. 240 上的论文）．证明需要下述关于匹所数的基本不等式：假如 θ 是一 n 次的匹所数，那末当 $\theta>2$ 时，存在正数 λ 和整数 N 适合于

$$\frac{\lambda}{(\theta-1)\theta^N}+\sum_{m=0}^{\infty} |\{\lambda\theta^m\}| < \frac{1}{8\cdot 2^{N/n}},$$

这里 $\{x\}=x-[x]$．当 $x\in P$ 时，x 可以写成

$$x=2\pi(\theta-1)(\varepsilon_1\theta^{-1}+\varepsilon_2\theta^{-2}+\cdots), \quad \varepsilon_m(\varepsilon_m-1)=0, \quad \theta>2.$$

我们要证 P 是一 U 集，也就是要证：适合

$$x=\frac{\varepsilon_1}{\theta}+\frac{\varepsilon_2}{\theta^2}+\frac{\varepsilon_3}{\theta^3}+\cdots \quad (\varepsilon_m(\varepsilon_m-1)=0)$$

的一切 x 成一 U 集 Q（见 §3）．

现在证明基本不等式．设 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n$ 是互相共轭的 n 次代数的整数，$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_lx^l$ 的系数 $a_0, a_1, \cdots, a_l$ 都是整数，那末 $C_m=\sum_{j=1}^{n} p(\theta_j)\theta_j^m\ (m=0, 1, \cdots)$ 也都是整数．事实上，

$$c_m=\sum_{\nu=0}^{l} a_\nu \sum_{j=1}^{n} \theta_j^{m+\nu}=\sum_{\nu=0}^{l} a_\nu b_{m\nu},$$

$b_{m\nu}$ 都是整数．设 $l=n-1$，$\theta_n=\theta$，写着 $\lambda=p(\theta)$，$\mu_j=p(\theta_j)\ (j<n)$；

且设 $\lambda>0$. 我们见到 $c_m=\sum_{j=1}^{n-1}\mu_j\theta_j^m+\lambda\theta^m$. 简写第一项的和为 δ_m, 那末, 由于 θ 是一匹所的数, $|\theta_j|<1(j=1, \cdots, n-1)$,

$$|\delta_m|\leqslant\sum_{j=1}^{n-1}|\mu_j||\theta_j^m|, \quad \sum_{m=0}^{\infty}|\delta_m|\leqslant\sum_{j=1}^{n-1}|\mu_j|\frac{1}{1-|\theta_j|}.$$

我们应用敏可夫斯基在"整数逼近论"方面一个定理来完成基本不等式的证明. 定理如下: 假如 n 个一次形式

$$L_j=a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+\cdots+a_{jn}x_n \quad (j=1, 2, \cdots, n)$$

的行列式 $D=|a_{j1}\cdots a_{jn}|$ 不等于 0, 那末必有 n 个整数 $x_1, \cdots, x_n$ 使 $|L_j|\leqslant\sqrt[n]{|D|}$ 以及 $x_1^2+\cdots+x_n^2>0$.

现在以 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 为未知数, 考虑 n 个一次形式

$$L(\theta)=\frac{L}{(\theta-1)\theta^N}=\frac{1}{(\theta-1)\theta^N}[a_0+a_1\theta+\cdots+a_{n-1}\theta^{n-1}];$$

$$L_j(\theta_j)=\frac{\mu_j}{1-|\theta_j|}=\frac{1}{1-|\theta_j|}[a_0+a_1\theta_j+\cdots+a_{n-1}\theta_j^{n-1}].$$

这里的行列式等于

$$\frac{1}{(\theta-1)\theta^N}\prod_{j=1}^{n-1}\frac{1}{1-|\theta_j|}\begin{vmatrix}1 & \theta & \cdots & \theta^{n-1}\\ 1 & \theta_1 & \cdots & \theta_1^{n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & \theta_{n-1} & \cdots & \theta_{n-1}^{n-1}\end{vmatrix}=\frac{C(\theta)}{\theta^N},$$

$C(\theta)$ 与 N 无关系. 取适当大的 N 可使 $C(\theta)\theta^{-N}$ 小于 $(8n)^{-n}2^{-N}$, 这就是说: $(2/\theta)^N<1/(8n)^nC(\theta)$, 由于 $\theta>2$, 上述的 N 是存在的. 由敏可夫斯基的定理, 我们得到

$$\frac{\lambda}{(\theta-1)\theta^N}+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{|\mu_j|}{1-|\theta_j|}<\frac{1}{8\cdot2^{N/n}}.$$

由于 $\sum|\delta_m|$ 不大于上式左端, 所以 $|\delta_m|<1$. 因此, 从 $\lambda\theta^m=c_m+\delta_m$ 和 $[c_m]=c_m$ 得到 $|\lambda\theta^m|\leqslant|\delta_m|$. 又从上式得到基本不等式.

利用基本不等式, 我们证明 Q 是一个 $H^{(n)}$ 集. 当 $x\in Q$ 时,

$$\lambda\theta^m x=\lambda\theta^m\left(\sum_{\nu=1}^{m}\theta^{-\nu}\varepsilon_\nu+\sum_{\nu=m+1}^{m+N}\theta^{-\nu}\varepsilon_\nu+\sum_{\nu=m+N+1}^{\infty}\theta^{-\nu}\varepsilon_\nu\right),$$

$\lambda\theta^m=c_m+\delta_m$, c_m 是一整数.

下面用 $x\equiv y$ 简记 $x\equiv y \pmod 1$. 我们见到

$$\lambda|\theta^{m-1}\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n|\equiv|\delta_{m-1}\varepsilon_1+\cdots+\delta_0\varepsilon_m|\leqslant\sum_{\nu=0}^{m}|\delta_\nu|,$$

$$\lambda\left|\sum_{m+N+1}^{\infty}\theta^{-\nu}\varepsilon_\nu\theta^m\right|\leqslant\frac{\lambda}{(\theta-1)\theta^N}.$$

由基本不等式,

$$\left|\{\lambda\theta^m x\}-\lambda\left(\frac{\varepsilon_{m+1}}{\theta}+\cdots+\frac{\varepsilon_{m+N}}{\theta^N}\right)\right|<\frac{1}{8\cdot 2^{N/n}}.$$

记 $g_m=\left\{\lambda\left(\frac{\varepsilon_{m+1}}{\theta}+\cdots+\frac{\varepsilon_{m+N}}{\theta^N}\right)\right\}$, 则得 $|\{\lambda\theta^m x\}-g_m|<\frac{1}{8\cdot 2^{N/n}}$. 将

$$(g_{k+1},\ g_{k+2},\ \cdots,\ g_{k+n})$$

看做 n 维欧几里得空间 $R^{(n)}$ 中的一点 O_k, 由于 $\varepsilon_{k+1}, \cdots, \varepsilon_{k+N}$ 都只取 0 或 1 两者之一, 所以 O_k 的位置限于 2^{N+n-1} 个中的一个. 对于 Q 的任一 x, 得到点 $P_k=(g_{k+1},\ g_{k+2},\ \cdots,\ g_{k+n})$, 此点或是落在以 O_k 为中心, 边长为 $\frac{2}{8\cdot 2^{N/n}}=2^{-2-\frac{N}{n}}$ 的 n 维正方体中, 或是落在中心与 O_k 相距为 1 的同样大小的 n 维正方体中. 这种正方体的个数一共有 2^{N+2n-1} 个, 共通部分的体积决不超过 $2^{N+2n-1}\left(2^{-2-\frac{N}{n}}\right)^n=\frac{1}{2}$. 因此, 单位正方体中含有一个 n 维正方体, 其中无 P_k 的任何点. 由于 $\lambda\theta^m=c_m+\delta_m, \delta_m=o(1)$, 所以当 $x\in Q$ 时, $(\{c_{k+1}x\},\ \{c_{k+2}x\},\ \cdots,\ \{c_{k+n}x\})\,\overline{\in}\,\Delta$, Δ 是一个 n 维正方体. 现在证明 $(c_{k+1},\ c_{k+2},\ \cdots,\ c_{k+n})$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$ 是互"不相倚的"; 这就是说, 当 n 个整数 $l_1, \cdots, l_n$ 至少有一个不等于 0 时,

$$\varlimsup_{k\to\infty}|l_1c_{k+1}+l_2c_{k+2}+\cdots+l_nc_{k+n}|=\infty.$$

事实上, 左端的和等于

$$\sum_{\nu=1}^{n}l_\nu(\lambda\theta^{k+\nu}-\delta_{k+\nu})=\lambda\theta^{k+1}\sum_{\nu=0}^{n-1}l_{\nu+1}\theta^\nu-\sum_{\nu=1}^{n}l_\nu\delta_{k+\nu},$$

θ 是一个 n 次代数数并且 $\theta>2$, 从而右端第一项中的和决不是 0, 当 $k\to\infty$ 时, $\lambda\theta^{k+1}\to\infty$. 末项是 $o(1)$, 事实上, $\delta_{k+\nu}=o(1)\ (k\to\infty)$. 这样一来, 从 $\left|\sum_1^n l_\nu c_{k+\nu}\right|\to\infty$ 就知道 Q 是 $H^{(n)}$ 型的点集. 由 §2 的定理 4, Q 是 U 集, 因此达到 P 不是 M 集的结论. 定理 4 证毕.

设正数数列 $\{\varepsilon_n\}$ 是单调趋近于 0 的，E 是$[0, 2\pi]$中的一个点集. 设 $|\varepsilon_n|\leqslant\varepsilon_n\ (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$，假如三角级数 $\sum c_n e^{inx}$ 在 $C(E)=[0, 2\pi]-E$ 上收敛于 0 时，一切 c_n 都是 0，此时我们称 E 是关于 $\{\varepsilon_n\}$ 的一个 U 集，记之以 $U(\{\varepsilon_n\})$. $U(\{\varepsilon_n\})$ 的测度可以大于 0，齐革蒙特(1926 年)证明下述

定理 5 对于任一 $\{\varepsilon_n\}\ (\varepsilon_n\downarrow 0)$，$U(\{\varepsilon_n\})$ 必存在. $U(\{\varepsilon_n\})$ 的测度可以任意地接近于 2π.

【证明】 对于 $\{\varepsilon_s\}$，取如下的 $\{\eta_s\}$：$0<\eta_s<\dfrac{1}{2}$，$\eta_s\to0$，$\varepsilon_s/\eta_s\to0$. 固定 s，记适合于 $\eta_s\leqslant\left(\dfrac{sx}{2\pi}\right)\leqslant1-\eta_s$ 的一切 x，成一完全点集 P_s，当 $x\in P_s$ 时，有自然数 N_s 适合 $2\pi\eta_s+2\pi N_s\leqslant sx\leqslant2\pi(1-\eta_s)+2\pi N_s$，$P_s$ 的测度等于 $2\pi(1-2\eta_s)$.

对于正数 ε，取自然数 $n_1,\ n_2,\ \cdots;n_k<n_{k+1}$，适合

$$4\pi(\eta_{n_1}+\eta_{n_2}+\cdots+\eta_{n_k}+\cdots)<\varepsilon.$$

那末点集 $\prod P_{n_k}=P$ 的余集 $C(P)$ 的测度

$$|C(P)|\leqslant\sum|C(P_{n_k})|<4\pi\sum\eta_{n_k}<\varepsilon.$$

从而 $|P|>2\pi-\varepsilon$. 我们将证 P 是一 $U(\{\varepsilon_n\})$.

现在用下面的 $\lambda(x, h)$ 作为补助函数：

$$\lambda(x)\equiv\lambda(x,\ h)\equiv\lambda(x+2\pi),\ \lambda(-x)=\lambda(x);$$

$$\lambda(x,\ h)=\begin{cases}\dfrac{3}{2h}-\dfrac{x^2}{2h^3} & (0\leqslant x\leqslant h),\\ \dfrac{(x-3h)^2}{4h^3} & (h\leqslant x\leqslant 3h),\\ 0\quad(3h\leqslant x\leqslant\pi).\end{cases}$$

函数 $\lambda(x)$ 的富理埃级数是

$$\lambda(x,\ h)=\frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^3\cos nx\right]$$

或是

$$\lambda(x,\ h)=\frac{2}{\pi}\left[1+\sum_{-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^3 e^{inx}\right].$$

置 $3h_s=2\pi\eta_s$，那末在 P_s 上，$\lambda(sx,\ h_s)=0$. 事实上，$x\in P_s$ 的话，

$$2\pi\eta_s+2\pi N_s\leqslant sx\leqslant 2\pi(1-\eta_s)+2\pi N_s,$$
$$3h_s\leqslant sx-2\pi N_s\leqslant 2\pi-3h_s.$$

设 $|c_n|\leqslant\varepsilon_n$, 作三角级数 $\sum c_n e^{inx}$ 与

$$\frac{\pi}{2}\lambda_s(x)=1+\sum_{-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{\sin nh_s}{nh_s}\right)^3 e^{insx}$$

的乘积级数 $\sum c_n^{(s)}e^{inx}$. 当 $s=n_k$ 时, 假如 $\sum c_n e^{inx}$ 在 P 的外部收敛于 0, 那末 $\sum c_n^{(s)}e^{inx}$ 到处收敛于 0; 事实上, 级数 $\frac{\pi}{2}\lambda_s(x)$ 是快速收敛的并且 $c_n=o(1)$, 应用拉起曼的定理得到

$$c_m^{(n_k)}=0\quad(m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots).$$

另一方面, 简写 $\frac{\pi}{2}\lambda_s(x)$ 的富理埃系数为 $\gamma_p^{(s)}$, 我们见到

$$c_m^{(s)}=\sum_{p=-\infty}^{\infty}c_{m-p}\gamma_p^{(s)}=c_m+\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' c_{m-ns}\left(\frac{\sin nh_s}{nh_s}\right)^3.$$

要证 $c_m^{(s)}\to c_m(\delta\to\infty)$, 只须证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_{m\pm ns}|\left|\frac{\sin nh_s}{nh_s}\right|^3\to 0\quad(s\to\infty).$$

由于 $c_{m\pm s}\to 0(s\to\infty)$, 所以上式中的"$n=1$"可易以"$n=2$". 当 $s>|m|$ 时, $(n-1)s>|m|\,(n>1)$, 从而 $|c_{m\pm ns}|\leqslant\varepsilon_s$. 由是, 我们只要证明

$$\varepsilon_s\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{\sin nh_s}{nh_s}\right|^3\to 0\quad(s\to\infty).$$

左端等于

$$\frac{3}{2\pi}\ \frac{\varepsilon_s}{\eta_s}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|\sin nh_s|}{n}\left(\frac{\sin nh_s}{nh_s}\right)^2=O\left(\frac{\varepsilon_s}{\eta_s}\right)=o(1).$$

定理 5 证毕.

5. 用三角级数概表可测函数

对于有限数值的可测周期函数 $f(x)$, 是否有三角级数概敛于 $f(x)$ 的问题, 是卢金 (Лузин) 于 1915 年提出的. 直至 1940 年, 孟孝夫才得到解决, 其结果如下:

定理1 对于任一有限可测函数 $f(x)$, $f(x+2\pi)\equiv f(x)$, 必有三角级数几乎处处收敛于 $f(x)$.

首先证明孟孝夫另外的定理.

定理2 对于 $[0, 2\pi]$ 上的任一有限可测函数 $f(x)$ 和正数 σ, 存在具有均匀收敛的富理埃级数的函数 $g(x)$, 使在 $[0, 2\pi]$ 中一个点集 E 上与 $f(x)$ 相一致(这就是说, 当 $x\in E$ 时, $f(x)=g(x)$), 并且 $|E|>2\pi-\sigma$.

证明需要下述

引理 设 $[c, d]\subset[0, 2\pi]$, $\varepsilon>0$, 则必有连续的折线函数 $\psi(x)$, 它在 $[0, 2\pi]-[c, d]$ 上等于 0, 在 E 上等于常数 γ, 这里 $E\subset[c, d]$

$$|E|>(d-c)\left(1-\frac{5}{\nu}\right)\quad(\nu\text{ 是一正整数});$$

并且

$$|\psi(x)|\leqslant 2\nu|\gamma|\quad(0\leqslant x\leqslant 2\pi),$$

$$\left|\int_0^x\psi(t)dt\right|\leqslant\varepsilon\quad(0\leqslant x\leqslant 2\pi),$$

$$\left|\int_0^{2\pi}\psi(t)\frac{\sin n(t-x)}{t-x}dt\right|\leqslant B\nu|\gamma|$$

$$(0\leqslant x\leqslant 2\pi)\ (n=1, 2, \cdots).$$

【证明】 假如 $\gamma=0$, 那末 $\psi(x)\equiv 0$ 就是所要的函数. 现在假设 $\gamma\neq 0$. 取自然数 r 很大, 使它满足 $4|\gamma|(d-c)/r\nu<\varepsilon$. 置 $\delta=\dfrac{d-c}{r\nu^2}$,

$$a_s=c_s-\delta,\ c_s=c+\delta\nu s\quad(s=0, \pm1, \pm2, \cdots);$$

$$a=c+\frac{d-c}{\nu},\ b=d-\frac{d-c}{\nu};\ a'=c+2\frac{d-c}{\nu},\ b'=d-2\frac{d-c}{\nu}.$$

设折线函数 $\chi(t)$ 使在 (a', b') 上等于 1, 在 (a, b) 的外部等于 0. 积分 $\Gamma_s=\int_{a_{s-1}}^{c_s}\chi(t)dt$ 满足

$$|\Gamma_{s+1}-\Gamma_s|\leqslant\frac{\nu\delta}{r}\quad(s=1, 2, \cdots, r\nu-1).$$

事实上, 当 (c_{s-1}, c_s) 落在 (a, b) 的外部时, Γ_s 等于 0; 落在 (a', b') 中时, $\Gamma_s=\nu\delta$; 落在 (a, a') 或是 (b', b) 中时, $\Gamma_{s+1}-\Gamma_s=\pm\nu\delta/r$.

置 $\Gamma_s/\nu\delta=h_s$, $\varphi(x)=h_s(x\in(a_s,\ c_s))$, $\varphi(x)=0(x\overline{\in}(a_s, c_s)$, $s=0$, ±1, $\cdots$). 我们见到

$$\nu\int_{c_{s-1}}^{c_s}\varphi(x)dx=\nu\,\delta h_s=\Gamma_s=\int_{c_{s-1}}^{c_s}\chi(x)dx.$$

设连续的折线函数 $g(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$ 在 $(a,\ b)$ 的外部等于零, 在一切 $(a_s',\ c_s')$ 的外部一致于 $\varphi(x)$, 我们将证

$$\psi(x)=\gamma[\chi(x)-\nu g(x)]$$

是能适合引理的函数, $\psi(x)$ 是由两个折线函数 $\chi(x)$ 和 $g(x)$ 所组成的, 当然是一个折线函数, 并且属于 $C[0,\ 2\pi]$, 在 $(c,\ d)$ 的外部等于 0, 又从 $|\chi|\leqslant1$, $|g|\leqslant1$ 得到

$$|\psi(x)|\leqslant 2\nu|\gamma|\quad(0\leqslant x\leqslant 2\pi).$$

由于, 当 $x\overline{\in}(a_s,\ a_s')$ 以及 $x\overline{\in}(c_s',\ c_s)$ 时,

$$\varphi(x)-g(x)=0;\quad |\varphi(x)-g(x)|\leqslant1,$$

所以

$$\int_0^{2\pi}|g(t)-\varphi(t)|dt\leqslant\sum\left(\int_{a_s}^{a_s'}dt+\int_{c_s'}^{c_s}dt\right)<2\delta.$$

写着 $\psi^*(x)=\gamma[\chi(x)-\nu\varphi(x)]$, 我们见到

$$\left|\int_0^x[\psi^*(t)-\psi(t)]dt\right|<2|\gamma|\nu\delta<\frac{\varepsilon}{2}\quad(0\leqslant x\leqslant 2\pi).$$

设 $x\leqslant c$, 则 $\psi^*(t)$ 在 $(0,\ x)$ 上的积分等于 0. 当 $c<x$ 时, 必有 $[c_k,\ c_{k+1}]$ 含有 x; 因此, $\psi^*(t)$ 在 $(0,\ x)$ 上的积分等于它在 $(c_k,\ x)$ 上的积分. 由是

$$\left|\int_{c_k}^x\psi^*(t)dt\right|\leqslant|\gamma|\int_{c_k}^{c_{k+1}}\chi(t)dt+\nu|\gamma|\int_{c_k}^{c_{k+1}}\varphi(t)dt$$

$$\leqslant 2\nu\delta|\gamma|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而得到

$$\left|\int_0^x\psi(t)dt\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\quad(0\leqslant x\leqslant 2\pi).$$

从 $(a',\ b')$ 除去的一切 $(a_s,\ c_s)$ 而得点集 E, 由于

$$b'-a'=(d-c)\left(1-\frac{4}{\nu}\right),$$

所以 $|E|>b'-a'-\frac{d-c}{\nu}=(d-c)\left(1-\frac{5}{\nu}\right)$. 在 E 上, $\psi(x)=\gamma$

最后估计积分

$$L_n(\lambda;\ \alpha,\ \beta)=\int_\alpha^\beta \lambda(t)\frac{\sin n(t-x)}{t-x}\,dt.$$

当 $\lambda(t)\ (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 是一线性函数时, $|\lambda(t)|\leqslant M$ 的话, 由第二平均值定理,

$$|L_n(\lambda;\ \alpha,\ \beta)|\leqslant M\left|\int\frac{\sin n(t-x)}{t-x}\,dt\right|\leqslant 4M\pi.$$

函数 $\chi(t)$ 是由五个这样的 $\lambda(t)$ 所组成, $|\chi(t)|\leqslant 1$, 从而

$$\left|\int_0^{2\pi}\chi(t)\,\frac{\sin n(t-x)}{t-x}\,dt\right|\leqslant 20\pi.$$

显然, $L_n(g;0,\ 2\pi)$ 的绝对值小于一个绝对常数 C. 由是

$$|L_n(\psi;0,\ 2\pi)|\leqslant|\gamma|\,[20\pi+\nu C]\leqslant\nu B|\gamma|.$$

引理证明完毕.

【定理 2 的证明】 由于 $f(x)$ 是一有限可测函数, 所以存在如下的连续函数 $\Phi(x)\ (0\leqslant x\leqslant 2\pi)$: 在 $\left(\frac{\sigma}{4},\ 2\pi-\frac{\sigma}{4}\right)$ 中的一个完全点集 P 上, $\Phi(x)=f(x)$, $|P|>2\pi-\frac{3}{4}\sigma$; 在 $\left[0,\ \frac{\sigma}{8}\right]$ 以及 $\left[2\pi-\frac{\sigma}{8},\ 2\pi\right]$ 上 $\Phi(x)=0$; 在 $\left(\frac{\sigma}{8},\ \frac{\sigma}{4}\right)$ 与 $\left(2\pi-\frac{\sigma}{4},\ 2\pi-\frac{\sigma}{8}\right)$ 上, $\Phi(x)$ 是一次的. 假如对于 $\Phi(x)$ 能找到 $\mathfrak{S}[g]$ 匀敛的 $g(x)$, 它在测度大于 $2\pi-\frac{\sigma}{4}$ 的一个点集 E_1 上, 一致收敛于 $\Phi(x)$, 那末在通集 $E=PE_1$ 上,

$$g(x)=\Phi(x)=f(x),$$

并且 $|E|>2\pi-2\times\frac{\sigma}{8}-\frac{2}{4}\sigma-\frac{1}{4}\sigma=2\pi-\sigma$. 由是我们只要对于 $\Phi(x)$ 来证明定理就好了. 换句话说, 证明归结于建立如下的命题: 对于连续函数 $\Phi(x)\ (0\leqslant x\leqslant 2\pi)$, 它在 $[A,\ B]\subset(0,\ 2\pi)$ 的外部等于 0, 存在 $\mathfrak{S}[g]$ 匀敛的 $g(x)$ 满足

$$g(x)=f(x),\quad x\in E,\quad |E|>2\pi-\sigma\quad(\sigma>0).$$

对于连续函数 $\Phi(x)$，存在阶梯函数 $\Phi_m(x)$ 适合

$$\Phi_m(x)=0\ (x\in(0,\ A)+(B,\ 2\pi)),\ |\Phi_m(x)|<4^{-m}\sigma$$

以及 $\sum\limits_1^\infty \Phi_m(x)=\Phi(x)$；这是可能的．固定 m，将区间 $[0,\ 2\pi]$ 分成有限个区间 $\rho_1^{(m)},\ \rho_2^{(m)},\ \cdots,\ \rho_{l_m}^{(m)}$；在每一个 $\rho_j^{(m)}$ 上，$\Phi_m(x)$ 是常数．将

$$\rho_1^{(1)},\ \cdots,\ \rho_{l_1}^{(1)};\ \rho_1^{(2)},\ \cdots,\ \rho_{l_2}^{(2)};\ \cdots;\ \rho_1^{(m)},\ \cdots,\ \rho_{l_m}^{(m)};\ \cdots$$

写成 $\Delta_1,\ \Delta_2,\ \cdots$ 而保留上记的次序．置 $\nu_m=l_1+l_2+\cdots+l_m$，则当 $\nu_{m-1}<s\leqslant\nu_m$ 时，$\Delta_s=\rho_j^{(m)}$，当 $x\in\Delta_s$ 时，$\Phi_m(x)=\gamma_s,\ |\gamma_s|\leqslant4^{-m}\sigma$.

固定 s，将 Δ_s 看做引理中的 $[c,\ d]$，则得引理中的 $\psi(x)=\psi_s(x)$，$\psi_s(x)=0(x\overline{\in}\Delta_s)$，$|\psi_s(x)|\leqslant2\nu|\gamma_s|$．在 Δ_s 中一个点集 E_s 上，$\psi_s(x)=\gamma_s$，

$$|E_s|>|\Delta_s|\left(1-\frac{5}{\nu}\right)>|\Delta_s|\left(1-\frac{\sigma}{2\pi\,2^m}\right),$$

这里我们取 $\nu=2^{m+3}(1+[2\pi/\sigma])$．设 $\varepsilon_s=\varepsilon=(sn_s)^{-2}$，$n_s\uparrow\infty$；则

$$\left|\int_0^x\psi_s(t)dt\right|<(sn_s)^{-2}\quad(0\leqslant x\leqslant2\pi),$$

$$\left|\int_0^{2\pi}\psi_s(t)\frac{\sin n(t-x)}{t-x}dt\right|<\frac{A}{2^m}.$$

在 $\Delta_s(\nu_{m-1}<s\leqslant\nu_m)$ 上，设 $g_m(x)=\psi_s(x)$，则因 $E_s\subset\Delta_s$，

$$g_m(x)=\Phi_m(x).$$

由是可知：$g_m(x)=\Phi_m(x)$ 在 $E=\sum\limits_{m=1}^\infty\sum\limits_{s=\nu_{m-1}+1}^{\nu_m}E_s$ 上成立．由于

$$\left|\sum_{s=\nu_{m-1}+1}^{\nu_m}E_s\right|>\left(1-\frac{\sigma}{2\pi\sigma^m}\right)\sum|\Delta_s|=2\pi\left(1-\frac{\sigma}{2\pi\,2^m}\right),$$

所以 $|E|>2\pi-\sigma$．又因

$$|g_m(x)|\leqslant2\nu|\gamma_s|\leqslant2\cdot2^{m+3}(1+[2\pi/\sigma])\frac{\sigma}{4^m}<\frac{64\pi}{2^m},$$

所以 $g(x)=\sum\limits_{m=1}^\infty g_m(x)$ 是一连续函数．

余下的事是要证明 $\mathfrak{S}[g]$ 匀敛．记 $\mathfrak{S}[g]$ 的部分和为 $S_n(x)$，注意到 $g(x)=\sum g_m(x)=\sum\psi_s(x)$，我们得到

$$S_n(x)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\psi_s(t)\frac{\sin n(t-x)}{t-x}dt+o(1),$$

这里的 $o(1)$ 是与 x 无关的．我们要证 $S_n(x)$ 匀敛于 $g(x)$．

首先决定 $\{n_s\}$．设 $n_1=1$．当 $n_1<n_2<\cdots<n_{k-1}$ 已定时，我们得到折线函数 $\psi_1(x)+\cdots+\psi_{k-1}(x)$ 满足

$$|J_{n_1}(x)+J_{n_2}(x)+\cdots+J_{n_{k-1}}(x)-\psi_1(x)-\cdots-\psi_{k-1}(x)|<\frac{1}{k}$$

$$(0\leqslant x\leqslant 2\pi),$$

这里 $J_{n_s}(x)$ 是上记 $S_n(x)$ 的级数表达式中的第 s 项(是一个积分)．

对于 $\varepsilon>0$，有 k 使 $|\psi_k(x)+\psi_{k+1}(x)+\cdots|<\frac{1}{4}\varepsilon$ 成立．从而

$$\begin{aligned}|S_n(x)-g(x)|&=|\sum J_{n_s}(x)-\sum\psi_s(x)|\\&\leqslant\sum_1^{k-1}|J_{n_s}-\psi_s|+|J_{n_k}|+\left|\sum_{k+1}^{\infty}J_{n_s}\right|+\left|\sum_k^{\infty}\psi_s\right|\\&<\frac{1}{k}+\frac{\varepsilon}{4}+|J_{n_k}(x)|+\sum_{k+1}^{\infty}|J_{n_s}(x)|\\&<\frac{1}{k}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{A}{2^m}+16\sum_{k+1}^{\infty}2^{-s}<\varepsilon\quad(n_k\leqslant n<n_{k+1}).\end{aligned}$$

定理 2 证明完毕．

系 设单调正值函数 $\rho(\delta)$ $(\delta>0)$ 适合于 $\rho(+0)=0$，则对于任一正数 ε，必有测度 $|e|$ 小于 ε 的点集 e，当 $C_{2\pi}$ 中函数 $f(x)$ 的 $\omega(f,\delta)\leqslant\rho(\delta)$ 时，存在函数 $g(x)$，$g(x)=f(x)$ $(x\overline{\in}e)$，$\mathfrak{S}[g]$ 匀敛；但是，e 只与 $\rho(\delta)$ 有关系(孟孝夫，1951 年)，与个别的 $f(x)$ 无关．

1952 年，巴利将定理 1 改进成如下的

定理 3 设 $f(x)\equiv f(x+2\pi)$ 是一有限可测函数，则必有连续函数 $F(x)$，它的导数几乎处处存在而等于 $f(x)$：$F'(x)=f(x)$．并且从 $\mathfrak{S}[F]$ 逐项微分而得的三角级数概敛于 $f(x)$．

在证明定理 3 之前，我们建立几个引理．

引理 1 设 $(a,b)\subset[-\pi,\pi]$，P 是 (a,b) 中的一个完全点集，$|P|=0$．对于 $[-\pi,\pi]$ 上的一个全连续函数 $\Phi(x)$ 和正数 σ，存在连续的有界变差函数 $\chi(x)$ $(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$，具有下列几项性质：

$$\chi(x)=\Phi(x)\quad(x\in[-\pi,\pi]-(a,b)),$$

$$\int_a^b|d\chi(x)|\leqslant\int_a^b|d\Phi(x)|,$$

$$|\Phi(x)-\chi(x)|\leqslant\sigma\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi),$$

函数 $F(x)=\Phi(x)-\chi(x)$ 的富理埃系数是 $o(n^{-1})$.

【证明】 我们知道，对于 $[0, 2\pi]$ 中一个测度为 0 的完全点集，存在单调函数 $g(x)$ 在完全点集的任一余补区间上取常数，并且适合

$$g(0)=0,\quad g(2\pi)=1,\quad \int_0^{2\pi}e^{-inx}dg(x)=o(1)\quad(|n|\to\infty).$$

那末，当 $\Phi(t)$ 在$[\alpha, \beta]$上具有全连续性时，函数

$$\chi(t)=\Phi(\alpha)+g\left(\frac{t-\alpha}{\beta-\alpha}2\pi\right)[\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)]$$

满足下面几个条件：$\chi(\alpha)=\Phi(\alpha)$, $\chi(\beta)=\Phi(\beta)$；在所设的完全点集的任一余补区间上取常数；又从

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}e^{-int}dg(t)=0$$

得到 $\int_\alpha^\beta e^{-int}d\chi(t)=o(1)$. 从而，写着 $F(t)=\Phi(t)-\chi(t)$,

$$n\int_\alpha^\beta F(t)e^{-int}dt=-i\int_\alpha^\beta e^{-int}d\Phi(t)+i\int_\alpha^\beta e^{-int}d\chi(t)=o(1).$$

在这个基础上，将(a, b)分成有限个区间$[x_k, x_{k+1}]$ $(x_0=a,\ x_N=b;\ 0\leqslant k<N)$，使 $\Phi(t)$ 在每个区间上的振幅小于 σ，在 $[x_k, x_{k+1}]$ 作上述的 $\chi(t)$，写做 $\chi_k(t)$,

$$\chi_k(x_k)=\Phi(x_k),\quad \chi_k(x_{k+1})=\Phi(x_{k+1});$$

在$[x_k, x_{k+1}]$中的一个完全点集 P_k 的余补区间上，$\chi_k(t)$ 是常数，然后置

$$\chi(t)=\Phi(t)\quad(t\overline{\in}(a,b)),\quad \chi(t)=\chi_k(t)\quad(x_k\leqslant t\leqslant x_{k+1}).$$

我们见到引理 1 中关于 $\chi(t)$ 的几项性质都成立，并且

$$n\int_{-\pi}^{\pi}[\Phi(t)-\chi(t)]e^{-int}dt$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}n\int_{x_k}^{x_{k+1}}[\Phi(t)-\chi(t)]e^{-int}dt=o(1).$$

引理 1 证毕.

引理 2 设 $[-\varepsilon-a,\ b+\varepsilon]\subset[-\pi,\ \pi]$. 函数 $F(x)\ (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$ 是有界变差, 它在 $C(-\varepsilon-a,\ b+\varepsilon)=[-\pi,\ \pi]-[-\varepsilon-a,\ b+\varepsilon]$ 上等于 0, $\int_a^b|dF|=V$. 记 $\mathfrak{S}[F]$ 的部分和为 $S_n(x)$, 那末当 $x\in C[-\varepsilon-a,\ b+\varepsilon]$ 时,

$$|S_n'(x)|\leqslant V/2\varepsilon.$$

【证明】 对于正数 η, 作折线函数 $v_n(x)$ 使它适合 $v_n(a)=F(a)$, $v_n(b)=F(b)$,

$$|F(t)-v_n(t)|<\frac{\eta}{n^2}\quad(a\leqslant t\leqslant b).$$

由于 $D_n(t)=\frac{1}{2}+\cos t+\cdots+\cos nt$ 满足 $|D_n'(t)|\leqslant n^2$, 所以

$$S_n'(x)=-\frac{1}{\pi}\int_a^b[F(t)-v_n(t)]\frac{d}{dt}D_n(t-x)dt$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_a^b v_n(t)\frac{d}{dt}D_n(t-x)dt$$

的右端第一个积分的绝对值小于 2η. 当 $x\in C[-\varepsilon-a,\ b+\varepsilon]$ 时, $|D_n(t-x)|$ 小于 $\frac{\pi}{2\varepsilon}$ $(a\leqslant t\leqslant b)$, 从而

$$\left|-\frac{1}{\pi}\int_a^b v_n(t)\frac{d}{dt}D_n(t-x)dt\right|=\left|\frac{1}{\pi}\int_a^b v_n'(t)D_n(t-x)dt\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{2\varepsilon}\int_a^b|v_n'(t)|dt,$$

最后的积分可使它不超过 $F(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上的全变差 V, 由是我们得到 $|S_n'(x)|<2\eta+V/2\varepsilon$. 令 $\eta\to0$, 即得 $|S_n'(x)|\leqslant V/2\varepsilon$. 证毕.

引理 3 设 $\varphi(x)\in L(-\pi,\ \pi)$, $[-\varepsilon-a,\ b+\varepsilon]\subset[-\pi,\ \pi]$, 当 $x\overline{\in}(a,\ b)$ 时, $\varphi(x)=0$. 在这个情况下, 对于正数 σ, 在 $[-\pi,\ \pi]$ 上存在 $\varphi(x)$ 的原函数 $F(x)$, $|F(x)|\leqslant\sigma\ (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$, $F(x)$ 在 $(a,\ b)$ 的外部等于 0, $\mathfrak{S}(\varphi)$ 与 $\mathfrak{S}'(F)$ 几乎处处等敛于 0 (这就是说, 几乎处处成立着 $S_n(\varphi,\ x)-S_n'(F,\ x)=o(1)$). 当 $x\in[-\pi,\pi]-(-\varepsilon-a,b+\varepsilon)$ 时, $\mathfrak{S}(F)$ 的部分和 $S_n(x)=S_n(F,\ x)$ 满足

$$|S_n'(x)| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int_a^b |\varphi(x)|dx.$$

【证明】 对于全连续函数 $\Phi(x)=\int_{-\pi}^{x}\varphi(t)dt$, 作成 $\chi(x)$ 使它满足引理 1 的条件, 记 $F(x)=\Phi(x)-\chi(x)$. 由于 $\chi'(t)$ 在 $[a, b]$ 上概等于 0, 所以

$$F'(x)=\Phi'(x)=\varphi(x)$$

在 (a, b) 上几乎处处成立. 当 $x\overline{\in}[a, b]$ 时, $\chi(x)=\Phi(x)$, 从而 $F(x)=0$; 但是此时 $\varphi(x)=0$, 我们见到 $F'(x)=\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 的外部几乎处处成立. 由是 $F'(x)\doteq\varphi(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上成立. $|F(x)|\leqslant\sigma$ 以及

$$F(x)=0 \quad (x\overline{\in}(a, b))$$

是引理 1 的结果.

由引理 1, $\mathfrak{S}[F]$ 的系数是 $o(n^{-1})$, 从而 $\mathfrak{S}'(F)$ 的系数是 $o(1)$. 由是三角级数 $\mathfrak{S}[\varphi]-\mathfrak{S}'(F)$ (项项相减而得)的系数是 $o(1)$, 将这个级数, 施行两次逐项积分而得黎曼函数 $\Psi(x)$, $\Psi(x)$ 是 $\Phi(x)-F(x)$ 的不定积分 (可能差一个线性函数). 由于 $\chi(t)$ 在完全点集 P 的余补区间 δ_n 取常数, 所以 $\Psi(x)$ 在 δ_n 上是一次函数. 因此, 三角级数 $\mathfrak{S}[\varphi]-\mathfrak{S}'(F)$ 在 δ_n 上的黎曼和等于 0. 由于 $|P|=0$, 所以这个三角级数概敛于 0. 在(a, b)的外部 $\varphi(x)$ 是 0, $\Phi(x)$ 是常数, $F(x)$ 是 0; 因此, 所论的三角级数在 (a, b) 的外部收敛于 0. 由是 $\mathfrak{S}(\varphi)$ 与 $\mathfrak{S}'(F)$ 几乎处处等敛于 0.

又由引理 1, 在$[a, b]$上的全变差, χ 的不大于 Φ 的: $V(\chi)\leqslant V(\Phi)$. 从而

$$V(F)\leqslant V(\Phi)+V(\chi)\leqslant 2V(\Phi)\leqslant 2\int_a^b|\varphi(t)|dt.$$

利用引理 2, 我们得到 $|S_n'(x)|\leqslant\int_a^b|\varphi(t)|dt/\varepsilon$. 引理 3 证毕.

引理 4 对于有限可测函数 $f(x)\,(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$, 存在两两不相交的疏朗完全集序列 $P_1, P_2, \cdots$, $|P_1+P_2+\cdots|=2\pi$; 在 P_ν 上, $f_\nu(x)=f(x)$, $f_\nu(x)$ 具有在 $[-\pi, \pi]$ 上匀敛的 $\mathfrak{S}[f_\nu]$.

【证明】 这个引理可以从孟孝夫的定理(定理 2)导出. 设疏朗完全点集 P_1 的 $|P_1|>0$, 在 P_1 上 $f_1(x)=f(x)$, $\mathfrak{S}[f_1]$ 在 $[-\pi, \pi]$ 匀敛. 假如两两不交的疏朗完全点集 $P_1, P_2, \cdots, P_k$ 已经决定, $f_\nu(x)=f(x)$ 在 P_ν 上成立, $\mathfrak{S}[f_\nu](\nu=1, \cdots, k)$ 都在 $[-\pi, \pi]$ 上匀敛, 并且 $C(P_1+\cdots+P_{k-1})$ 还不是零集, 那末其中必有疏朗完全点集 P_{k+1}, P_{k+1} 与 $P_1+\cdots+P_{k-1}$ 不相交, 在 P_{k+1} 上, $f_{k+1}(x)=f(x)$, $\mathfrak{S}[f_{k+1}]$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上匀敛, $|P_{k+1}|>|C(P_1+\cdots+P_k)|-\frac{1}{k+1}$. 由是 $|\sum P_k|=2\pi$, $\{P_k\}$ 是所要的完全点集序列. 引理证毕.

为了证明定理 3, 我们先将引理 4 中的 $P_k(k=1, 2, \cdots)$ 变成有限个区间. 设 $P_\mu^{(m)}$ 是由有限个区间所组成的点集: $P_\mu^{(m)}\subset P_\mu^{(m-1)}$, 一切 $P_\mu^{(m)}$ 含有 P_μ, $P_\mu^{(m)}\cdot P_{\mu'}^{(m)}=0(\mu\neq\mu')$. 设

$$g_m(x)=f_\mu(x)\quad (x\in P_\mu^{(m)},\ m\geqslant\mu\geqslant 1),$$

$$g_m(x)=0\quad (x\overline{\in} P_1^{(m)}+P_2^{(m)}+\cdots+P_m^{(m)}).$$

我们可证

$$\lim_{m\to\infty} g_m(x)=f(x)\quad (x\in \sum_1^\infty P_k),$$

从而 $\{g_m(x)\}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上概敛于 $f(x)$. 事实上, 当 $x\in\sum P_k$ 时, x 必属于某一 $P_\mu^{(m)}(m\geqslant\mu)$, 从而 $g_m(x)=f_\mu(x)=f(x)$.

其次将 $\{g_m(x)\}$ 代以如下的 $\{\varphi_\nu(x)\}$: 使在 $\sum P_\mu$ 上, 成立着

$$f(x)=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\cdots.$$

置 $\Psi_1(x)=g_1(x)$, $\Psi_m(x)=g_m(x)-g_{m-1}(x)\ (m>1)$, 则在 $\sum P_\mu$ 上, 成立着

$$f(x)=\Psi_1(x)+\Psi_2(x)+\cdots.$$

容易明白, $\Psi_m(x)$ 在点集 $E_m=P_m^{(m)}+\sum_{\mu=1}^{m-1}(P_\mu^{(m-1)}-P_\mu^{(m)})$ 的外部等于 0. 点集 E_m 与和集 $P_1+P_2+\cdots+P_m$ 是不相交的. 取适当的 $P_\mu^{(m)}$, 可使闭集 $\overline{E}_m$ 与和集 $P_1+P_2+\cdots+P_{m-1}$ 无交点($\overline{E}_m-E_n$ 只包含有限个点, 都是 E_m 中区间的端点). 因此, E_m 与 $P_1+\cdots+P_{m-1}$ 的距离

$$r_m=r(E_m,\ P_1+\cdots+P_{m-1})>0.$$

由于 $|P_1+\cdots+P_{m-1}|\to 2\pi$, 所以 $r_m\to 0$.

记 $E_1=P_1^{(1)}$. 设 $\overline{E}_m$ 是由区间 $\Delta_{\nu_{m-1}}$, $\Delta_{\nu_{m-1}+1}$, $\cdots$, $\Delta_{\nu_m}(m=1,2,\cdots)$ 所组成 $|\Psi(x)|(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$ 小于正数 γ_m,

$$|\Delta_\nu|<\frac{r_m}{m\gamma_m}\quad(\nu_{m-1}<\nu\leqslant\nu_m)\ (m>1).$$

由是, 当 $t\in\Delta_\nu(\nu_{m-1}<\nu\leqslant\nu_m)$, $x\in P_1+\cdots+P_{m-1}$ 时, $|t-x|\geqslant r_m$. 设 $\nu_{m-1}<\nu\leqslant\nu_m$, 置

$$\varphi_\nu(x)=\Psi_m(x)\quad(x\in\Delta_\nu),\quad\varphi_\nu(x)=0\quad(x\overline{\in}\Delta_\nu),$$

则 $\Psi_m(x)=\varphi_{\nu_{m-1}+1}(x)+\cdots+\varphi_{\nu_m}(x)$, 从而 $f(x)=\sum\limits_1^\infty\varphi_\nu(x)$ 在 $\sum P_\mu(x)$ 上成立. 这里我们还要注意: 对于 $(\nu_{m-1},\nu_m]$ 中不同的两个整数 ν 和 ν', $\varphi_\nu(x)\varphi_{\nu'}(x)=0$; 另一方面

$$\left|\int_{\Delta_\nu}\varphi_\nu(x)dx\right|\leqslant\gamma_m|\Delta_\nu|<\frac{r_m}{m}.$$

$\varphi_\nu(x)$ 的富理埃级数 $\mathfrak{S}[\varphi_\nu]$ 在 $[-\pi,\pi]$ 中除开有限个点,是收敛的,这是从 $\mathfrak{S}[f_\mu]$, $\mathfrak{S}[g_k]$, $\mathfrak{S}[\Psi_m]$ 的性质逐次遗传过来的性质.

在这个基础上,我们就能作出下述函数列 $\{F_\nu(x)\}$:

引理 5 设 $n_\nu\uparrow\infty$, $h_\nu\downarrow 0$, $2^\nu\sigma_\nu=\min(n_\nu^{-2},h_\nu)$, 则必存在有界变差的连续函数 $F_\nu(x)(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$ 几乎处处满足 $F'_\nu(x)=\varphi_\nu(x)$, 并且

$$|F_\nu(x)|\leqslant\sigma_\nu\ (-\pi\leqslant x\leqslant\pi),\quad F_\nu(x)=0\ (x\overline{\in}\Delta_\nu),$$

$$S'_n(F_\nu,x)\to\varphi_\nu(x)\quad(\text{除开一个零集});$$

当 $x\in P_1+\cdots+P_{m-1}$, $\nu_{m-1}<\nu<\nu_m$ 时, $|S'_n(F_\nu,x)|\leqslant m^{-1}$.

【证明】 由引理 3, 对于 $\varphi(x)$ 有 $F(x)$; 这里对于 $\varphi_\nu(x)$, 存在 $F_\nu(x)$ 如引理 5 所述,但是我们还要证明

$$|F'_n(F_\nu,x)|\leqslant m^{-1}\ (x\in P_1+\cdots+P_{m-1};\ \nu_{m-1}<\nu\leqslant\nu_m).$$

由于 $r_m=r(E_m,P_1+\cdots+P_{m-1})$, 所以当 $t\in\Delta_\nu(\nu_{m-1}<\nu\leqslant\nu_m)$ 时,

$$r(\Delta_\nu,P_1+\cdots+P_{m-1})\geqslant r_m;$$

由引理 3, 当 $x\in P_1+\cdots+P_{m-1}$ 时,

$$|S'_n(F_\nu,x)|\leqslant\frac{1}{r(x,\Delta_\nu)}\int_{\Delta_\nu}|\varphi_\nu(t)|dt\leqslant\frac{1}{m}.$$

【定理 3 的证明】 级数 $F(x)=F_1(x)+F_2(x)+\cdots$ 是匀敛的, 事

实上，由引理5，$|F_\nu(x)|\leqslant\sigma_\nu\leqslant2^{-\nu}$. 由是，从

$$S'_n(F,\ x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(t)\left[\frac{d}{dt}\ D_n(t-x)\right]dt$$

得到 $S'_n(F,\ x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}S'_n(F_\nu,\ x)$.

设 $n_1=1,\ h_1=2\pi$; 用完全归纳法，我们决定 $n_k\uparrow\infty,\ h_k\downarrow0$. 假如当 $\nu<k$ 时，$n_1,\ \cdots,\ n_{k-1}$ 和 $h_1,\ \cdots,\ h_{k-1}$ 都已决定，并且适合条件

$$h_\nu\leqslant\frac{1}{2}\,r_m\quad(\nu_{m-1}<\nu\leqslant\nu_m,\ m>1),$$

$$r_m=r(E_m,\ P_1+\cdots+P_{m-1})>0;$$

$$\sigma_\nu2^\nu=\min(n_\nu^{-2},\ h_\nu).$$

对于这些由引理5所给的 $F_\nu(x)$，利用 Д. Ф. 耶各洛夫 (Егоров) 的定理，我们见到$[-\pi,\ \pi]$中有点集 M_k，$|M_k|>2\pi-k^{-2}$，在 M_k 上，成立着

$$|S'_n(F_\nu,\ x)-\varphi_\nu(x)|<\frac{1}{k^2}\quad(\nu=1,\ 2,\ \cdots,\ k-1).$$

取 $n_k>n_{k-1}$，使当 $n\geqslant n_k$ 时，这些不等式成立. 因此，

$$\sum_{\nu=1}^{k-1}|S'_n(F_\nu,\ x)-\varphi_\nu(x)|<\frac{1}{k}\quad(n\geqslant n_k,\ x\in M_k).$$

等式 $F'_\nu(x)=\varphi_\nu(x)$ 几乎处处成立，由耶各洛夫定理，存在点集 $\mathscr{E}_k$，$|\mathscr{E}_k|>2\pi-k^{-2}$，在 $\mathscr{E}_k$ 上，不等式

$$\left|\frac{F_\nu(x+h)-F_\nu(x)}{h}-\varphi_\nu(x)\right|<\frac{1}{k^2}\quad(|h|\leqslant h_k)$$

成立. 因此，当 $x\in\mathscr{E}_k$，$|h|\leqslant h_k$ 时，

$$\sum_{\nu=1}^{k-1}\left|\frac{F_\nu(x+h)-F_\nu(x)}{h}-\varphi_\nu(x)\right|<\frac{1}{k};$$

这里 $h_k<h_{k-1}$，$2h_k<r_m$，$\nu_{m-1}<k\leqslant\nu_m$. 然后我们决定 $F_k(x)$，使它具备类似于 $F_\nu(x)\,(\nu<k)$ 的性质.

置 $E=\varliminf_{k\to\infty}M_k\cdot\varliminf_{k\to\infty}\mathscr{E}_k\cdot\sum_{\mu=1}^{\infty}P_\mu$，则 $|E|=2\pi$. 现在证明 $F'(x)=f(x)$ 在 E 上成立，$\mathfrak{S}'(F,\ x)$ 概敛于 $f(x)$.

设 $x\in E$, 则有 k_0, 当 $k>k_0$ 时, $x\in M_k$, $x\in \mathscr{E}_k$, $x\in P_1+\cdots+P_{m-1}$; $\frac{1}{m}<\varepsilon$, $\frac{1}{k}<\varepsilon$; $n_k\leqslant n<n_{k+1}$,

$$|f(x)-\varphi_1(x)-\cdots-\varphi_{k-1}(x)|<\varepsilon.$$

由是, $|S'_n(F, x)-f(x)|\leqslant|S'_n(F, x)-\varphi_1(x)-\cdots-\varphi_{k-1}(x)|+\varepsilon$. 利用 $S_n(F)=\sum S'_n(F_\nu)$, 我们见到

$$|S'_n(F, x)-f(x)|<\sum_{\nu=1}^{k-1}|S'_n(F_\nu, x)-\varphi_\nu(x)|+|S'_n(F_k, x)|$$

$$+\sum_{\nu=k+1}^{\infty}|S'_n(F_\nu, x)|+\varepsilon$$

$$<\frac{1}{k}+\frac{1}{m}+\frac{n^2}{\pi}\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|F_\nu(x)|dx+\varepsilon<4\varepsilon,$$

事实上,第三项小于 $2n_{k+1}^2(2^{-k-1}n_{k+1}^{-2}+\cdots)<2^{1-k}<\varepsilon$. 这就证明: $\mathfrak{S}[F]$ 的逐项微分级数概敛于 $f(x)$.

最后证明 $F'(x)$ 几乎处处等于 $f(x)$. 设 $h\neq 0$, 则

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{F_\nu(x+h)-F_\nu(x)}{h}.$$

对于 $\varepsilon>0$, 取 k_0, m, k 如上述. 当 $x\in\mathscr{E}_k$ 时, 上式左端与 $f(x)$ 的差小于

$$\sum_{\nu=1}^{k-1}\left|\frac{F_\nu(x+h)-F_\nu(x)}{h}-\varphi_\nu(x)\right|+\left|\frac{F_k(x+h)-F_k(x)}{h}\right|$$

$$+\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\left|\frac{F_\nu(x+h)-F_\nu(x)}{h}\right|+\varepsilon.$$

当 $|h|<h_k$ 时,第一项小于 $\frac{1}{k}$. 由于 x 和 $x+h$ 都属于 Δ_k, 所以第二项等于 0. 第三项小于

$$\frac{2}{h_{k+1}}\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\sigma_\nu<\frac{2}{h_{k+1}}\sum_{k+1}^{\infty}\frac{h_\nu}{2^\nu}\leqslant 2\sum_{k+1}^{\infty}\frac{1}{2^\nu}<\varepsilon.$$

总结起来,我们得到

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right|<3\varepsilon.$$

从而 $F'(x)=f(x)$ 在 E 上成立. 定理证明完毕.

6. 正测度点集上取 $\pm\infty$ 的可测函数

从前节知道，对于有限可测函数，有三角级数概敛于它. 那末对于任意的可测函数 $f(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$，特别是在正测度的点集 $E\subset[0,2\pi]$ 上，$f(x)=+\infty$ (或是 $-\infty$) 的话，是否有三角级数"概向"于它？详细地说，是否存在 $\{\alpha_n,\ \beta_n\}$，使三角多项式

$$S_n(x)=\sum_{0}^{n}(\alpha_\nu\cos\nu x+\beta_\nu\sin\nu x)$$

在 E 上几乎处处成立着

$$S_n(x)\to+\infty,$$

在 $[0,2\pi]-E$ 上，$\lim S_n(x)$ 概敛于 $f(x)$？我们简称这种情况为**概向**.

另一方面，本着孟孝夫的想法，我们引入"度量概向于上(下)限"的定义. 设 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\cdots$ 都是区间 $[a,\ b]$ 上的有限可测函数，除开一个零集中的点，函数值都是有限的. 假如有可测函数 $F(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$，对于 $[a,\ b]$ 上的任一可测函数 $\varphi(x)$ 使点集

$$(f_n(x)>\varphi(x))\cdot(\varphi(x)>F(x))$$

的测度是 $o(1)$：$\lim|(f_n(x)>\varphi(x))\cdot(\varphi(x)>F(x))|=0$；当 $|(F(x)>\varphi(x))|>0$ 时，

$$\limsup_{n\to\infty}|(f_n(x)>\varphi(x))\cdot(F(x)>\varphi(x))|>0,$$

那末称 $F(x)$ 是 $\{f_n(x)\}$ 的**度量的上限**，函数列 $\{f_n\}$ 度量概向于上限 $F(x)$；简记作 $f_n(x)\sup\Rightarrow F(x)$. 假如有可测函数 $G(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ 对于任一可测函数 $\psi(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ 使

$$\lim_{n\to\infty}|(f_n(x)<\psi(x))\cdot(\psi(x)<G(x))|=0,$$

当 $|(G(x)<\psi(x))|>0$ 时，$\limsup|(f_n(x)<\psi(x))\cdot(G(x)<\psi(x))|>0$，那末称 $G(x)$ 是 $\{f_n(x)\}$ 的**度量的下限函数**. 简记

$$f_n(x)\inf\Rightarrow G(x).$$

假如 $f_n(x)=g_n(x)+\alpha_n(x)$，$g_n(x)\to f(x)$ ("$\to$"是"概敛于"的记号)，$\alpha_n(x)\Rightarrow 0$ (这是 $|(\alpha_n(x)\neq 0)|=o(1)$ 的简记)，那末说：$\{f_n(x)\}$

度量概向于 $f(x)$，简记为 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$．下述一系列的结果都是孟孝夫所建立(详见他的专著"三角级数的度量收敛"，斯捷克洛夫数学研究所丛书 XXXII，1950)．

可测函数列的度量上限，度量下限以及度量极限之间成立如下的基本事实；$f_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 都是在 $[a, b]$ 上的有限可测函数：

I．必有 $F(x)$ 适合 $f_n(x)\sup\Rightarrow F(x)$．

II．假如 $f_n(x)\sup\Rightarrow F_1(x)$，$f_n(x)\sup\Rightarrow F_2(x)$，那末 $F_1(x)\doteq F_2(x)$．

III．设 $f_n(x)\sup\Rightarrow F(x)$，$f_n(x)\inf\Rightarrow G(x)$，则 $G(x)\leqslant F(x)$．

IV．设 $G(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ 是可测的，则 $f_n(x)\inf\Rightarrow G(x)$ 的充要条件是 $-f_n(x)\sup\Rightarrow -G(x)$．

V．设 $f_n(x)\sup\Rightarrow F(x)$，则 $F(x)\leqslant\limsup f_n(x)$．

VI．假如 $f_n(x)\inf\Rightarrow G_1(x)$，$f_n(x)\inf\Rightarrow G_2(x)$，那末 $G_1(x)\doteq G_2(x)$．

VII．设 $f_n(x)\inf\Rightarrow G(x)$，则 $G(x)\leqslant\liminf f_n(x)$．

VIII．设 $f_n(x)\begin{matrix}\sup\\ \inf\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}F(x)\\ G(x)\end{matrix}$，则 $f_n(x)=g_n(x)+\alpha_n(x)$，

$$\lim\begin{matrix}\sup\\ \inf\end{matrix} g_n(x)=\begin{matrix}F(x)\\ G(x)\end{matrix},\quad \alpha_n(x)\Rightarrow 0.$$

在这些事实的基础上，孟孝夫建立了下述

基本引理　设 $F_0(x)$，$F_1(x)$ 以及 $f_1(x)$，$f_2(x)$，…都是 $[-\pi, \pi]$ 上的可测函数，对于任一 $f_m(x)$，几乎处处成立着

$$-F_1(x)\leqslant f_m(x)\leqslant F_0(x).$$

则必存在系数为 $o(1)$ 的三角级数——记它的部分和为 $S_n(x)$ $(n=2, 3, \cdots)$，$S_1(x)=0$——及连续函数列 $h_1(x)$，$h_2(x)$，…$(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$ 适合

$$S_n(x)\sup\Rightarrow F_0(x),\qquad S_n(x)\inf\Rightarrow -F_1(x).$$

当 $n_k\uparrow\infty$ 时，假如 $-F_1(x)$ 和 $F_0(x)$ 不是 $\{S_{n_k}(x)\}$ 的度量上限与度量下限，那末存在 $\{h_{p_k}(x)\}$ $(p_k\uparrow\infty)$ 适合

$$h_{p_k}(x)-S_{n_k}(x)\Rightarrow 0\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

对于 $\{h_m(x)\}$，存在 $\{S_{\nu_m}(x)\}$ 适合

$$\lim_{m\to\infty}\{h_m(x)-S_{\nu_m}(x)\}\doteq 0;$$

并且 $\{h_m(x)\}$ 与 $\{f_m(x)\}$ 等度概敛；这就是说，当 $h_m(x)$ 和 $f_m(x)$ 在 x 取有限值时，$h_m(x)-f_m(x)\to 0$；假如 $h_m(x)\to+\infty$，$f_m(x)\to+\infty$ 都成立，那末说 $\{h_m(x)\}$ 和 $\{f_m(x)\}$ 在此 x 等度收敛；当 $h_m(x)=-\infty$，$f_m(x)=-\infty$ 时，也是这样说.

基本引理的证明，很占篇幅，这里从略.

通过上述的基本事实以及基本引理，我们可以证明下面的定理：

定理 1 对于任一可测函数 $f(x)\,(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$，函数值 $f(x)$ 在一正测度的点集上，可以为 $+\infty$，在另一正测度的点集上，可以为 $-\infty$，同时，取有限值的点集也可以为正测度；存在三角级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

度量概向于 $f(x)$，这就是说，它的部分和的叙列

$$S_n(x)=\sum_{m=1}^{n}(a_m\cos mx+b_m\sin mx)\quad(m=1,\ 2,\ \cdots)$$

度量概向于 $f(x)$，并且

$$a_n=o(1),\quad b_n=o(1).$$

定理 1 是下述定理 2 的特殊情况.

定理 2 设函数 $F(x)$，$G(x)$，$\psi_1(x)$，$\psi_2(x)$，$\cdots$，$\psi_p(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上都是可测的，并且几乎处处成立着

$$G(x)\leqslant\psi_\nu(x)\leqslant F(x)\quad(\nu=1,\ 2,\ \cdots,\ p),$$

则必有系数为 $o(1)$ 的三角级数，它的部分和 $S_n(x)$ 满足

$$S_n(x)\sup\Rightarrow F(x),\quad S_n(x)\inf\Rightarrow G(x);$$

对于 $\psi_\nu(x)(\nu=1,2,\cdots,p)$分别有 $n_k(\nu)(k=1,2,\cdots;\ \nu=1,2,\cdots,p)$适合

$$\lim_{k\to\infty}S_{n_k(\nu)}(x)\doteq\psi_\nu(x).$$

假如在点集 $E\subset[-\pi,\pi]$ 上 $\lim S_{n_k}(x)$ 概敛于 $\psi(x)$，$|E|>0$，那末在 E 上，$\psi(x)$ 概等于某一 $\psi_\nu(x)\,(\nu=1,\ 2,\ \cdots,\ p)$.

定理 1 也可以从下述定理 3 导出.

定理 3　设 $F(x)$ 和 $G(x)$ 是 $[-\pi, \pi]$ 上的可测函数, $G(x) \leqslant F(x)$, 则必有系数为 $o(1)$ 的三角级数, 它的部分和 $S_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 满足如下的条件: 对于几乎处处满足 $G(x) \leqslant \psi(x) \leqslant F(x)$ 的可测函数, 必有 $S_{n_k}(x)$ 概敛于 $\psi(x)$, 并且

$$S_n(x)\sup\Rightarrow F(x), \quad S_n(x)\inf\Rightarrow G(x).$$

【定理 2 的证明】　将 $F(x)$ 与 $G(x)$ 分别看成基本引理中的 $F_0(x)$ 与 $-F_1(x)$, 我们得到系数为 $o(1)$ 的三角级数, $F(x)$ 和 $G(x)$ 分别成为它的部分和 $S_n(x)$ 的度量上、下极限:

$$S_n(x)\sup\Rightarrow F(x), \quad S_n(x)\inf\Rightarrow G(x).$$

取 $\{f_m(x)\}$ 如下: 任一 $f_m(x)$ 等于某一 $\psi_\nu(x)$, 但是有无数个 $f_m(x)$ 适合于 $f_m(x)=\psi_\nu(x)$——ν 是 $1, 2, \cdots, p$ 中的一个数; 任一 $\psi_\nu(x)$ 有无数个 $f_m(x)$ 等于 $\psi_\nu(x)$, 但 $\nu=1, 2, \cdots, p$. 由是 $G(x) \leqslant f_m(x) \leqslant F(x)$. 由基本引理, 存在连续数列 $\{h_m(x)\}$ 满足引理中一切条件.

特别是: $\{h_m(x)\}$ 有子列概敛 (包括 $+\infty$ 或是 $-\infty$ 的情况) 于 $\psi_\nu(x)$ $(\nu=1, 2, \cdots, p)$. 但是由于 $\{S_n(x)\}$ 中有子列概敛于 $h_m(x)$, 所以 $\{S_n(x)\}$ 有子列概敛于 $\psi_\nu(x)$ $(\nu=1, 2, \cdots, p)$.

最后, $\{S_n(x)\}$ 的某一子列 $\{S_{n_k}(x)\}$ 在正测度的点集 E 上概敛于 $\psi(x)$ 的话, 我们要证 $\psi(x)$ 必须是一个 $\psi_\nu(x)$ $(\nu=1, 2, \cdots, p)$. 当 $S_{n_k}(x)\Rightarrow\psi(x)$ 在 E 上成立时, 必须实现下述两种情况的一种:

第一种情况:

$$S_{n_k}(x)\inf\Rightarrow G(x), \; S_{n_k}(x)\sup\Rightarrow F(x) \quad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi).$$

第二种情况: 存在 $p_k \uparrow \infty$ 使 $h_{p_k}(x) - S_{p_k}(x) \Rightarrow 0 \quad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$.

当第二种情况出现时, $\{p_k\}$ 和 $\{n_k\}$ 分别有子列 $\{q_k\}$ 和 $\{m_k\}$ 适合于

$$\lim_{k\to\infty} \{h_{q_k}(x) - S_{m_k}(x)\} \doteq 0 \quad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi).$$

我们不妨假设(对于 q_k 的假设)一切 $f_{q_k}(x)$ 都是 $\psi_\nu(x)$ (一定的 ν). 从而得到

$$\lim_{k\to\infty} S_{m_k}(x) \doteq \psi_\nu(x) \quad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi).$$

由是可知 $\psi(x) \doteq \psi_\nu(x)$ 在 E 上成立。

在第一种情况，我们从基本事实(V)与(VII)，得到

$$\liminf_{k\to\infty} S_{n_k}(x) \leqslant G(x) \leqslant F(x) \leqslant \limsup_{k\to\infty} S_{n_k}(x),$$

这是在 $[-\pi, \pi]$ 上几乎处处成立的．结合到 $S_{n_k}(x) \to \psi(x)$，我们得着

$$G(x) \doteq \psi(x) \doteq F(x) \quad (x\in E).$$

从而得到 $\psi(x) \doteq \psi_\nu(x)$ $(\nu=1, 2, \cdots, p;\ x\in E)$．定理 2 证明完毕。

【定理 3 的证明】 对于 $G(x) \leqslant F(x)$ $(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$ 的可测函数 $G(x)$ 与 $F(x)$，我们要证存在着系数为 $o(1)$ 的三角级数，它的部分和适合

$$S_n(x)\inf \Rightarrow G(x), \quad S_n(x)\sup \Rightarrow F(x);$$

当可测函数 $\psi(x)$ 介在 $G(x)$ 与 $F(x)$ 之间时，有 $S_{n_k}(x) \to \psi(x)$.

首先证明：对于 $\psi(x)$，必有连续函数列 $\{g_k(x)\}$ 概敛于它：

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) \doteq \psi(x) \quad (-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

将 $[-\pi, \pi]$ 分为三个点集 $E+E_{+\infty}+E_{-\infty}$，在 E 上 $\psi(x)$ 是一有限函数，

$$\psi(x) = +\infty \ (x\in E_{+\infty}), \quad \psi(x) = -\infty \quad (x\in E_{-\infty}).$$

三个点集，可能有的是空集．对于正整数 m，于 E, $E_{+\infty}$, $E_{-\infty}$ 中，分别取完全点集 P_m, P_m^+, P_m^- 使 $-\pi$ 和 π 都不属于 $P_m+P_m^++P_m^-$，在 P_m 上，$\psi(x)$ 是连续的(卢金的定理)，

$$|P_m| > |E| - \frac{1}{m^2}, \quad |P_m^{\pm}| > |E_{\pm\infty}| - \frac{1}{m^2}.$$

我们于 $[-\pi, \pi]$ 上，作连续函数 $g_m(x)$ 如下：

$$g_m(x) = \psi(x) \ (x\in P_m), \quad g_m(x) = \pm m \quad (x\in P_m^{\pm}),$$

在 $P_m+P_m^++P_m^-$ 的余区间上，$g_m(x)$ 是线性的，$g_m(\pm\pi)=0$．极限点集 $E=\liminf\limits_{m\to\infty}(P_m+P_m^++P_m^-)$ 的测度等于 2π。当 $x\in E$ 时，存在 m_x，当 $m>m_x$ 时，x 属于 $P_m+P_m^++P_m^-$，由是可知 $\{g_k(x)\}$ 是满足所述的条件的。

设由分点 $x_\nu^{(N)} = -\pi + \frac{\nu}{N} 2\pi$ $(\nu=0, 1, \cdots, N)$ 将 $[-\pi, \pi]$ 分成 N

个小区间. 置 $N=p_m$, 在 $x_{\nu-1}^{(p_m)}<x\leqslant x_\nu^{(p_m)}$ 上, 定义 $\varphi_m(x)$ 等于有理数 $r_\nu^{(m)}(\nu=1, 2, \cdots, p_m)$; $\varphi_m(-\pi)=r_1^{(m)}$. 这样就得到 $[-\pi, \pi]$ 上的有限函数列 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\cdots$. 其次定义 $\{f_m(x)\}$: 当 $G(x)\leqslant\varphi_m(x)\leqslant F(x)$ 时, 设 $f_m(x)=\varphi_m(x)$. 假如 $\varphi_m(x)<G(x)$, 那末定义 $f_m(x)=G(x)$. 当 $\varphi_m(x)>F(x)$ 时, 定义 $f_m(x)=F(x)$. 由是,

$$G(x)\leqslant f_m(x)\leqslant F(x)$$

在 $[-\pi, \pi]$ 上几乎处处成立.

在如上的情况下, 将 $G(x)$, $F(x)$ 分别看做 $-F_1(x)$, $F_0(x)$. 由是得到基本引理中的 $\{h_m(x)\}$, 系数为 $o(1)$ 的三角级数, 以及 $\{n_k\}$, $\{p_k\}$ 和 $\{\nu_m\}$. 基本引理证明了定理 3 的一部分结果. 我们还要证明 $\psi(x)$ 是 $\{S_n(x)\}$ 的某一子列的极限函数.

我们见到 $[-\pi, \pi]$ 中的 x, 几乎处处满足下记情况的一种:

$$\varphi_m(x)\leqslant f_m(x)\leqslant\psi(x),\quad \psi(x)\leqslant f_m(x)\leqslant\varphi_m(x).$$

由于 $g_k(x)$ 的连续性, 存在自然数 N_k, 使当 $[-\pi, \pi]$ 的两点 x 和 x' 的距离小于 $N_k^{-1}\cdot 2\pi$ 时,

$$|g_k(x)-g_k(x')|<\frac{1}{k}.$$

其次定义自然数序列 $\mu_1, \mu_2, \cdots$: $\mu_1=1$, $\mu_1<\mu_2<\cdots$. 置

$$N_k'=\max(N_k, p_1, p_2, \cdots, p_{\mu_{k-1}}).$$

设不等式 $|r_\nu^{(\mu_k)}-g_k(x_\nu^{(N_k')})|<\dfrac{1}{k}$ 当 $\nu\leqslant N_k'$ 时成立, 则当

$$x_{\nu-1}^{(N_k')}\leqslant x\leqslant x_\nu^{(N_k')},\quad \nu\leqslant N_k',\ k>1$$

时, $|g_k(x)-r_\nu^{(\mu_k)}|<\dfrac{2}{k}$, 并且

$$|g_k(x)-g_k(x_\nu^{(N_k')})|<\frac{1}{k}.$$

由是, 从 $|g_k(x)-\varphi_{\mu_k}(x)|<\dfrac{2}{k}$ $(-\pi\leqslant x\leqslant\pi,\ k>1)$, 得到

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_{\mu_k}(x)=\psi(x)\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

从而

$$\lim_{k\to\infty} f_{\mu_k}(x) \doteq \psi(x) \quad (-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

由于 $\{f_m(x)\}$ 与 $\{h_m(x)\}$ 是等度概敛的，所以

$$\lim_{k\to\infty} h_{\mu_k}(x) \doteq \psi(x) \quad (-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

又由于 $h_m(x)-S_{\nu_m}(x)\doteq o(1)$，所以得到

$$\lim S_{\nu_k}(x) \doteq \psi(x) \quad (-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

定理 3 证毕.

7. 从三角级数的部分和子列 $\{S_{n_k}(x)\}$ 可以概括到全列 $\{S_n(x)\}$ 的性质

下面是斯捷切金与乌里雅诺夫的定理("级数的子叙列的收敛"，丛书 LXXXVI, 1965).

定理 1 设 $S_n(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x)$ $(n=0, 1, \cdots)$ 是三角级数

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\rho_\nu\cos(\nu x-\alpha_\nu)$$

的部分和叙列，$E\subset[0, 2\pi]$，$|E|>0$. 则当

$$0<n_{k+1}-n_k=O(1)$$

时，$\{S_{n_k}(x)\}$ 在 E 上具有性质 A 的话，$\{S_n(x)\}$ 在 E 上也具有性质 A，A 是下列六种性质的一种:

(i) 在 E 上匀敛； (ii) 在 $L^p(E)$ $(p\geqslant1)$ 中收敛；

(iii) 在 E 上概敛； (iv) 在 E 上度量收敛；

(v) $\sum|S_{n_{k+1}}(x)-S_{n_k}(x)|<\infty$ $(x\in E)$；

(vi) 当 $x\in E$ 时，$S_{n_k}(x)=O(1)$.

在 (i)~(v) 的情况，$a_n=o(1)$，$b_n(1)$. 在 (vi) 的情况，a_n，$b_n=O(1)$.

【证明】 先证 (iv)：设 $S_{n_k}(x)$ $(k=1, 2, \cdots)$ 在 E 上度量收敛，则在 E 上，

$$T_k(x)\equiv S_{n_{k+1}}(x)-S_{n_k}(x)\Rightarrow0.$$

对于任一正数 ε，有 $k_0(\varepsilon)$，当 $k\geqslant k_0(\varepsilon)$ 时，存在 $E_k\subset E$，$2|E_k|>|E|$，

$$\sup_{x\in E_k}|T_k(x)|\leqslant\varepsilon.$$

由是可以导出 $\rho_n\to 0$. 事实上, 当 $n_k<n\leqslant n_{k+1}$ 时,

$$\rho_n\leqslant\|T_k\|_{L^2(0,2\pi)}.$$

另一方面, 我们可以证明: $\|T_k\|_{L^2(0,2\pi)}\leqslant C(n_{k+1}-n_k,|E|)\|T_k\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(E)}$. 由于 $n_{k+1}-n_k=O(1)$, 所以

$$\rho_n=O(|E|)\varepsilon,\quad \rho_n=o(1);$$

$$\sup_{n_k<n\leqslant n_{k+1}}\max_x|S_n(x)-S_{n_k}(x)|\to 0\quad(k\to\infty).$$

由是可知 $\{S_n(x)\}$ 在 E 上度量收敛. 但是, 我们必须证明上述关于 $\|T_k\|_{L^2(E)}$ 的不等式.

记 $\|f\|_{L^\alpha(E)}=\left[\int_E|f(x)|^\alpha dx\right]^{\frac{1}{\alpha}}$, $\|f\|_{C(E)}=\sup\limits_{x\in E}|f(x)|$. 我们证明下述

引理 1 设 $E\subset[0,2\pi)$, $r>1$, $q>1$, 则 $P_n(z)=\sum\limits_0^n c_kz^k\ (z=e^{ix})$ 满足

$$\|P_n\|_{L^r(0,2\pi)}\leqslant C(n,|E|)\|P_n\|_{L^q(E)}.$$

上述关于 T_k 的不等式是 $r=q=2$ 的情况. 假设 $P_n(z)\not\equiv 0$, 记 $P_n=P_n(e^{ix})$, $\|P_n\|_{L^q(E)}=D$, $E_1=(x\in E,\ |P_n(e^{ix})|>M)$, 这里 $M=D\left(\frac{2}{|E|}\right)^{\frac{1}{q}}$. 我们见到

$$D^q\geqslant M^q|E_1|=\frac{2|E_1|}{|E|}D^q,\quad |E_1|\leqslant\frac{1}{2}|E|.$$

因此, 在测度 $|E_0|\geqslant\frac{1}{2}|E|$ 的 E_0 上, $\sup\limits_{E_0}|P_n|\leqslant M$. 这样一来, 我们所要的(关于 L^r, L^q 的)不等式, 可以从

$$\|P_n\|_{C(0,2\pi)}\leqslant C_1(n,|E_0|)\|P_n\|_{C(E_0)}$$

导出. 事实上, 利用这个不等式, 我们见到

$$\begin{aligned}\|P_n\|L^r_{(0,2\pi)}&\leqslant C_1(n,|E_0|)M=\left(\frac{2}{|E|}\right)^{\frac{1}{q}}C_1(n,|E_0|)D\\&<\left(1+\frac{2}{|E|}\right)C_1(n,|E_0|)D=C(n,|E|)\|P_n\|_{L^q(E)}.\end{aligned}$$

现在证明 $\|P_n\|_{C(0,2\pi)}/\|P_n\|_{C(E)}$ 小于 $C(n, |E|)$，这里 $|E|>0$.

设 $E_1\subset E\cdot\left[0,\ 2\pi-\frac{1}{2}|E|\right]$, $2|E_1|=|E|$. 置 $h=\frac{|E|}{4n}$, 那末 E_1 中必有如下的点 $x_0, \cdots, x_n$:

$x_\nu=\alpha+p_\nu h\quad(\nu=0, 1, \cdots, n;\ p_\nu$ 都是整数, $p_0=0,\ p_\nu<p_{\nu+1})$.

设点集 pE 是 $p=\frac{2\pi}{h}$, $x\in E$ 的一切点 px 所成的, 由于 $p>\frac{2n\pi}{|E|}$, 所以 $|pE|>2n\pi$. 因此, 将 pE 落在 $[2k\pi,\ 2k\pi+2\pi)$ 中的部分, 一一 $(k=0, 1, \cdots)$ 布置在 $[0, 2\pi)$ 上, 那末 pE 中至少有 $n+1$ 点相重于 $[0, 2\pi)$ 的同一点, 这就是说: 有点

$$y_0<y_1<\cdots<y_n,\ y_\nu-y_{\nu-1}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2\pi),\ y_\nu\in pE\ \ (\nu=0, 1, \cdots, n).$$

由于 $x_\nu=\frac{y_\nu}{p}\in E$; 所以 E 中有点 $x_0, \cdots, x_n$:

$$x_\nu-x_{\nu-1}\equiv 0\ \left(\mathrm{mod}\ \frac{2\pi}{p}\right),\ \frac{2\pi}{p}=h.$$

从而 $x_\nu=\alpha+p_\nu h(\nu=0, 1, \cdots, n)$,

$$h\leqslant|x_k-x_\nu|\leqslant 2\pi-\frac{1}{2}|E|\quad(k\neq\nu).$$

利用拉格朗日多项式, 将 $P_n(z)\ (z=e^{ix})$ 写成

$$P_n(e^{ix})=\sum_{k=0}^n l_k(e^{ix})P_n(e^{ix_k}),$$

$$l_k(e^{ix})=\prod_{\nu\neq k}(e^{ix}-e^{ix_\nu})\Big/\prod_{\nu\neq k}(e^{ix_k}-e^{ix_\nu}).$$

由于 $|l_k(z)|\leqslant 1/\prod\limits_{\nu\neq k}\left|\sin\frac{1}{2}(p_\nu-p_k)h\right|\leqslant\sin^{-n}\frac{|E|}{8n}$, 所以得到

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 2\pi}|P_n(z)|\leqslant\sum_{k=0}^n\sin^{-n}\frac{|E|}{8n}\sup_{x\in E}|P_n(z)|$$

$$\leqslant(n+1)\sin^{-n}\left(\frac{|E|}{8n}\right)\sup_{x\in E}|P_n(z)|.$$

定理在(iv)的情况, 已经证明了它是真的. 同理可证定理在(i), (ii), (iii) 的情况, 也成立.

现在要从 $\{S_{m_k}(x)\}$ 在 E 上的有界变差性, 导出

$$\sum|S_n(x)-S_{n-1}(x)|<\infty$$

在E上成立. 设$\sum|S_{n_k}(x)-S_{n_{k+1}}(x)|$在$E$的一个正测度点集$E_1$上匀敛,则由引理1,

$$\|S_{n_{k+1}}(x)-S_{n_k}(x)\|_{L^p(0,2\pi)}$$
$$\leqslant C(n_{k+1}-n_k,\ |E_1|)\int_{E_1}|S_{n_{k+1}}(x)-S_{n_k}(x)|dx.$$

左端不小于$\max(\rho_{n_k+1},\ \cdots,\ \rho_{n_{k+1}})$. 由于$n_{k+1}-n_k=O(1)$,所以$\sum\rho_n$收敛,从而$\sum|S_n(x)-S_{n-1}(x)|<\infty$. 这就是证明定理在(v)的情况成立.

最后讨论$S_{n_k}(x)$在E上是有界的情况. 存在E的子集E_1, $|E_1|>0$, 在E_1上, $S_{n_k}(x)$是均匀有界. 于引理1中的不等式, 设$r=2$, $q=1$, 我们见到$\{\rho_\nu\}$是有界. 定理证明完毕.

系 设$n_{k+1}-n_k=O(1)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, 则当$n_k<n\leqslant n_{k+1}$时, 在正测度的点集$E\subset[0,\ 2\pi)$上,成立着

$$\rho_n=O(\|f-S_{n_k}\|_{L^p(E)}+\|f-S_{n_{k+1}}\|_{L^p(E)}),$$
$$\|f-S_n\|_{L^p(E)}=O(\|f-S_{n_k}\|_{L^p(E)}+\|f-S_{n_{k+1}}\|_{L^p(E)}),$$

这里$\|\varphi\|_{L^\infty(E)}$表示$\|\varphi\|_{C(E)}$.

【证明】 于引理1中, 置$r=2$, $q=2$, 就能获得所要的两项结果.

在研讨$n_{k+1}-n_k\to\infty$的情况之前,我们证明

引理 2 固定正整数n和$(0,\ 2\pi)$中的一点x_0, 存在$z=e^{ix}$的$2n$次多项式$P_{2n}(z)=c_0+c_1z+\cdots+c_{2n}z^{2n}$满足两个条件:

$$c_{2n}=\frac{1}{2},\quad |P_{2n}(z)|\leqslant\left(\cos\frac{x_0}{2}\right)^{2n}\quad(x_0\leqslant x\leqslant 2\pi-x_0).$$

【证明】 车比雪夫的n次多项式

$$T_n(u)=\cos n\arccos u=2^{n-1}u^n+\sum_0^{n-1}\lambda_k^{(n)}u^k$$

在$[-1,\ 1]$上是一个偶函数,从而$T_{2n}(-u)=T_{2n}(u)$, 当$0<t_0<\frac{\pi}{2}$时,

$$(\cos t_0)^{2n}T_{2n}\left(\frac{\cos t}{\cos t_0}\right)=2^{2n-1}\cos^{2n}t+\sum_{k=0}^{n-1}a_k^{(n)}\cos^{2k}t.$$

由于$\cos 2nt$是$\cos t$的$2n$次多项式: $\cos 2nt=2^{2n-1}\cos^{2n}t+\cdots$, 所以上式可以改写为

$$(\cos t_0)^{2n}T_{2n}\left(\frac{\cos t}{\cos t_0}\right)=\frac{a_0^{(2n)}}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}a_k^{(2n)}\cos kx+\cos 2nt.$$

又因 $|T_{2n}(u)|\leqslant 1(|u|\leqslant 1)$，故当 $x\in[x_0,\ 2\pi-x_0]$ 时，

$$\left|\left(\cos\frac{x_0}{2}\right)^{2n}T_{2n}\left(\frac{\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x_0}{2}}\right)\right|\leqslant\left(\cos\frac{x_0}{2}\right)^{2n}.$$

写着 $\cos kx=\frac{1}{2}(z^k+z^{-k})$，那末 z 的 $2n$ 次多项式

$$P_{2n}(z)=z^n\left(\cos\frac{x_0}{2}\right)^{2n}T_{2n}\left(\frac{\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x_0}{2}}\right)=\sum_{k=0}^{2n}c_kz^k$$

满足引理 2 中的两个条件．证毕．

定理 2 设 $\overline{\lim}(n_{k+1}-n_k)=+\infty$，则存在幂级数 $\sum c_nz^n(z=e^{ix})$，它的部分和 $S_n(x)=c_0+\cdots+c_nz^n$ 的子列 $\{S_{n_k}(z)\}$ 使级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}|S_{n_{k+1}}(z)-S_{n_k}(z)|\quad(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$$

到处收敛，在 $[0,\ 2\pi-\varepsilon](0<\varepsilon<2\pi)$ 上匀敛，并且系数 $\{c_n\}$ 是一无界数列．

【证明】 对于正整数 s，必有 n_{k_s} 适合于 $n_{k_s}-n_{k_{s-1}}>2s+1$．简写 $n_{k_s}=m_s$，利用引理 2 中的 $P_{2s}(z)$，作成幂级数

$$S(z)=\sum_{s=1}^{\infty}sz^{m_s-2s}P_{2s}(e^{ix_s}z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu z^\nu,$$

这里 $x_s=2\arccos\left(\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2s}}\right)\right)$，$|P_{2s}(e^{ix_s}z)|\leqslant\left(\cos\frac{x_s}{2}\right)^{2n}$．

首先注意 $c_{m_s}=\frac{1}{2}se^{2isx_s}$，$|c_{m_s}|=\frac{1}{2}s$；从而 $\{c_n\}$ 是无界的．

$S(z)$ 的部分和 $S_n(z)=c_0+\cdots+c_nz^n$ 具有如下的性质：当 $m_s\leqslant n_k<m_{s+1}$ 时，$S_{n_k}(z)=S_{m_s}(z)$；后者是

$$S_{m_s}(z)=\sum_{\sigma=1}^{s}\sigma e^{i(m_\sigma-2\sigma)x}P_{2\sigma}(e^{i(x+x_\sigma)}),$$

其中

$$|P_{2\sigma}(e^{ix+ix_\sigma})|\leqslant\left(\cos\frac{x_\sigma}{2}\right)^{2\sigma}=e^{-\sqrt{2\sigma}}\quad(0\leqslant x\leqslant 2\pi-2x_\sigma).$$

对于$\varepsilon\in(0,\ \pi)$，存在$N=N(\varepsilon)$，当$\sigma\geqslant N$时，$x_\sigma<\frac{1}{2}\varepsilon$. 由是，$x\in[0,\ 2\pi-\varepsilon]$的话，

$$|S_{m_\sigma}(z)-S_{m_{\sigma-1}}(z)|\leqslant\sigma e^{-\sqrt{2\sigma}}\quad(\sigma\geqslant N).$$

故以左端为一般项的级数在区间$[0,\ 2\pi-\varepsilon]$上匀敛. 定理证毕.

定理 3 设$\{n_{k+1}-n_k\}$是无界的$(n_k\uparrow\infty)$，则在$C_{2\pi}$以及在$L(0,\ 2\pi)$中，$S_{n_k}(z)=c_0+\cdots+c_{n_k}z^{n_k}(z=e^{ix})$的收敛性不能保证$\{S_n(z)\}$的收敛性.

【证明】 由于n_k-n_{k-1}不是有界，所以对自然数s，存在k_s，k_{s-1}适合于

$$n_{k_s}-n_{k_{s-1}}>3\cdot 2^{s^2}.$$

利用费耶的三角多项式

$$Q_n(x)=\frac{\cos nx}{n}+\cdots+\frac{\cos(2n-1)x}{1}$$
$$-\left[\frac{\cos(2n+1)x}{1}+\cdots+\frac{\cos 3nx}{n}\right],$$

作成$z=e^{ix}$的多项式$P_n(z)=Q_n(x)+i\bar{Q}_n(x)\equiv\sum\limits_{n}^{3n}\alpha_k z^k$. 我们见到

$$\alpha_n+\alpha_{n+1}+\cdots+\alpha_{2n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+1>\log n.$$

由于$P_n(z)=2e^{-2inx}\left(\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\cdots+\frac{\sin nx}{n}\right)$，所以级数

$$S(z)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s^2}\exp[i(n_{k_s}-3\cdot 2^{s^2})]\cdot P_{2^{s^2}}(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu z^\nu$$

的部分和$S_n(x)=c_0+c_1z+\cdots+c_nz^n$的子列$S_{n_k}(z)\,(k=1,\ 2,\ \cdots)$在$0\leqslant x\leqslant 2\pi$上是均匀有界，相应于$S(1)$的级数$\sum c_\nu$是发散的. 定理证明完毕.

8. 周期函数级数

设 $\varphi(x)$ 是 2π 为周期的周期函数，属于 $L_2(0, 2\pi)$ 而不是常数．三角级数是 $\sum a_n\varphi(nx-\alpha_n)$ 的特殊情况，简称后者为**周期函数级数**．

定理 1 设 $E\subset[0, 2\pi]$，$|E|>0$；$n_k\uparrow\infty$，$n_{k+1}-n_k=O(1)$；$S_n(x)$ 是周期函数级数 $\sum a_{n_k}\varphi(mx-\alpha_m)$ 的部分和．假如

$$\{S_{n_k}(x)\}\quad(k=1, 2, \cdots)$$

在 E 上度量收敛，或是在空间 $L^p(E)$ $(1\leqslant p\leqslant 2)$ 中收敛，那末 $\{S_n(x)\}$ 也具有这样的收敛性．

【证明】 证明要利用乌里雅诺夫-斯捷切金的等式

$$\int_E\left|\sum_{k=N+1}^{N+m}a_k\varphi(kx-\alpha_k)\right|^2dx$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty}{}'\rho_\nu^2\int_E\left|\sum_{k=1}^{m}a_{N+k}\exp\left[i\nu(kx-\alpha_{N+N})\right]\right|^2dx+O\left(\sum_1^m a_{N+k}^2\right),$$

这里 $N\to\infty$，$\varphi(x)\sim\frac{\rho_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\rho_\nu\cos(\nu x-\beta_\nu)$；$\sum'$ 表示其中关于 $\nu=0$ 的项是 $\left(\frac{\rho_0}{2}\right)^2$ 而不是 ρ_0^2．等式的证明，这里从略（详见前面引用的"丛书" LXXXVI，引理 2.6）．

现在从等式导出不等式

$$\text{(I)}\qquad (a_{N+1}^2+a_{N+2}^2+\cdots+a_{N+m}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant C_\varphi\cdot C(m, |E|)\left\{\int_E\left|\sum_{k=N+1}^{N+m}a_k\varphi(kx-\alpha_k)\right|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

当 $N\geqslant N_0=N_0(m, E, \varphi)$ 时成立．等式的末项是 $O(a_{N+1}^2+\cdots+a_{N+m}^2)$，它的绝对值小于

$$\varepsilon(a_{N+1}^2+\cdots+a_{N+m}^2)\quad(N>N_1),$$

这里 $N_1=N_1(\varepsilon, m, E, \varphi)$．从而当 $N\geqslant N_1$ 时，

$$\int_E\left|\sum_{k=N+1}^{N+m}a_k\varphi(kx-\alpha_k)\right|^2dx$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\rho_\nu^2\int_E\left|\sum_{k=1}^{m}a_{N+k}\exp\left[i\nu(kx-\alpha_{N+k})\right]\right|^2dx-\sum_{N+1}^{N+m}a_k^2.$$

现在记右端级数的第 ν 中的积分为 I_ν，我们要估计 I_ν．将区间 $[0, 2\pi)$ 等分为 ν 个小区间 $\left[s\frac{2\pi}{\nu}, (s+1)\frac{2\pi}{\nu}\right)$ $(s=0, 1, \cdots, \nu-1)$，记 $E_s=E\cap\left[\frac{2s\pi}{\nu}, \frac{(2s+2)\pi}{\nu}\right)$，则 $E=E_0+E_1+\cdots+E_{\nu-1}$，必有一个 E_{s_0}，$|E_{s_0}|\geqslant\frac{|E|}{\nu}$．因此，

$$I_\nu\geqslant\int_{E_{s_0}}\left|\sum_{k=1}^{m}a_{N+k}\exp\left(-i\nu\alpha_{N+k}\right)\exp\left(ik\nu x\right)\right|^2dx$$

$$=\int_{\nu E_{s_0}}\left|\sum_{k=1}^{m}a_{N+k}\exp(ik_y)\exp\left(-i\alpha_{N+k}\right)\right|^2\frac{dy}{\nu}.$$

由引理 1，最后的积分大于

$$\frac{1}{\nu C(m, |E|)}\left(a_{N+1}^2+\cdots+a_{N+m}^2\right).$$

置 $s=\frac{1}{4}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\rho_\nu^2C^{-2}(m, |E|)$，$C(\varphi)=2/\sqrt{\sum\nu^{-1}\rho_\nu^2}$，则从等式得到所要的不等式(I)．

当 $n_k<n\leqslant n_{k+1}$ 时，

$$\int_0^{2\pi}|S_n(x)-S_{n_k}(x)|^2dx\leqslant\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n_k+1}^{n_{k+1}}|a_\nu\varphi(\nu x-\alpha_\nu)|\right)^2dx$$

$$\leqslant\int_0^{2\pi}\varphi(t)^2dt\left(a_{n_k+1}^2+\cdots+a_{n_{k+1}}^2\right).$$

因此，假如 $\{S_{n_k}(x)\}$ 在 $L^2(E)$ 中收敛，那末结合 $a_{n_k+1}^2+\cdots+a_{n_{k+1}}^2$ 到上面所得的不等式(I)，我们见到 $\{S_n(x)\}$ 在 $L^2(E)$ 中收敛．

定理的证明，可以通过下面的不等式

(II) $$\left(\sum_{k=N+1}^{N+m}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant C(m, E, \varphi, p)\left\{\int_E\left|\sum_{k=N+1}^{N+m}a_k\varphi(kx-\alpha_k)\right|^pdx\right\}^{\frac{1}{p}}$$

来完成，这里 $p>0$．

设 $1\leqslant p\leqslant2$，则当 $\{S_m(x)\}$ 在 $L^p(E)$ 中收敛时，对于 $n_k<n\leqslant n_{k+1}$，我们见到

$$\left(\int_E |f(x)-S_n(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_E |f(x)-S_{n_k}(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\left(\int_0^{2\pi} |S_{n_k}(x)-S_n(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

第一项是 $o(1)$，第二项不大于

$$(2\pi)^{\frac{1}{p}}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |S_{n_k}(x)-S_n(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant (2\pi)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}(a_{n_k+1}^2+\cdots+a_{n_{k+1}}^2)$$

$$\leqslant \sqrt{2\pi}\, C\,(n_{k+1}-n_k,\ E,\ \varphi,\ p)$$

$$\times\left\{\int_E \left|\sum_{\nu=n_k+1}^{n_{k+1}} a_\nu \varphi(\nu x-\alpha_\nu)\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

这也是 $o(1)$. 由是, $\{S_n(x)\}$ 在 $L^p(E)$ 中也收敛.

又从不等式 ($n_k<n<n_{k+1}$ 的话)

$$|S_n(x)-S_{n_k}(x)|^2 \leqslant (a_{n_k+1}^2+\cdots+a_{n_{k+1}}^2)\sum_{n_k+1}^{n_{k+1}}\varphi^2(\nu x-\alpha_\nu),$$

$$n_{k+1}-n_k=O(1)$$

可以证明: $\{S_{n_k}(x)\}$ 在 E 上的度量收敛含有 $\{S_n(x)\}$ 在 E 上的度量收敛.

余下的证明是要建立(II). 假如(II)不是真理, 那末必有 $N_s\uparrow\infty$, 多项式

$$\sum_{k=N_s+1}^{N_{s+1}} a_k\varphi(kx-\alpha_k)=T_s(x)$$

和 $\{\lambda_s\}$ 适合于 $\lambda_s\uparrow\infty$ 以及

$$A_s\equiv\left(\sum_{k=N_s+1}^{N_{s+1}} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} > \lambda_s\left\{\int_E |T_s(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

对于一定的 m, 我们假设 $N_{s+1}>N_s+m$, 那末 $T_s(x)$ 与 $T_{s+1}(x)$ 的项不相重迭了. 由于

$$\int_E \left|\frac{T_s(x)}{A_s}\right|^p dx < \frac{1}{\lambda_s^p}=o(1) \quad (s\to\infty),$$

所以, $T_s(x)/A_s$ 在点集 E 上, 以 $L^p(E)$ 的情况, 收敛于 0. $\{T_s(x)/A_s\}$

中必有子列 $\{T_{s_q}(x)/A_{s_q}\}$ 在 E 上概敛于 0. 由耶各洛夫的定理, E 中存在正测度的点集 E_1, 在 E_1 上 $\{T_{s_q}(x)/A_{s_q}\}$ 匀敛于 0:

$$\sup_{x\in E_1}\frac{1}{A_{s_q}}|T_{s_q}(x)|=\varepsilon_q=o(1).$$

由不等式 (I),

$$\sqrt{\sum_{k=N_{s_q}+1}^{N_{s_q}+m}a_k^2}\leqslant C_\varphi C(m,\ |E_1|)\sqrt{\int_{E_1}|T_{s_q}(x)|^2dx}$$
$$\leqslant C_\varphi C(m,\ |E_1|)\sqrt{|E_1|}\,\varepsilon_q A_{s_q}.$$

除以 A_{s_q}, 即得 $1\leqslant C_\varphi\cdot C(m,\ |E_1|)\sqrt{|E_1|}\,\varepsilon_q$. 当 q 很大时, 这是不能成立的. 从而(II)成立. 定理 1 证毕.

系 设 $n_{k+1}-n_k=o(1)$. 假如 $\{S_{n_k}(x)\}$ 在正测度的点集上是有界变差, 那末 $\sum|a_n|<\infty$, 并且 $\{S_n(x)\}$ 在 $[0,\ 2\pi]$ 上概具有有界变差性.

【证明】 由耶各洛夫的定理, 我们不妨假设 $\{S_{n_k}(x)\}$ 在 E 上是均匀地有界变差; 这就是说, $\sum|S_{n_{k+1}}(x)-S_{n_k}(x)|$ 是均匀有界. 因此,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_E|S_{n_{k+1}}(x)-S_{n_k}(x)|dx=M,\quad M<\infty.$$

由 (II), $\max(|a_{n_k+1}|,\ \cdots,\ |a_{n_{k+1}}|)$ 不大于

$$\sqrt{|a_{n_k+1}|^2+\cdots+|a_{n_{k+1}}|^2}\leqslant C\int_E\left|\sum_{n_k+1}^{n_{k+1}}a_\nu\varphi(\nu x-\alpha_\nu)\right|dx,$$

C 是只与 φ, E 有关的. 由是可知 $\sum|a_\nu|\leqslant CM$.

又从

$$\sum|a_\nu|\int_0^{2\pi}|\varphi(\nu x-\alpha_\nu)|dx=\sum|a_\nu|\int_0^{2\pi}|\varphi(x)|dx<\infty,$$

知 $\sum|a_n\varphi(nx-\alpha_n)|$ 几乎处处收敛. 系的证明完毕.

下面是加泡西金(B. Ф. Гапошкин)的定理(M. сб. 69, 1966):

定理 2 设

$$\sum(|A_k|+|B_k|)\sqrt{\log k}<\infty,\ \varphi(x)=\sum_0^{\infty}(A_k\cos kx+B_k\sin kx),$$

则当

$$\sum a_k^2\log k<\infty$$

时，$\sum a_n\varphi(nx-\alpha_n)$ 概收敛[*]．

【证明】 这是泼赖斯耐的定理(第三章 § 3 定理 8)的拓广．

取自然数的增加叙列 $\{m_k\}$，置

$$\varphi_k(x)=\sum_{\nu=0}^{m_k}\{A_\nu\cos(\nu kx-\alpha_k\nu)+B_\nu\sin(\nu kx-\nu\alpha_k)\},$$

$$\Phi(x)=\varphi_\infty(x),\quad \Phi(x)-\varphi_k(x)=r_k(x),$$

$$S_n^{(1)}(x)=\sum_{k=1}^n a_k\varphi_k(x),\quad S_n^{(2)}(x)=\sum_{k=1}^n a_k r_k(x).$$

利用泼赖斯耐的方法来证明 $\sum a_n\varphi(nx-\alpha_n)$ 的概收敛性，归结于估计积分 $\int_0^{2\pi}|S_{n(x)}(x)|dx$，这里 $n(x)$ 是一个取自然数值的可测函数；

$$S_{n(x)}(x)=S_{n(x)}^{(1)}(x)+S_{n(x)}^{(2)}(x).$$

设 $l_\nu=\min\limits_{m_k\geq\nu}k$，则因

$$\sum_{k=1}^{n(x)}\sum_{\nu=0}^{m_k}=\sum_{\nu=0}^{m_{n(x)}}\sum_{k=l_\nu}^{n(x)},$$

$$\begin{aligned}A_\nu\cos(\nu kx-\nu\alpha_k)&+B_\nu\sin(\nu kx-\nu\alpha_k)\\&=(A_\nu\cos\nu\alpha_k-B_\nu\sin\nu\alpha_k)\cos\nu kx\\&\quad+(B_\nu\cos\nu\alpha_k+A_\nu\sin\nu\alpha_k)\sin\nu kx\\&=(\nu,\ k)_1\cos\nu kx+(\nu,\ k)_2\sin\nu kx,\end{aligned}$$

我们见到 $S_{n(x)}^{(1)}(x)=\sum\limits_{k=1}^{n(x)}a_k\varphi_k(x)$

$$=\sum_{\nu=1}^{m_{n(x)}}\sum_{k=l_\nu}^{n(x)}a_k\{(\nu,\ k)_1\cos\nu kx+(\nu,\ k)_2\sin\nu kx\}.$$

利用泼赖斯耐的方法，

$$\int_0^{2\pi}|S_{n(x)}^{(1)}(x)|dx\leqslant\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=l_\nu}^{n(x)}a_k(\nu,k)_1\cos\nu kx+(\nu,\ k)_2\sin\nu kx\right|dx$$

$$\leqslant\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\sum_{k=l_\nu}^{\infty}a_k^2[(\nu,\ k)_1^2+(\nu,\ k)_2^2]\log\nu k\right)^{\frac{1}{2}}.$$

---

[*] 加泡西金原来的定理，是对于级数 $\sum a_n\varphi(nx)$ 说的 $(\alpha_n=0)$．但是一般的三角级数不能写成 $\sum a_n\varphi(nx)$ 的形式．又对于 $\varphi(x)$ 的条件，这里将原来的 $\sum(|A_k|+|B_k|)<\infty$，添入了因子$\sqrt{\log k}$．

由于 $(\nu, k)_1^2+(\nu, k)_2^2\leqslant 2(|A_\nu|+|B_\nu|)^2$, 所以从上式得到

$$\int_0^{2\pi} |S_{n(x)}^{(1)}(x)|dx\leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty}(|A_\nu|+|B_\nu|)\Big(\sum_{k=l_\nu}^{\infty}2a_k^2\cdot\log k\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}(|A_\nu|+|B_\nu|)\sqrt{\log\nu}\Big(\sum_{l_\nu}^{\infty}2a_k^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

它小于一个绝对常数 C_1.

另一方面,

$$|S_{n(x)}^{(2)}(x)|=\Big|\sum_{k=1}^{n(x)}a_k r_k(kx)\Big|$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n(x)}|a_k|\Big|\sum_{\nu=m_k+1}^{\infty}\{(\nu, k)_1\cos\nu kx+(\nu, k)_2\sin\nu kx\}\Big|.$$

这里的 m_k, 除了 $m_k\uparrow\infty$ 而外, 还没有其他的规定; 现在假设

$$C_2=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\log^2 k}\sum_{\nu=m_k+1}^{\infty}(A_\nu^2+B_\nu^2)<\infty.$$

从而

$$\int_0^{2\pi}|S_{n(x)}^{(2)}(x)|dx\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\Big\{2\pi\sum_{\nu=m_k+1}^{\infty}[(\nu, k)_1^2+(\nu, k)_2^2]\Big\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant 6\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\Big[\sum_{\nu=m_k+1}^{\infty}(A_\nu^2+B_\nu^2)\Big]^{\frac{1}{2}}$$

$$=6\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\log k\cdot C_2=C_3.$$

总结起来, 对于任何可测函数 $n(x)$, 成立着

$$\int_0^{2\pi}|S_{n(x)}(x)|dx\leqslant C_1+C_3<\infty.$$

因此 $\sum a_n\varphi(nx-\alpha_n)$概敛. 定理 2 证明完毕.

假如一切 α_n 都是 0, 那末从定理 2 的证明可以见到: 条件

$$\sum(|A_k|+|B_k|)\sqrt{\log k}<\infty$$

中的 $\sqrt{\log k}$ 因子是多余的. 由是可述

系 1 假设 $\varphi(x)=\sum(A_k\cos kx+B_k\sin kx)$ 是一绝对收敛级数, 那末当 $\sum a_k^2\log k$ 收敛时, $\sum a_n\varphi(nx)$ 概收敛.

系 2 设 $\{m_k\}$ 和 $\{l_\nu\}$ 是如下两个自然数列: $m_k\uparrow\infty$, $l_\nu=\min\limits_{m_k\geqslant\nu}k$;

$u(x)$ 与 $w(x)$ 是两个正值增加函数，它们满足

$$\log k\left(\frac{1}{w(1)}+\cdots+\frac{1}{w(m_k)}\right)=O(u(k)),$$

$$\frac{1}{u(1)}+\cdots+\frac{1}{u(l_k)}=O(w(k)),$$

那末当 $\sum a_k^2 u(k)$ 和 $\sum (A_k^2+B_k^2)w(k)$ 都收敛时，$\sum a_n \varphi(nx)$ 概收敛；这里

$$\varphi(x)=\sum (A_k \cos kx+B_k \sin kx).$$

【证明】 从第一个条件，我们见到 $\dfrac{\log k}{u(k)}=O(1)$. 因此，$\sum a_k^2 u(k)<\infty$ 含有 $\sum a_k^2 \log k<\infty$. 由是

$$\int_0^{2\pi}|S_{n(x)}^{(1)}(x)|dx\leqslant C\sum_{\nu=1}^{\infty}(|A_\nu|+|B_\nu|)\sqrt{\sum_{l_\nu}^{\infty}a_k^2 \log k}$$

$$\leqslant C_1\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2 \log k\sum_{\nu=1}^{m_k}1/w(\nu)}=C_2\sqrt{\sum a_k^2 u(k)}\leqslant C_3,$$

$$\int_0^{2\pi}|S_{n(x)}^{(2)}(x)|dx\leqslant C'\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\sqrt{\sum_{m_k+1}^{\infty}(|A_\nu|^2+|B_\nu|^2)}$$

$$\leqslant C''\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{u(k)}\sum_{m_k+1}^{\infty}(A_\nu^2+B_\nu^2)}$$

$$=C''\sqrt{\sum_{\nu=1}^{\infty}(A_\nu^2+B_\nu^2)\left(\frac{1}{u(1)}+\cdots+\frac{1}{u(l_\nu)}\right)}$$

$$\leqslant C'''\sqrt{\sum (A_\nu^2+B_\nu^2)w(\nu)}\leqslant C_4.$$

从而

$$\int_0^{2\pi}|S_{n(x)}(x)|dx\leqslant C_3+C_4.$$

证明完毕.

关于缺项级数 $\sum a_n \varphi(n_k x)$ 的概收敛，加泡西金证得下述

定理 3 设 $\varphi(x)=\sum(A_k \cos kx+B_k \sin kx)$ 是一个绝对收敛级数，则当 $n_{k+1}/n_k\geqslant q>1$, $\sum a_k^2<\infty$ 时，级数 $\sum a_k \varphi(n_k x)$ 概收敛.

【证明】 由第三章 §7 定理 1（柯尔莫哥洛夫的定理），级数

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu \cos n_\nu kx,\quad \sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu \sin n_\nu kx$$

在 $\left(0, \frac{2\pi}{k}\right), \left(\frac{2\pi}{k}, \frac{4\pi}{k}\right), \left(\frac{4\pi}{k}, \frac{6\pi}{k}\right), \cdots$ 中都是概收敛，从而它们在 $(0, 2\pi)$ 上概收敛. 对于任一正数 $\varepsilon(\varepsilon<\pi)$，存在 E, $|E|>2\pi-\varepsilon$, 在 E 上

$$\left|\sum a_\nu \frac{\cos}{\sin} n_\nu kx\right| \leqslant M = M(\varepsilon).$$

由是, 在 E 上成立着

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_k \varphi(n_k x) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{A_\nu \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos n_k \nu x + B_\nu \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin n_k \nu x\right\}.$$

因此 $\sum a_k \varphi(n_k x)$ 在 E 上收敛, 在 $(0, 2\pi)$ 上概收敛. 证明完毕.

定理 3 中关于 $\varphi(x)$ 的三角级数的假设, 可用 $\varphi(x)$ 的连续模的性质来代替:

定理 4 设 $\varphi(x+2\pi)=\varphi(x)$ 的连续模

$$\omega(\varphi, t) = O\left(\log\frac{1}{t}\right)^{-\eta} \left(\eta>\frac{1}{2}\right), \quad \int_0^{2\pi} \varphi(x)\,dx = 0,$$

则当 $\sum a_n^2<\infty$, $n_{k+1}/n_k \geqslant q>1$ 时, 级数 $\sum a_k \varphi(n_k x)$ 概收敛.

【证明】*) 假设 $\left|\int_0^x \varphi(t)\,dt\right|$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的最大值是 1. 当 $k>0$ 时,

$$\int_0^{x_0+h} \varphi(n_k x)\,dx = \frac{1}{n_k}\int_{x_0 n_k}^{x_0 n_k + h n_k} \varphi(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{n_k}\int_0^{\delta} \varphi(t)\,dt \quad (0\leqslant\delta<2\pi)$$

的绝对值不大于 $1/n_k$. 从而当 $r\to\infty$ 时,

$$\sum_{k=r+1}^{\infty} |a_k| \cdot \left|\int_{x_0}^{x_0+h} \varphi(n_k x)\,dx\right| \leqslant \left\{\sum_{k>r} a_k^2 \cdot \sum_{k>r} n_k^{-2}\right\}^{\frac{1}{2}} = O(n_r^{-1}).$$

设 $h=n_{r+1}^{-1}$, 那末上式右端是 $o(h)$, 并且

$$\sum_{k=1}^{r} a_k \int_{x_0}^{x_0+h} \varphi(n_k x)\,dx = \sum_{x_0}^{r} a_k \int_{x_0}^{x_0+h} \{\varphi(n_k x) - \varphi(n_k x_0)\}\,dx + O(h).$$

由于

$$\left|\int_{x_0}^{x_0+h} \{\varphi(n_k x) - \varphi(n_k x_0)\}\,dx\right| \leqslant \frac{1}{n_k}\int_0^{h n_k} \omega(\varphi, t)\,dt \leqslant h\omega(\varphi, h n_k),$$

*) 这里添加"级数 $\sum a_k \varphi(n_k x)$ 是有界"的条件. 详见证后的注.

$$\omega\left(\varphi,\ \frac{n_k}{n_{k+1}}\right)=O\left(\log\frac{n_{r+1}}{n_k}\right)^{-\eta}=O\left(\frac{1}{(r+1-h)^{\eta}}\right),$$

所以

$$\sum_{k=1}^{r} a_k\int_{x_0}^{x_0+h}\varphi(n_k x)dx=hO\left(\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k^{2\eta}}\right)^{\frac{1}{2}}+O(h)=O(h).$$

总结起来,

$$\sum a_k\int_{x_0}^{x_0+h}\varphi(n_k x)dx=O(h);$$

$\sum a_k\int_0^x \varphi(n_k t)dt$ 是 Lip 1 中的一个函数. 由于 $\sum a_k\varphi(n_k x)$ 的有界性,所以几乎处处成立着

$$\frac{d}{dx}\sum a_k\int_0^x\varphi(n_k t)dx=\sum a_k\varphi(n_k x).$$

定理证明完毕.

证后的注 当 $\sum a_k^2<\infty$, $n_{k+1}/n_k\geqslant q>1$, $\omega(\varphi,\ t)=O\left(\log\frac{1}{t}\right)^{-\eta}$ $\left(\eta>\frac{1}{2}\right)$时, $\sum a_k\varphi(n_k x)$ 在 $L_2(0,\ 2\pi)$ 中收敛于一个函数 $g(x)\in L_2(0,\ 2\pi)$. 这是卡起(Kac), 沙勒姆(Salem)和齐革蒙特的定理(1948年的 TAMS 63). 应用这个定理,我们可以将定理 4 简化: 在条件

$$\sum a_k^2<\infty,\quad n_{k+1}/n_k\geqslant q>1,\quad \int_0^{2\pi}\varphi(x)dx=0,$$

$$\omega(\varphi,\ t)=O\left(\log\frac{1}{t}\right)^{-\eta}\quad\left(\eta>\frac{1}{2}\right)$$

下,级数 $\sum a_k\varphi(n_k x)$ 概收敛. 我们只要在 $g(x)$ 的任一勒贝格点 x_0, 证明级数 $\sum a_k\varphi(n_k x_0)$ 的收敛性就好了. 现在要从

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h g(x_0+t)dt=g(x_0)$$

得到 $\sum a_k\varphi(n_k x_0)=g(x_0)$. 对于 $\varepsilon>0$, 取 r_0 使

$$\sum_{k=1}^{r-r_0}\omega^2\left(\varphi,\ \frac{n_k}{n_{r+1}}\right)=O\left(\sum_{k=r_0}^{\infty}k^{-2\eta}\right)<\frac{\varepsilon^2}{4};$$

$$\left|\sum_{k=r-r_0+1}^{r}a_k\int_{x_0}^{x_0+h}[\varphi(n_k x)-\varphi(n_k x_0)]dx\right|$$

$$\leqslant r_0\max|\varphi|\cdot\max_{r-r_0<k<r}|a_k|<\frac{\varepsilon}{4},$$

$$\left|\sum_{k=r+1}^{\infty} a_k \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \varphi(n_k x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \left(h=\frac{1}{n_{r+1}}\right),$$

则得

$$\left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} g(x)dx - \sum_{k=1}^{r} a_k\varphi(n_k x_0)\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon \quad (r>r_0).$$

令 $r\to\infty$, 我们见到 $\sum a_k\varphi(n_k x_0)=g(x_0)$.

现在要问: 在上述情况, 当 $\omega(\varphi, t)=O\left(\log\frac{1}{t}\right)^{-\eta}$ 的 η 不大于 $\frac{1}{2}$ 的话, 何时常能断言 $\sum a_k^2\varphi(n_k x)$ 是一概敛的级数? 首先证明

定理 5 设 $\varphi(x)$ 是一如下的函数:

$$\int_0^1 \varphi(x)dx=0, \quad \varphi(x+1)\equiv\varphi(x),$$

$$\max_{0<h<t}\sqrt{\int_0^1 [\varphi(x+h)-\varphi(x)]^2 dx}$$

$$=\omega_2(\varphi, t)=O\left(\log\frac{1}{t}\right)^{-\eta}, \quad 0<\eta<\frac{1}{2},$$

则级数 $\sum a_k^2$ 的收敛并不含有 $\sum a_k\varphi(2^k x)$ 的概敛, 事实上 $\sum a_k\varphi(2^k x)$ 有可能几乎处处发散.

【证明】 这里利用拉特马吼的函数系

$$r_k(x)=\operatorname{sign}\sin 2^k\pi x \quad (k=1, 2, \cdots)$$

来作出概散的级数. 置 $C=\sum_{1}^{\infty}\nu^{2\eta-2}$, 设 v_k 是自然数,

$$\varphi(x)=\frac{1}{C}\sum_{k=0}^{\infty} v_k^{\eta-\frac{1}{2}}\sum_{j=w_k+1}^{w_k+v_k} r_j(x) \quad (v_0=1,\ w_k=v_0+v_1+\cdots+v_{k-1}),$$

$$v_k\geqslant\max(8v_{k-1}^{1/\eta},\ (kv_{k-1})^{2/(1-2\eta)}),$$

$$a_s=v_k^{\eta-1} \quad (w_k+1\leqslant s\leqslant w_k+v_k).$$

我们证明级数 $\sum a_s\varphi(2^s x)$ 几乎处处发散,

$$\int_0^1\varphi(x)dx=0, \quad \omega_2(\varphi, t)=O\left(\log\frac{1}{t}\right)^{-\eta}.$$

将级数

$$\varphi(x)=\frac{1}{C}\sum_{s=0}^{\infty}u_s(x), \quad u_s(x)=v_s^{\eta-\frac{1}{2}}[r_{w_s+1}(x)+\cdots+r_{w_s+v_s}(x)]$$

分成三个部分:

$$\varphi_1(x)=\frac{1}{C}\sum_{s<k}u_s(x),\quad \varphi_2(x)=\frac{1}{C}u_k(x),\quad \varphi_3(x)=\frac{1}{C}\sum_{s>k}u_s(x)$$

来讨论.

设 $p>0$, 我们考虑点集

$$E_k(p)=\left\{x\in[0,1],\ \sum_{w_k+1}^{w_k+v_k}a_\nu\varphi(2^\nu x)>pC\right\},$$

$$E_{k1}(p)=\left\{x\in[0,1],\ \left|\sum_{w_k+1}^{w_k+v_k}a_\nu\varphi_1(2^\nu x)\right|\geqslant\frac{p}{2}\right\},$$

$$E_{k2}(p)=\left\{x\in[0,1],\ \sum_{w_k+1}^{w_k+v_k}a_\nu\varphi_2(2^\nu x)\geqslant 2p\right\},$$

$$E_{k3}(p)=\left\{x\in[0,1],\ \left|\sum_{w_k+1}^{w_k+v_k}a_\nu\varphi_3(2^\nu x)\right|\geqslant\frac{p}{2}\right\}.$$

由于

$$\left|\sum_{w_k+1}^{w_k+v_k}a_\nu\varphi_1(2^\nu x)\right|^2\leqslant v_k^{2\eta-1}\left|\sum_{w_k+1}^{w_k+v_k}\varphi_1(2^\nu x)\right|^2,$$

$$C\sum_{\nu=w_k+1}^{w_k+v_k}\varphi_1(2^\nu x)=\sum_{s=1}^{2w_k+v_k}\xi_s r_s(x)$$

$$(|\xi_s|\leqslant 2\nu_{k-1},\ 2w_k+v_k\leqslant 4\sqrt{k}),$$

所以

$$\Sigma_1=\int_0^1\left|\sum_{w_k+1}^{w_k+v_k}a_\nu\varphi_1(2^\nu x)\right|^2dx\leqslant\frac{1}{C^2}\ v_k^{2\eta-2}\cdot 4v_{k-1}^2\cdot 4v_k\leqslant\frac{16}{C^2k^2}.$$

同样

$$\Sigma_3=\int_0^1\left|\sum_{w_k+1}^{w_k+v_k}a_\nu\varphi_3(2^\nu x)\right|^2dx\leqslant v_k^{2\eta-2}\cdot v_k^2\|\varphi_3\|$$

$$=\frac{1}{C^2}\ v_k^{-2\eta}\sum_{s=k+1}^{\infty}v_s^{-2\eta}=O\left(\left(\frac{v_{k+1}}{v_k}\right)^{2\eta}\right)=O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

由是可知

$$|E_{k1}(p)|<\frac{64}{C^2p^2k^2},\quad |E_{k3}(p)|<\frac{C'}{p^2k^2}\quad (C':\text{常数}).$$

但是主要的部分是由 $\varphi_2(x)$ 产生. 由于

$$\sum_{w_k+1}^{w_k+v_k} a_\nu \varphi_2(2^\nu x) = v_k^{-\frac{3}{2}} \sum_{m=w_k+1}^{w_k+v_k} \sum_{s=w_k+1}^{w_k+v_k} r_{s+m}(x)$$

$$= v_k^{-\frac{3}{2}} \sum_{m=1}^{v_k} \sum_{s=0}^{v_k-1} r_{s+m}(2^{2w_k+1}x)$$

$$= v_k^{-\frac{3}{2}} \sum_{\nu=1}^{v_k} \nu r_\nu(2^{2w_k+1}x) + v^{-\frac{3}{2}} \sum_{\nu=v_k+1}^{2v_k-1} (2v_k-\nu) r_\nu(2^{2w_k+1}x).$$

我们留意：当右端末项 $\geqslant 0$ 时，首项也 $\geqslant 0$；由于末项 $\geqslant \frac{1}{2}$ 的一切点 x 所成点集，其测度 $\geqslant \frac{1}{2}$. 因此

$$|E_{k2}(p)| \geqslant \frac{1}{2} |E_{k2}^*(p)|,$$

这里 $E_{k2}^*(p) = \left\{x \in [0, 1],\ \sum_{\nu=1}^{v_k} \nu r_\nu(2^{2w_k+1}x) \geqslant 2p\right\}$.

由于 $|E_{k1}(p)| = o(1)\ (k\to\infty)$, $|E_{k3}(p)| = o(1)\ (k\to\infty)$, 所以当 $x \in \limsup_{k\to\infty} E_k(p)$ 时，存在 $k_j = k_j(x) \uparrow \infty$ 使

$$\sum_{s=w_{k_j}+1}^{w_{k_j}+v_{k_j}} a_s \varphi(2^s x) > p \quad (j=1, 2, \cdots).$$

由是可知 $\sum a_n \varphi(2^n x)$ 在点 x 发散.

级数概散的证明归结于阐明点集

$$\limsup_{k\to\infty} E_k(p)$$

的测度等于 1. 实际上，我们只要证明*)

$$|\limsup_{k\to\infty} E_{k2}(p)| = 1 \quad (p>0)$$

就好了.

---

*) 点集 $\limsup E_{k,2}(p)$ 的测度，当 $k\to\infty$ 时趋近于 1 的根据是在

$$\lim_{k\to\infty} \left|\left(x \in [0, 1],\ k^{-\frac{3}{2}} \sum_{\nu=1}^{k} \nu r_\nu(x) > p\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{3}p}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \quad (p>0).$$

这是（概率论）中心极限定理的一个应用；$k^{-\frac{3}{2}}$ 和 $\sqrt{3}$ 的由来是在

$$\sqrt{1^2+2^2+\cdots+k^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} k^{\frac{3}{2}}(1+o(1)).$$

$E_{k,2}(p)$ 中的 $r_\nu(x)$ 的下标 $\nu \in [2w_k+2, 2w_k+2v_k]$, 当 $k \neq k'$ 时，$E_{k,2}(p)$ 与 $E_{k',2}(p)$ 的"ν"是不相重的. 从而 $\{E_{k,2}(p)\}$ 的上限点集的测度等于 1.

此外，我们见到：$\sum a_k^2=\sum v_k^{-1+\eta}<\infty$，

$$\int_0^1\varphi(x)dx=0,\quad \int_0^1\varphi^2(x)dx<\infty;$$

当 $2^{-n-1}<\delta\leqslant 2^{-n}$ 时，$\omega_2(\varphi,\ \delta)\leqslant\omega_2(\varphi,\ 2^{-n})\leqslant\omega_2(\varphi,\ 4^{-w_k})$，这里 $4^{w_k}\leqslant 2^n<4^{w_k+1}$. 写着 $\varphi(x)=\sum c_k r_k(x)$，那末

$$\begin{aligned}
&\int_0^1[\varphi(x+\delta)-\varphi(x)]^2dx\\
&=2\int_0^1\varphi^2(x)dx-2\int_0^1\left\{\sum_1^\infty c_k r_k(x+h)\cdot\sum_{\nu=1}^\infty c_\nu r_\nu(x)\right\}dx\\
&=2\sum_{k=1}^\infty c_k^2\left\{1-\int_0^1 r_k(x+\delta)r_k(x)dx\right\}\\
&=2\sum_{k=1}^m c_k^2 2^{k+1}\delta+2\sum_{k=m+1}^\infty c_k^2\left(1-\int_0^1 r_k(x+\delta)r_k(x)\right)dx\\
&\leqslant 2\sum_{k=1}^m c_k^2 2^{k+1}\delta+4\sum_{k+1}^\infty c_k^2.
\end{aligned}$$

记 $c_{k+1}^2+\cdots=r_k$，$m=\left[\frac{1}{2}\log\frac{1}{\delta}\right]-1$，那末 $m<\frac{1}{2}(n-1)\leqslant n$，$2^m=O(1/\sqrt{\delta})$，从而，当 $4^{w_k}\leqslant 2^n<4^{w_k+1}$ 时，

$$\begin{aligned}
\omega_2^2(\varphi,\ \delta)&=O(\sqrt{\delta}+r_{m+1})\quad\left(m+1=\left[\frac{1}{2}\log\frac{1}{\delta}\right]\right)\\
&=O(2^{-n\sqrt{k}}+\sum_{\nu>N_k}c_\nu^2)=O(w_{k+1}^{-2\eta})\\
&=O(n^{-2\eta})=O\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{-2\eta},
\end{aligned}$$

$$w_2(\varphi,\ \delta)=O\left(\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{-\eta}\right).$$

索　　引